V I Š A   M A T E M A T I K A

ZA KEMIJSKI I ARHITEKTONSKI ODSJEK

Sastavili
I. DVORNIK i A.BEZJAK
po predavanjima
prof.BLANUŠE

Izdanje i litografija
STRUČNOG ODSJEKA N.S.O.-e ZAGREBAČKOG SVEUČILIŠTA
Z A G R E B 1948.

I. DIO

D i f e r e n c i j a l n i   r a č u n

1. Vrste brojeva

a) Osnovna vrsta brojeva su <u>prirodni brojevi</u>, t.j. brojevi do kojih dolazimo prirodnim putem, brojenjem predmeta. Prirodni su brojevi dakle cijeli pozitivni brojevi kao 1,2, 5,1738 i t.d. a prikazujemo ih na <u>brojnoj crti</u> nizom točaka jednakog razmaka (slika 1).

SLIKA 1

b) Potreba uvođenja nove vrste brojeva javlja se kod izvođenja osnovnih računskih operacija. Iz zahtjeva da jednadžba $x + b = a$ (gdje su a i b prirodni brojevi te gdje je $b > a$ (čitaj : b veće od a) bude rješiva, nastaje pojam negativnih brojeva. Na brojnoj crti prikazujemo ih lijevo od nule, koju dobijemo kao rješenje, kad je $b = a$ (slika 2).

SLIKA 2

Uvodeći u matematici nove pojmove i nove simbole mi uvijek nastojimo, da se kod tih novih simbola održi vrijednost računskih zakona. Taj princip zovemo <u>princip permanencije ili održanja formalnih računskih zakona.</u> Na temelju tog principa izvodimo zakone računanja s negativnim brojevima.

Među takve osnovne zakone spadaju i komutativni zakon (zakon zamjene) koji glasi :

$$a + b = b + a$$

(t.j. vrijednost se sume ne mijenja ako promijenimo red sumanda), te distributivni zakon koji glasi :

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

$$a\,(b - c) = ab - ac$$

Na temelju tog zakona slijedi :

$$5\ (0 - 3) = 5.0 - 5.3 = 0 - 15$$

$$5\ (-3) = - 15$$

ili općenito:

$$a\ (-b) = - ab$$

Pozitivan broj pomnožen negativnim daje negativan broj. (Plus puta minus daje minus).

I dalje: iz

$$(a - b)(c - d) = a\ (c - d) - b\ (c - d) = ac - ad - (bc - bd) =$$

$$= ac - ad - bc + bd$$

na pr. $(12 - 3)(5 - 2) = 12\ (5 - 2) - 3(5 - 2) = 12.5 - 12.2 -$

$-(3.5 - 3.2) = 60 - 24 - 15 + 6 = 27$

slijedi :

$$(0 - 4)(0 - 3) = 0(0 - 3) - 4\ (0 - 3) = 0.0 - 0.3 -$$

$$-(0.4 - 3.4) = 0.0 - 0.3 - 0.4 + 3.4 = 0 + 12 = 12$$

t.j. $(- 4)(- 3) = + 12$

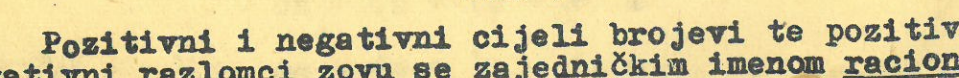
ili općenito :

$(- a)(- b) = + ab$ t.j.

minus puta minus daje plus.

c) Na temelju zahtjeva da jednadžba $bx = a$ bude u svakom slučaju (osim u slučaju $b = 0$) rješiva, t.j. da dioba $\frac{a}{b}$ bude izvediva, uvodi se pojam <u>razlomka ili razlomljenog broja</u>.

Racionalne brojeve prikazujemo na brojnoj crti (slika 3).



SLIKA 3

Pozitivni i negativni cijeli brojevi te pozitivni i negativni razlomci zovu se zajedničkim imenom <u>racionalni brojevi</u>.

Primjenom konačnog broja operacija zbrajanja, odbijanja, množenja i dijeljenja na racionalne brojeve dobivamo opet racionalne brojeve.

Već iz same definicije zbrajanja i množenja proizlazi da su zbroj odnosno produkt dvaju prirodnih brojeva opet prirodni brojevi.

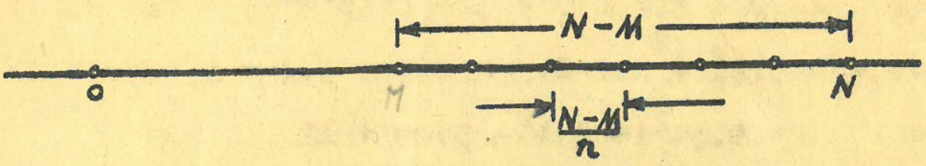
Dalje :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$ čime je gornje pravilo dokazano.

Iz tog zakona slijedi, da se između bilo koja dva racionalna broja $M = \frac{a}{b}$ i $N = \frac{c}{d}$ dade uklopiti po volji mnogo daljih racionalnih brojeva (slika 4).



SLIKA 4

Tražimo racionalne točke na brojnoj crti, koje se nalaze između brojeva M i N. Podijelimo razmak od M do N na n dijelova ($\frac{N-M}{n}$). Dobivene racionalne točke jesu :

$$M$$

$$M + \frac{N-M}{n}$$

$$M + 2\,\frac{N-M}{n}$$

$$M + 3\,\frac{N-M}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M + (n-1)\,\frac{N-M}{n}$$

$$M + n\,\frac{N-M}{n} = M + N - M = N$$

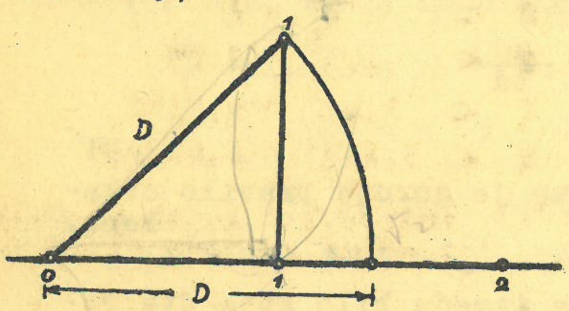
Dobili smo dakle $n - 1$ novih racionalnih točaka između M i N , jer su navedeni izrazi prema malo prije navedenom zakonu racionalni. Tim postupkom možemo između svaka dva racionalna broja uključiti (interpolirati) po volji mnogo racionalnih brojeva .

Kažemo stoga da je skup racionalnih točaka na brojnoj crti posvuda gust.

d) Iracionalni brojevi

Premda je skup racionalnih točaka posvuda gust, ipak to nisu sve točke brojnog pravca, t.j. ima točaka na brojnom pravcu, kojima ne odgovara niti jedan racionalan broj.

Da to dokažemo, služimo se slijedećom konstrukcijom (slika 5) :



SLIKA 5

Po Pitagorinom poučku je $D^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; $D = \sqrt{2}$

Tvrdimo, da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, t.j. da se ne može prikazati u obliku razlomka, kojem su brojnik i nazivnik prirodni brojevi.

Pretpostavimo, da postoji takav racionalan broj (razlomak), $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, koji je skraćen, tako da a i b ne mogu biti oba taki (parni) brojevi. Slijedi :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

Znamo, da je kvadrat takog broja uvijek tak broj, a lihog lih. $[(2n)^2 = 2(2n^2)$, $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.]$ Prema tome izlazi, da bi broj a morao biti tak broj. Stoga možemo mjesto a pisati 2n, gdje je n prirodan broj.

$$(2n)^2 = 2b^2$$

$$4n^2 = 2b^2 \quad /:2$$

$$2n^2 = b^2$$

Sada na isti način izvodimo da bi broj b morao biti tak broj (jer je n prirodan broj a prema tome je dvostruki kvadrat od n tak broj), što je u protuslovlju sa pretpostavkom da je naš razlomak skraćen. Time je dokazano da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, premda smo konstrukcijom dobili dotičnu točku na brojnoj crti. Da bi i takve točke definirali nekim brojem, koji bi određivao njihovu udaljenost od ishodišta (točke nula), uvodimo pojam iracionalnih brojeva. Svi racionalni i iracionalni brojevi sačinjavaju skup realnih brojeva.

Iracionalne brojeve u praktičnoj upotrebi nadomještavamo racionalnim brojevima. Tako

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}4142135624 \quad (\doteq \text{približno jednako})$$

Računamo dakle sa približnim (aproksimativnim) vrijednostima tih brojeva.

Položaj iracionalnih točaka na brojnom pravcu definiramo na brojnoj crti sa dva konvergentna [1] slijeda brojeva na način ilustriranim ovim primjerom :

$$\begin{array}{rcl} 1 = 1^2 & < 2 < & 2^2 = 4 \\ 1{,}96 = 1{,}4^2 & < 2 < & 1{,}5^2 = 2{,}25 \\ 1{,}9881 = 1{,}41^2 & < 2 < & 1{,}42^2 = 2{,}0164 \\ 1{,}999396 = 1{,}414^2 & < 2 < & 1{,}415^2 = 2{,}002225 \end{array}$$

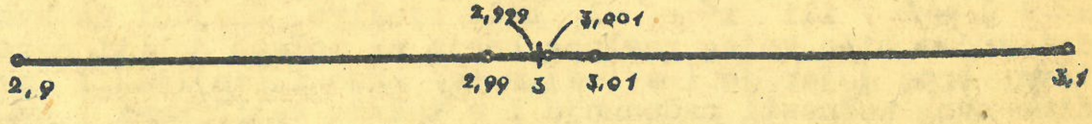
t.j. interval u kojem se nalazi tražena vrijednost od $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{lcl} 1 < \sqrt{2} < 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}1 \\ 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}01 \\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}001 \end{array}$$

Imamo dakle dva slijeda brojeva, jedan rastući (1 1,4 1,41 1,414 ....) i drugi padajući (2 1,5 1,42 1,415.. ...). Svi članovi prvoga manji su od svih članova drugoga, no razlika između odgovarajućih članova tih sljedova postaje kako god hoćemo malena. Kažemo, da se interval steže po zakonu $\frac{1}{10^n}$ ($\frac{1}{10^1} = 0{,}1$ $\frac{1}{10^2} = 0{,}01$, $\frac{1}{10^3} = 0{,}001$ i t.d.) Ta dva slijeda definiraju iracionalan broj $\sqrt{2}$.

Takva dva slijeda mogu definirati i racionalan broj (slika 6) na pr.

$2{,}9 < 3 < 3{,}1$	interval	0,2
$2{,}99 < 3 < 3{,}01$	"	0,02
$2{,}999 < 3 < 3{,}001$	"	0,002



SLIKA 6

1) Točna definicija konvergencije dana je kasnije.

Zato velimo da je 2,999.....= $2,\dot{9} = 3$. $2,\dot{9}$ je periodičan decimalni razlomak. Kažemo da je broj 3 limes (granica) tih sljedova. $\sqrt{2}$ je limes prijašnjih sljedova. Pojam limesa (granice, granične vrijednosti) jedan je od osnovnih pojmova više analize, i o njemu će biti više govora kasnije.

Dva slijeda, kakve smo naveli, ne mogu definirati dva broja. Naime, koliko god bila malena razlika između dva broja A i B, mi možemo u sljedovima poći uvijek tako daleko, da interval kao na pr. kod gornjeg primjera $\frac{1}{10^n}$ postane manji od razlike B - A (t.j. od razmaka između točaka A i B na brojnoj crti, dakle ne mogu oba broja ostati unutar intervala.

Ako nema racionalnog broja, koji bi bio unutar svih intervala, tada sljedovi definiraju iracionalan broj. Pomoću sljedova te pomoću zakona o osnovnim operacijama sa graničnim vrijednostima (limesima, vidi kasnije) može se lako dokazati, da za računanje sa iracionalnim brojevima vrijede računski zakoni.

Komutativni zakon : $ab = ba \quad a + b = b + a$

Distributivni zakon : $a(b + c) = ab + ac$

Asocijativni zakon: $(a + b)+ c = a + (b + c)$; $(ab)c=a(bc)$

Računanje s korijenima $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$ i t.d.

Potreba uvođenja iracionalnih brojeva proizlazi i iz zahtjeva rješivosti jednadžbe $x^2 = a$, gdje je a pozitivan broj, koji nije kvadrat cijelog broja. No ima i drugih iracionalnih brojeva osim onih, koji se općenito prikazuju kao $\sqrt{a}$. Općenito dijelimo iracionalne brojeve na algebarske i transcedentne. Algebarski su oni, koje možemo dobiti kao korijene algebarske jednadžbe

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_o = 0$$ s racionalnim koeficijentima $a_o, a_1, \dots a_n$. Svi ostali zovu se transcedentni (od kojih je jedan od najvažnijih broj $\pi = 3,14159\dots$).

e) Kompleksni brojevi.

Novu vrstu brojeva dobijemo iz zahtjeva da jednadžba $x^2 + 1 = 0$ ili $x^2 = -1$ bude rješiva. Znajući da kvadriranjem bilo kojeg realnog broja ne možemo dobiti negativan broj [jer je $(-a)(-a) = +a^2$ kao i $(+a)(+a)$.] ,uvodimo zbog nužnosti računanja i s takvim veličinama t.zv. imaginarne brojeve. Imaginarnu jedinicu i definiramo sa

$$i = \sqrt{-1}$$

Odatle slijedi :

$$i^2 = -1, \quad \text{isto tako} \quad (-i)^2 = -1$$

Uvođenjem te imaginarne jedinice postaju i jednadžbe općeg oblika $x^2 = - a^2$ i $x^2 + \alpha x + \beta$ rješive za sve vrijednosti od a, α, i β.

$$x^2 = - a^2$$

$$x = \sqrt{- a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{- 1} = \pm ai$$

$$x^2 + \alpha \cdot x + \beta = 0$$

$$x^2 + 2\frac{\alpha}{2} x + (\frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2 + \beta = 0$$

$$(x + \frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2 + \beta = 0$$

$$(x + \frac{\alpha}{2})^2 = (\frac{\alpha}{2})^2 - \beta$$

$$(x + \frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta}$$

$$x_{1,2} = - \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta}$$

Ako je izraz ispod kvadratnog korijena veći od nule $\left[(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta > 0 \text{ t.j. } (\frac{\alpha}{2})^2 > \beta\right]$ tada dobivamo 2 realna rješenja kvadratne jednadžbe, rješenja, koja mogu biti racionalna i iracionalna. No ako je $(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta < 0$ tada ćemo dobiti imaginarno rješenje. Ako je $(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta < 0$ tada je $\beta - (\frac{\alpha}{2})^2 > 0$. Dakle :

$$\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta} = \sqrt{(- 1)\left[\beta - (\frac{\alpha}{2})^2\right]} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\beta - (\frac{\alpha}{2})^2} =$$

$$= \pm i \sqrt{\beta - (\frac{\alpha}{2})^2}$$

Naša jednadžba ima dakle u tom slučaju korijene, u kojima uz realni broj $-\frac{\alpha}{2}$ dolazi i imaginarni broj $\pm i\sqrt{\beta - (\frac{\alpha}{2})^2}$

Na primjer :

$$x^2 - 10x + 34 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 34}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-9} = 5 \pm \sqrt{(-1)9} = 5 \pm 3i$$

Takve brojeve, koji se sastoje od realnog i imaginarnog dijela zovemo <u>kompleksnim brojevima</u>. Dva kompleksna broja, koja se razlikuju samo po predznaku imaginarnog dijela, zovemo konjugirano kompleksnim brojevima.

Primjer :

$$x_1 = 5 + 3i$$
$$x_2 = 5 - 3i$$

Rezultati osnovnih računskih operacija s kompleksnim brojevima daju opet kompleksne brojeve. Tako imamo općenito :

Zbrajanje : $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)\,i$

Množenje : $(a + bi)(c + di) = ac + (bc + ad)\,i + bdi^2 =$
$$= ac - bd + (bc + ad)\,i$$

Dijeljenje: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

Primjer : $\frac{5 + 3i}{4 - 6i} = \frac{(5 + 3i)(4 + 6i)}{(4 - 6i)(4 + 6i)} = \frac{20 + (12 + 30)i + 18i^2}{4^2 - 6^2i^2}$

$$\frac{2 + 42i}{52} = \frac{1}{26} + \frac{21}{26}\,i$$

Iz same definicije imaginarne jedinice izvodimo zakon za potenciranje te jedinice s cijelim eksponentima.

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ i općenito $i^{4n} = 1$

$i^3 = i^2.i = -i$ $\qquad i^{4n+1} = i$

$i^4 = i^2.i^2 = 1$ $\qquad i^{4n+2} = -1$

$i^5 = i^4 \cdot i^1 = +i$ $\qquad i^{4n+3} = -i$

$i^0 = 1$

Primjer :

$$i^{39} = i^{36+3} = i^3 = -i$$

Slično :

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -i$ Općenito : $i^{-4n-k} = i^{-k} = i^{4-k}$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = i$$

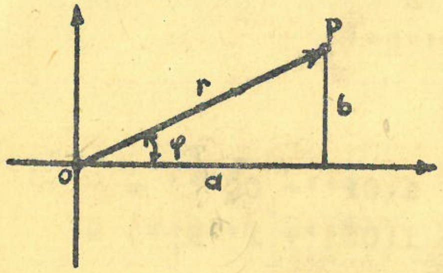
$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1$$

Kompleksni brojevi mogu se shvatiti kao parovi realnih brojeva, kojima se računa po stanovitim propisima (Vidi Ž. Marković, Uvod u višu analizu, drugo izdanje str.147.)

Geometrijsko predočivanje kompleksnih brojeva

Kao što smo se kod prikazivanja realnih brojeva služili brojnim pravcem, tako kompleksne brojeve prikazujemo u brojnoj ravnini u kojoj postavimo koordinatni sustav sa dvije međusobno okomite osi-"realnom" i "imaginarnom". Realna os je brojni pravac realnih brojeva. Imaginarna os siječe realnu os u ishodištu - točki O, i na njoj je okomita.

Kompleksni broj $a + bi$ prikazujemo u ravnini ili točkom $P(a,b)$ ili vektorom $\overline{OP}$ (slika 7).



SLIKA 7

(Vektori su tvorevine, koje imaju veličinu i smjer. U našem slučaju kompleksni broj $a + bi$ je određen sa vektorom $\overline{OP}$ čija je veličina r, a smjer je određen kutom φ .-

Točke, koje leže na realnoj osi predočuju realne brojeve,dok točkama na imaginarnoj osi odgovaraju imaginarni brojevi.

Ravninu, u kojoj prikazujemo kompleksne brojeve Nijemci zovu Gausova ravnina kompl.brojeva, dok se u franc.literaturi upotrebljava naziv Argandov dijagram ili Cauchyeva ravnina.

Kao i na brojnoj crti kod realnih brojeva, pod apsolutnom vrijednošću kompleksnih brojeva razumjevamo udaljenost odgovarajuće točke u ravnini od ishodišta. Pišemo dakle :

$$|a + bi| = + r = + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Tu vrijednost $r = |a + bi|$ nazivamo još i modul kompleksnog broja. Kompleksni broj je dakle zadan (t.j.jednoznačno određen) svojim modulom r i kutom φ , koji zovemo argumentom, i koji je određen do cijelih višekratnika od 2π (jer kutovima φ i $\varphi + 2k\pi$ uz isti r odgovara ista točka).

Između dva navedena načina određivanja kompleksnih brojeva u brojnoj ravnini postoje ove relacije :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

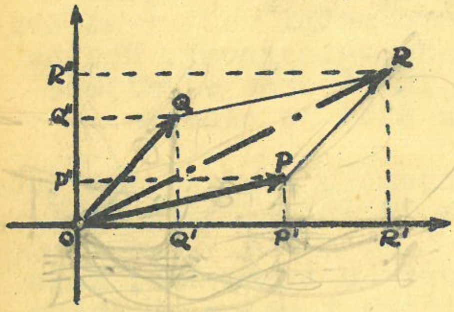
$$a = r \cdot \cos\varphi$$

$$b = r \cdot \sin\varphi$$

Dakle :

$$a + bi = r.\cos\varphi + ir.\sin\varphi = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$$

Zbrajanje kompleksnih brojeva predočujemo geometrijski na ovaj način (slika 8) :



SLIKA 8

$$a + bi + c + di = a + c + i(b+d)$$

$OP' = a$ $OP'' = b$

$OQ' = c$ $OQ'' = d$

$PR \parallel OQ$

$QR \parallel OP$ Dakle i projekcije na osi će biti jednake.

$OQ' = P'R'$

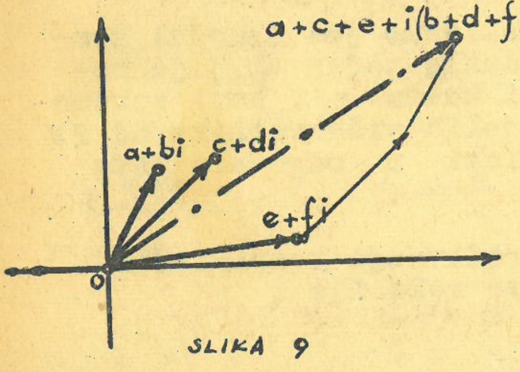
$OQ'' = P''R''$

Dakle :

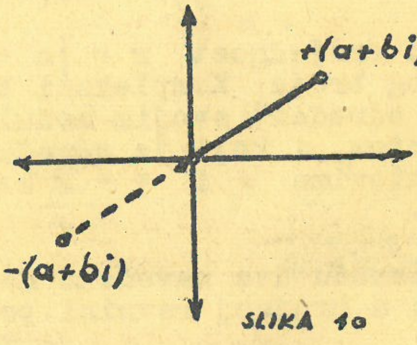
$$\begin{aligned} a + c + i(b + d) &= OP' + OQ' + i(OP'' + OQ'') = \\ &= OP' + P'R' + i(OP'' + P''R'') = \\ &= OR' + OR''i \end{aligned}$$

Velimo, da se "vektori" OP i OQ brojeva $a + bi$, $c + di$ zbrajaju geometrijski ili vektorski, (po paralelogramu, kao na pr. sile). Prema tome, geometrijski kompleksne brojeve zbrajamo tako, da njihove odgovarajuće vektore nadovezujemo jedan na drugi. Pri tom svaki vektor smijemo bilo kako paralelno pomaknuti, jer mu pri tome veličina i smjer ostaju iste i stoga svojim projekcijama na osi uvijek predočuje isti kompleksni broj.

Primjer (slika 9) :



SLIKA 9

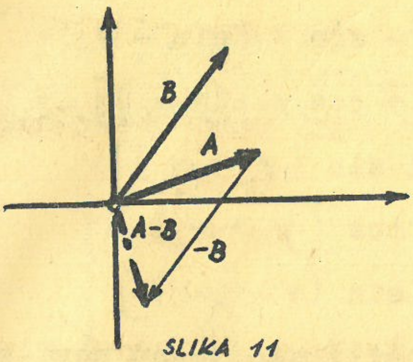


SLIKA 10

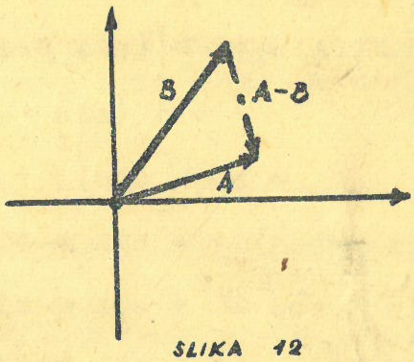
Dva kompleksna broja, koja se razlikuju samo po predznaku, izgledaju ovako (slika 10).

Odbijanje se vrši pribrajanjem negativnog vektora : (slika 11 i 12)

$$A = a + bi$$
$$B = c + di$$
$$A - B$$



SLIKA 11



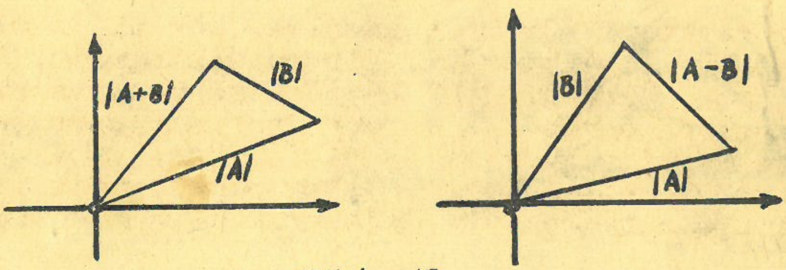
SLIKA 12

Iz ovakvog prikazivanja izvodimo niz važnih nejednakosti, koje vrijede za sve kompleksne brojeve (t.j. uključivo realnih brojeva).

$$|A + B| \leqq |A| + |B|$$
$$|A - B| \leqq |A| + |B|$$

t.j. apsolutna vrijednost zbroja ili razlike manja je ili jednaka zbroju apsolutnih vrijednosti dvaju brojeva.

To izlazi iz jednog od osnovnih poučaka o trokutima, naime da zbroj dviju stranica ne može biti manji od treće (slika 13)



SLIKA 13

Na temelju toga dalje izvodimo :

$$A + B = C$$
$$B = C - A$$
$$C = A + (C - A)$$
$$(C - A) = C - A$$

Prema prvoj nejednadžbi :

$$|C| \leqq |A| + |C - A|$$
$$|C - A| \geqq |C| - |A|$$

Apsolutna vrijednost razlike je veća ili jednaka razlici apsolutnih vrijednosti .

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

Imamo 2 kompleksna broja :

$$a + bi = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$$
$$c + di = \rho(\cos\omega + i.\sin\omega)$$

Množenjem izlazi :

$$(a + bi)(c + di) = r \cdot \varrho\,(\cos\varphi + i.\sin\varphi)(\cos\omega + i\sin\omega) =$$

$$= r \cdot \varrho\Big[(\cos\varphi \cdot \cos\omega - \sin\varphi \cdot \sin\omega) +$$

$$+ i\,(\sin\varphi \cdot \cos\omega + \cos\varphi \cdot \sin\omega)\Big] =$$

$$= r \cdot \varrho\big[\cos(\varphi + \omega) + i\sin(\varphi + \omega)\big]$$

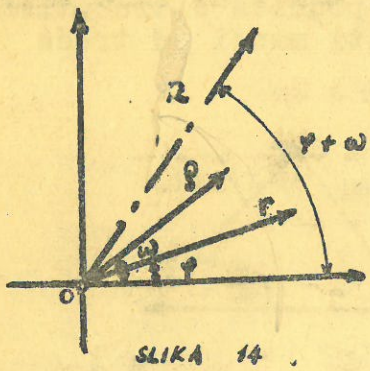
[jer je $\cos\varphi \cdot \cos\omega - \sin\varphi \cdot \sin\omega = \cos(\varphi + \omega)$,

$\sin\varphi \cdot \cos\omega + \cos\varphi \cdot \sin\omega = \sin(\varphi + \omega)$]

Množenjem dvaju kompleksnih brojeva dobili smo jedan novi kompleksni broj, čija je apsolutna vrijednost jednaka umnošku apsolutnih zadanih brojeva, dok je argument rezultata jednak zbroju argumenata faktora. Kraće : Kompleksni brojevi množe se tako da se apsolutne vrijednosti (moduli) pomnože, a argumenti zbroje (slika 14).

Apsolutna vrijednost produkta je dakle jednaka produktu apsolutnih vrijednosti :

$$|(a + bi)(c + di)| = |a + bi| \cdot |c + di|$$



SLIKA 14.

Za dijeljenje izvodimo analogno :

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)}{\varrho(\cos\omega + i.\sin\omega)} = \frac{r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)(\cos\omega - i.\sin\omega)}{\varrho(\cos^2\omega - i^2\sin^2\omega)}$$

$$= \frac{r\,[\cos\varphi \cdot \cos\omega + \sin\varphi \cdot \sin\omega + i(\sin\varphi \cdot \cos\omega - \cos\varphi \cdot \sin\omega)]}{\varrho\,(\cos^2\omega + \sin^2\omega)}$$

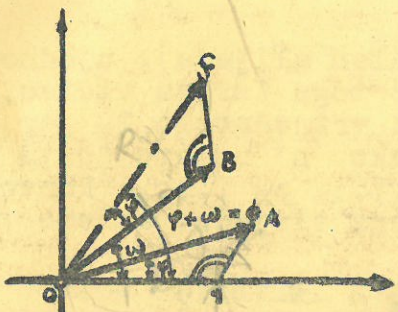
$$= \frac{r}{\varrho}\big[\cos(\varphi - \omega) + i\sin(\varphi - \omega)\big]$$

Kompleksni se brojevi dijele tako, da se moduli podijele, a argumenti odbiju.

Apsolutne vrijednosti kvocijenta jednaka je kvocijentu apsolutnih vrijednosti :

$$\left|\frac{a+bi}{c+di}\right| = \frac{|a+bi|}{|c+di|} = \frac{r}{\rho}$$

Kod geometrijske konstrukcije produkta (slika 15) i kvocijenta (slika 16) služimo se ovim formulama za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva .

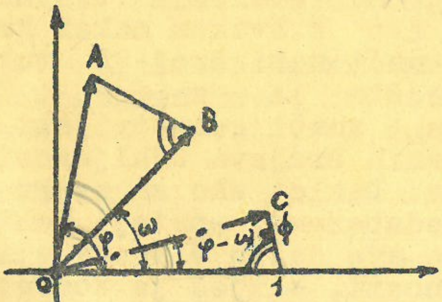


SLIKA 15

$$A = a + bi = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$$
$$B = c + di = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$
$$C = A.B = (a + bi)(c + di) =$$
$$= R\,(\cos\phi + i.\sin\phi\,)$$
$$OB : OC = 1 : OA$$
$$OC = OA.OB$$
$$R = r.\rho$$
$$\phi = \varphi + \omega$$

Konstruira se dakle trokut OBC tako, da bude sličan trokutu O1A.

$$1 : OC = OB : OA$$
$$R = OC = \frac{OA}{OB} = \frac{r}{\rho}$$
$$\phi = \varphi - \omega$$
$$\text{Dakle}\quad C = \frac{A}{B} = \frac{a+bi}{c+di} =$$
$$= R(\cos\phi + i\sin\phi\,) =$$
$$= \frac{r}{\rho}\left[\cos(\varphi-\omega) + i\sin(\varphi-\omega)\right]$$



SLIKA 16

Konstruira se dakle trokut O1C tako, da bude sličan strokutu OBA.

2. Sljedovi brojeva i redovi

Slijed brojeva jest niz brojeva određenih po nekom zakonu. Članovi slijeda pišu se općenito nekim slovom sa indeksom na pr. a_1 , a_2, a_3 ....

Uzmimo na primjer slijed 1,9 , 1,99 , 1,999, 1,9999.... koji se neograničeno približava vrijednosti 2. Njegove članove možemo izraziti i ovako :

$$a_1 = 1{,}9 = 2 - \frac{1}{10}$$

$$a_2 = 1{,}99 = 2 - \frac{1}{100} = 2 - \frac{1}{10^2}$$

$$a_3 = 1{,}999 = 2 - \frac{1}{1000} = 2 - \frac{1}{10^3}$$

....

$$a_n = 2 - \frac{1}{10^n}$$

Izraz koji smo dobili za a_n (-opći član slijeda), ujedno je i zakon, koji određuje ovaj slijed. Iz toga izraza vidimo, da se članovi mogu po volji približiti vrijednosti 2, jer veličina $\frac{1}{10^n}$ postaje po volji malena, ako n uzmemo dosta velik. Velimo da je slijed $a_1, a_2, a_3 ....\ a_n ......$ konvergentan, te da je 2 limes ili granica toga slijeda. Pišemo :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{10^n}\right) = 2$$

(Limes slijeda a_n kada n teži prema neizmjerno).

Slijed je ili konvergentan ili divergentan. Općenito kažemo, da je neki slijed konvergentan, ako postoji neki broj A kojemu se članovi slijeda neograničeno približuju (t.j. ako postoji limes), ili točnije rečeno ako k svakom makar kako malenom pozitivnom broju ε možemo naći neki broj N tako, da za svaki $n \geqq N$ vrijedi nejednadžba $|A - a_n| < \varepsilon$. To bi značilo da je $A = \lim_{n \to \infty} a_n$. $|A - a_n|$ znači geometrijski na brojnoj crti ili u ravnini kompleksnih brojeva udaljenost n-tog člana slijeda od limesa tog slijeda. Dakle, ako za svaku makar kako malenu vrijednost ε , koju odaberemo, postoji neki član slijeda, iza kojeg je ta razlika za sve dalje članove slijeda manja od te izabrane malene vrijednosti, slijed je konvergentan.

Pojedini članovi a_n mogu biti i jednaki A.

Primjer :

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...(-1)^{n+1} \frac{1}{n}, ...$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

Za ovaj slijed kažemo da oscilirajući konvergira prema nuli.

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{6} ......\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}} ....$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$ (Svi taki članovi slijeda jednaki su 1)

Članovi slijeda 1, 2, 3, 4, 5, ...n, ..., kojemu $a_n = n$, rastu preko svih granica. Pišemo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

Slijedu -2, -4, -6, -8, ... -2n.... pada vrijednost ispod svih negativnih granica. Možemo napisati : $\lim\limits_{n \to \infty} (-2n) = -\infty$

Kažemo da su ti sljedovi divergentni u užem smislu.

Općenito : Slijed je divergentan u užem smislu, ako se svakom makar kako velikom pozitivnom M može naći neki N, tako da je za svaki $n \geqq N$.

$$a_n > M\text{ , tada je } \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

ili za svako $n \geqq N$

$$a_n < -M,\quad \text{tada je} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

Ima slijedova, koji niti su konvergentni niti su divergentni u užem smislu. Na pr. sljedovi :

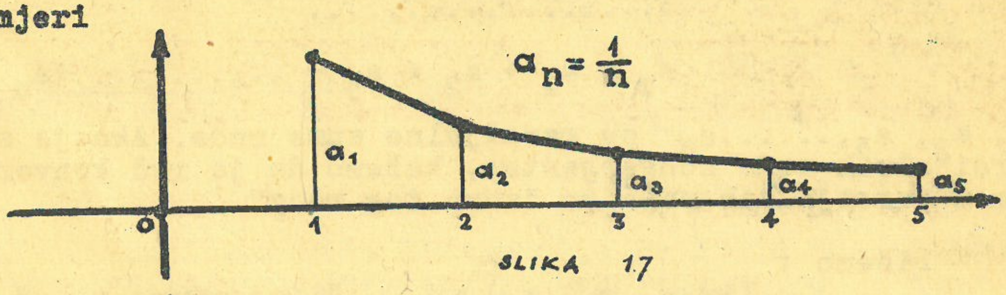
$$1, -2, 3, -4, ...(-1)^{n-1}n, ... \qquad a_n = (-1)^{n-1}.n$$

$$1, -1, 1, -1, ...(-1)^{n-1}, ... \qquad a_n = (-1)^{n-1}$$

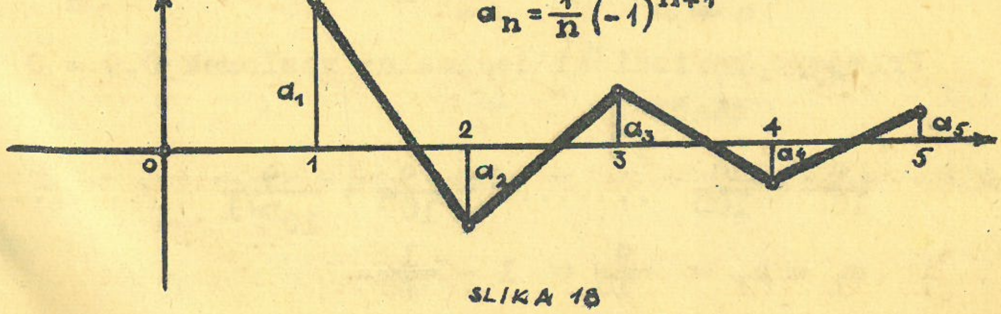
Oba navedena slijeda nemaju limesa, oni osciliraju. Velimo da su ti slijedovi <u>divergentni u širem smislu.</u>

Sljedove možemo prikazati geometrijski u pravokutnim koordinatama, tako, da nam apcise označuju indekse članova slijeda (1,2,3,.....) a ordinate veličinu članova slijeda.

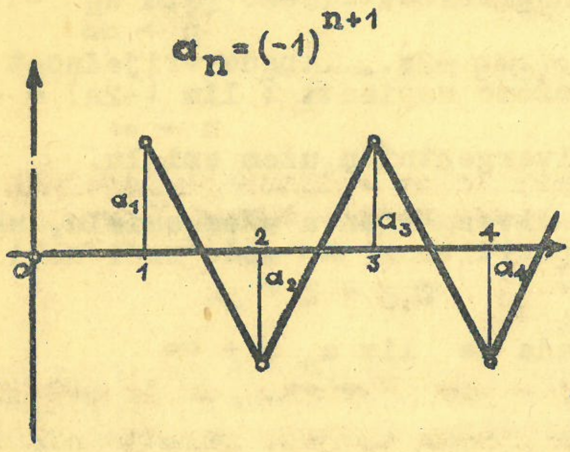
Primjeri



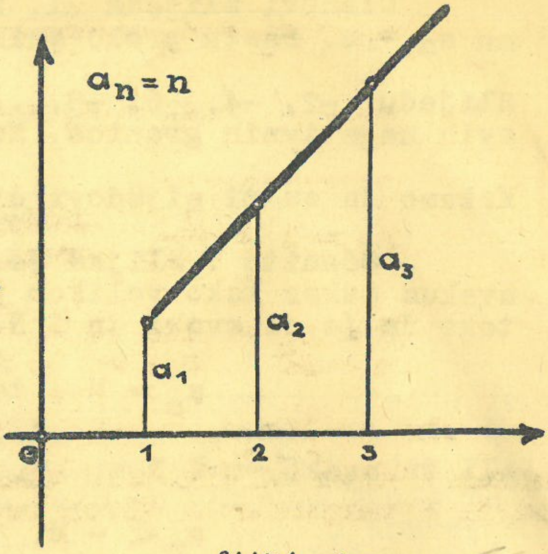
SLIKA 17



SLIKA 18



SLIKA 19



SLIKA 20

Redovi

Članove slijeda možemo zbrajati, a_1 a_2 a_3 ...., pa tada velimo, da je to red brojeva. Ako zbrajamo od prvog člana dalje zbrajajući najprije samo jedan član, pa dva, tri i t.d. dobijemo niz suma.

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots\dots + a_n$$

$s_1, s_2, s_3, \dots\dots s_n$ su parcijalne sume reda. Ako je slijed parcijalnih suma konvergentan, kažemo da je red konvergentan. Limes parcijalnih suma je "suma tog reda".

Pišemo :

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{(čitaj: suma } a_n \text{ od 1 do } \infty\text{)}$$

Primjer: periodički decimalni razlomak $0,\dot{9} = 0,9999\dots$

znači :

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} \;\dots\dots\dots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} \;\dots\dots\dots\dots$$

$$s_1 = a_1 = \frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = 0{,}99 = 1 - \frac{1}{10^2}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0{,}999 = 1 - \frac{1}{10^3}$$

. . . .

$$s_n = 1 - \frac{1}{10^n}$$ Našavši zakon slijeda parcijalnih suma, lako nađemo njegov limes :

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 0{,}\dot{9} = 1$$

Ako je $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$ ili $-\infty$, velimo, da je red divergentan u užem smislu. Ako nema limesa slijeda parcijalnih suma, red je divergentan u širem smislu.

Promotrit ćemo pobliže neke jednostavne vrste redova.

Aritmetički red.

Aritmetički red nastaje iz slijeda, kojemu je svaki član osim prvoga aritmetička sredina dvaju susjednih članova. (Aritmetička je sredina dvaju brojeva $S_a = \frac{a + b}{2}$

Aritmetička sredina od n brojeva iznosi :

$$S_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k)$$

Primjer :

$$4 + 7 + 10 + 13 \ldots \qquad a_1 = 4, \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 10 \ldots$$

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{7+13}{2} = 10 \qquad a_1 = 4 \quad a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot 3$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

U aritmetičkom redu diferencija je dvaju susjednih brojeva konstantna. Ako tu diferenciju nazovemo sa d možemo pisati:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + \left[a_1 + (n - 1)d\right]$$

ili

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + \left[a_n - (n - 1)d\right]$$

Zbrojimo :

$$2\, s_n = n(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (1)$$

Dobili smo dakle formulu za izračunavanje parcijalnih suma reda.

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$s_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \qquad (2)$$

Razmatrajući gornju formulu (2) lako ustanovljujemo, kakav sve može da bude aritmetički red :

Za $d > 0$ $\lim s_n = \infty$, za $d < 0$ $\lim s_n = -\infty$

Za $d = 0$ limes reda je ili $+\infty$ ili $-\infty$, već prema tome da li je a_1 pozitivno ili negativno.

Red je dakle u svim slučajevima divergentan u užem smislu. Jedino u trivijalnom slučaju kada je $d = 0$ i $a_1 = 0$ red je konvergentan jer glasi $0 + 0 + 0 + 0$ ...... te su mu naravno i sve parcijalne sume jednake nuli.

Prije nego što pređemo na razmatranje geometrijskog reda treba da izvedemo neke formule.

a) Binomni poučak.

Binomni poučak izvodimo na temelju poznavanja nekih osnovnih zakona kombinatorike.

Ako uzmemo stanoviti broj elemenata kao na pr. brojeve 1, 2,3, ... ili slova abecede a, b, c..... i sl., možemo te elemente poredati na različite načine. Svaki od tih načina zovemo permutacijom zadanog broja elemenata.

Tako na pr. 3 elementa abc možemo poredati na 6 načina:

abc bac cab
acb bca cba

U gornjem primjeru smo ustanovili da od 3 elementa možemo tvoriti 6 permutacija. Ako broj permutacija označimo sa P označivši kao indeks broj elemenata, izlazi :

$$P_1 = 1$$
$$P_2 = 1 \cdot 2$$
$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Želimo li naći broj permutacija od 4 elementa, ustanovimo lako, da se taj četvrti element može umetnuti u svaku permutaciju od tri elementa na 4 različita mjesta : tako se iz permutacije abc dobiju 4 nove permutacije <u>d</u>abc, a<u>d</u>bc, ab<u>d</u>c , abc<u>d</u> . Ukupno dobijemo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ permutacija.

$P_4 = 1\cdot2\cdot3\cdot4$ i na isti način dalje :

$P_5 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$ itd. i općenito

$P_n = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(n-1)n$

Radi kratkoće uvodimo novi matematički simbol. Pišemo :

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\ldots\cdot n = n!$ (čitaj : n faktorijela ili n fakultet ; "faktorijela" je imenica ženskog roda).

n! (n faktorijela) dakle znači produkt svih cijelih prirodnih brojeva od 1 do n uključivo.

Možemo dakle napisati :

$$P_1 = 1!$$
$$P_2 = 2!$$
$$P_3 = 3!$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n = n! \qquad (3)$$

Može se napomenuti, da se slijed faktorijela (1!, 2!, 3!.. ...n!) penje vrlo naglo. Tako da je na pr. već 11! = 39916800 (zbog čega je na pr.slijed $\frac{a^n}{n!}$ konvergentan, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$, za svaki a. Članovi počinju padati za $n > a$).

Dalji pojam jest pojam kombinacije. Ako od n elemenata želimo uzeti k elemenata, to imamo za to različite mogućnosti. Svaku od njih zovemo kombinacijom.

Primjer : Brojevi 1,2,3,4,5 jesu pet elemenata. Ako želimo uzeti 1 element imamo 5 mogućnosti, pet kombinacija. Pišemo $K_5^{(1)} = 5$ (čitaj : broj kombinacija prvog razreda od 5 elemenata jednak je 5).

Slično : $K_5^{(2)} = 10$

(12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45).

Kod kombinacija nam je svejedno, kako su elementi poredani, t.j. ne razlikujemo 12 do 21 i t.d.

Ako imamo n elemenata : 1, 2, 3, 4,.... n, broj kombinacija prvog razreda iznosi svakako n.

$$K_n^{(1)} = n$$

Broj kombinacija drugoga razreda iznosi $\frac{n(n-1)}{2}$, jer se može na pr.prvi element uzeti sa svakim od ostalih n-1 elemenata, isto tako drugi i t.d., a budući da svih elemenata ima n, dobijemo n(n-1) kombinacija. No od toga smo svaku kombinaciju uzeli dva puta na pr. 1 i 9 a kasnije 9 i 1. Treba dakle još dijeliti sa 2 :

$$K_n^{(2)} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

Slično izvodimo broj kombinacija trećega razreda. Svaku od kombinacija od po dva elementa, kojih ima $K_n^{(2)} = \frac{n(n-1)}{2!}$ možemo uzeti sa svakim od preostalih n-2 elemenata. Tako bismo dobili $\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}$ kombinacija, no uvijek bismo imali po 3 iste, jer bi jedan put uzeli na pr. kombinaciju 19 i element 3, drugi put kombinaciju 13 i element 9, treći put kombinaciju 39 i element 1. Pravi broj kombinacija dobijemo dakle dijeljenjem sa 3 :

$$K_n^{(3)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

i analogno dalje :

$$K_n^{(4)} = \frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

i općenito :

$$K_n^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(k-1)]}{k!} \qquad (4)$$

Tako na primjer :

$$K_{10}^{(3)} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$$

Budući da se izraz za broj kombinacija u višoj analizi vrlo često upotrebljava, uvodi se novi simbol.

Umjesto $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\ldots[n-(k-1)]}{k!}$ pišemo $\binom{n}{k}$

(čitaj: n iznad k) . Na pr. $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\binom{n}{1} = n$

Dakle :

$$K_n^{(1)} = \binom{n}{1} = n$$

$$K_n^{(2)} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$$

....

$$K_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

Na temelju ovih osnovnih pojmova kombinatorike izvodimo binomni poučak. Tražimo čemu je jednak

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ ....(a+b)}_{n \text{ puta}}$$

Ako množimo n binoma, onda dobijemo stanoviti broj članova od kojih je svaki produkt od n faktora. Ti se članovi doista dobiju, ako na sve moguće načine tvorimo produkte uzimajući iz svakog binoma po jedan faktor. član za faktor.

Primjer : $(a+b)(c+d)(e+f) =$

$= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$

Mjesto $(a+b)^n$ pisat ćemo $(a+b_1)(a+b_2)\ .....(a+b_n)$ Imamo dakle produkt od n binoma. Da bi te članove pravilno poredali, uzmemo najprije onaj član, u kojem su svi prvi članovi binoma međusobno pomnoženi. Zatim redom sve članove prema padajućim potencijama od a. Pri tome moramo uvijek uzeti u obzir sve kombinacije :

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\ ....(a+b_n) =$$

$$a^n + a^{n-1}(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n) + a^{n-2}(b_1b_2+b_1b_3+\ldots+b_{n-1}b_n) +$$

$$+ a^{n-3}(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\ldots+b_{n-2}b_{n-1}b_n) + a(b_1b_2b_3\cdots b_{n-1} +$$

$$+ \ldots\ldots + b_2b_3b_4\ldots\cdot b_n) + b_1b_2b_3\ldots\cdot b_n \ .$$ $n-(k-1)$

Vidimo da a^{n-1} množimo redom sa svim kombinacijama I razreda elemenata $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$. Analogno a^{n-2} množimo sa svim kombinacijama drugoga razreda istih elemenata i t.d. a^2 množimo sa svim kombinacijama $n-2$ razreda, a^1 sa kombinacijama $n-1$ razreda. Zadnji član čitavog izraza je kombinacija n-tog razreda od n elemenata $b_1b_2b_3\ldots b_n$.

Uvrštavajući $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = b$

i pišući kao kvocijente simbole za broj kombinacija dobijemo binomni poučak, koji glasi :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \binom{n}{3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 +$$

$$+ \binom{n}{n-2}\cdot a^2\cdot b^{n-2} + \binom{n}{n-1}\cdot ab^{n-1} + b^n \qquad (6)$$

Odatle se simboli za broj kombinacija $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ .... zovu i binomni koeficijenti.

Jedno od najvažnijih svojstava binomnih koeficijenata jest, da je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, t.j. $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$ i sl.

To lako dokazujemo : $\frac{56}{2} = 28$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(r-1)]}{r!}\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot[n-(n-r-1)]}{(n-r)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(r+1)}{(n-r)!}\cdot\frac{r!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Zgodnim proširivanjem izraza za $\binom{n}{r}$ i $\binom{n}{n-r}$ dobili smo iste izraze, čime je dokazano, da je

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad (7)$$

Često nam je zgodno, da uvedemo i izraz $\binom{n}{0}$. Definiramo da je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Stavlja se također

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad \text{dakle} \quad 0! = 1$$

t.j. pod $0!$ moramo razumijevati 1, ako opća formula $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ treba da vrijedi i za slučaj $r = 0$.

S tom oznakom binomni poučak glasi :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n \qquad (8)$$

b) Granična vrijednost izraza a^n

Najprije ćemo razmotriti slučaj kad je $a > 1$. Tražimo $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$. Budući da je $a > 1$ možemo pisati $a = 1 + \varepsilon$, gdje je ε pozitivan broj.

Prema binomnom poučku izlazi $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\cdot\varepsilon$ jer smo izostavili sve članove osim prva dva, a svi su članovi pozitivni. Slijedi :

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^n > \lim_{n\to\infty}(1+n\cdot\varepsilon) = \infty$$

Izraz $n\cdot\varepsilon$ naime teži k ∞ kad n teži k ∞ . Time je dokazano da je za $a > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$

Za $a < 1$ možemo izvod svesti na pređašnji : uvrstimo $a = \frac{1}{b}$ gdje je $b > 1$.

Slijedi :
$$a^n = \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$$

Zbog $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\cdot\varepsilon$ vrijedi

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{1}{1+n\cdot\varepsilon}\,, \quad \text{dakle}$$

zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n\cdot\varepsilon} = 0$ mora biti i

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

Geometrijski red

Geometrijski red nastaje iz slijeda, kojemu je svaki član osim prvoga geometrijska sredina između dvaju susjednih.

Geometrijsku sredinu definiramo :

$$S_g = \sqrt{ab}$$

$$S_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ je simbol za produkt od n brojeva. k je indeks multiplikacije. (Čitaj: produkt a_k od $k=1$ do n)

Zahtjev, da svaki član bude geometrijska sredina susjednih članova, može se izraziti ovako

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} a_{k+1}} \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots\ldots)$$

Iz toga izalazi dijeljenjem sa a_{k-1}

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \sqrt{\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}}$$

a dijeljenjem sa a_{k+1}

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}}$$

ili uzevši recipročnu vrijednost

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \sqrt{\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}}$$

t.j.

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots\ldots)$$

Uvrstivši po redu $k = 2,\ 3,\ \ldots\ldots$ dobijemo

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{a_k}{a_{k-1}} \quad \ldots\ldots$$

Omjer susjednih članova je dakle konstantan. Nazovimo ga q. Onda je

Kvocijent dvaju susjednih članova je stalan

$$\frac{a_2}{a_1} = q \qquad \text{ili} \quad a_2 = a_1 q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \qquad \text{ili} \quad a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \qquad \text{ili} \quad a_4 = a_3 q = a_1 q^3$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad a_n = a_1 q^{n-1}$$

Red dakle glasi

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \ldots\ldots$$

Parcijalna suma toga reda dobije se na poznat način (geometrijska progresija) :

$$s_n = a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \ldots\ldots\ldots + a_1 q^{n-1} \qquad / \cdot q$$

$q \neq 1$

$$s_n q = a_1 q + a_2 q^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Odbijanjem donje jednadžbe od gornje dobijemo

$$s_n - s_n q = a_1 - a_1 q^n$$

$$s_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q} \qquad (9)$$

Analizirajući ovu formulu za izračunavanje parcijalnih suma geometrijskog reda, možemo lako ispitati kada je red konvergentan, a kada divergentan.

za $|q| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q}$$

jer drugi član izraza za s_n za $|q| < 1$ teži nuli kad $n \to \infty$
Za $|q| < 1$ red je dakle konvergentan.

Potpuna diskusija geometrijskog reda izgledala bi ovako:

$$q \geqq 1 \begin{cases} a_1 > 0 & \lim s_n = +\infty \\ a_2 < 0 & \lim s_n = -\infty \end{cases}$$ red je divergentan u užem smislu.

$|q < 1$ $\qquad \lim s_n = \dfrac{a_1}{a-q}$ red je konvergentan

$q \leqq -1$ $\qquad$ red nema limesa, divergentan je u širem smislu.

Primjer :

1) $q = -1$

Red glasi : $a - a + a - a + a \ldots\ldots$

Parcijalna suma reda $s_n = a\dfrac{1-(-1)^n}{2}$ za taki n $s_n = 0$ za lihi n $s_n = a$

2) Pomoću formule za geometrijski red izvodimo i općenitu formulu za pretvaranje periodičnih decimalnih razlomaka u obične razlomke. Ako imamo periodični decimalni broj, kojem nakon r mjesta iza decimalnog zareza slijedi grupa od s mjesta koja se periodički ponavlja, onda ga možemo predočiti pomoću geometrijskog reda :

$$0,\ldots\ldots\ldots = \frac{A}{10^r} + \frac{B}{10^{r+s}} + \frac{B}{10^{r+2s}} + \frac{B}{10^{r+3s}} + \ldots\ldots\ldots$$

Od drugog člana dalje imamo dakle geometrijski red čiji je kvocijent $q = \dfrac{1}{10^s}$, a prvi je član $a_1 = \dfrac{B}{10^{r+s}}$. Po formuli za zbroj geometrijskog reda izlazi :

$$\frac{A}{10^r} + \frac{B}{10^{r+s}} + \frac{B}{10^{r+2s}} + \ldots = \frac{A}{10^r} + \frac{\dfrac{B}{10^{r+s}}}{1 - \dfrac{1}{10^s}}$$

$$= \frac{A}{10^r} + \frac{B}{10^{r+s} - 10^r} = \frac{A(10^s-1) + B}{10^r(10^s-1)} = \frac{A\,10^s + B - A}{10^{r+s} - 10^r}$$

Primjer : antiperiod A

s devetica

$$0,34\dot{2}\dot{1}\dot{8} = \frac{34\cdot 10^3 + 218 - 34}{(10^3-1)\,10^2} = \frac{34218 - 34}{99900}$$

period B

Rezultat je razlomak, kojemu je <u>brojnik</u> : broj, što ga čine znamenke pred periodom i znamenke perioda, minus broj, što ga čine znamenke pred periodom ; a <u>nazivnik</u> : broj, koji ima toliko devetica, koliko period ima znamenaka, i iza njih toliko nula koliko ima znamenaka pred periodom.

Harmonijski red.

Harmonijski red je red, u kojemu je svaki član harmonijska sredina dvaju susjednih .

Harmonijsku sredinu definiramo izrazima

$$\frac{1}{S_h} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad \frac{1}{S_h} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

t.j. recipročna vrijednost harmonijske sredine je aritmetička sredina recipročnih vrijednosti zadanih brojeva.

Ako iz tog izraza izračunamo S_h izlazi :

$$S_h = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{, odnosno za } n \text{ brojeva}$$

$$S_h = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}}$$

Naziv "harmonijski" dolazi iz teorije muzike. Broj titranja kvarte je harmonijska sredina između broja titraja prime i oktave. Recipročne vrijednosti aritmetičkog reda tvore harmonijski red i obrnuto.

Najobičniji primjer harmonijskog reda je red recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} \ldots.$$

Harmonijski je red divergentan u užem smislu (iako slijed iz kojeg je nastao konvergira nuli).

To dokazujemo na ovaj način : red rastavimo na grupe tako, da je svaka od tih grupa veća od $\frac{1}{2}$. Budući da imamo po volji velik broj tih grupa, očito je, da red nema limesa, nego da parcijalne sume postaju po volji velike, ako pođemo dosta daleko.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2\cdot\frac{1}{4} = 2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{> 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{32}}_{> 16\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{> \cancel{<} 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}} + \ldots.$$

Odatle slijedi slijedeća nejednadžba :

$$S_{2^{n+1}} > \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}}_{(n+1)\text{ puta}} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

Da bi bolje odredili približnu vrijednost parcijalnih suma reda, određujemo na sličan način, od čega je suma manja :

Red rastavljamo u grupe od kojih je svaka manja od 1

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{< 2\,\frac{1}{2} = 1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{< 4\,\frac{1}{4} = 1} + \underbrace{\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{15}}_{< 8\,\frac{1}{8} = 1} + \underbrace{\frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{31}}_{< 16\,\frac{1}{16} = 1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}}_{< 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1}$$

i dalje slijedi :

$$S_{2^{n+1}-1} < n + 1 = n+1$$

Na primjer :

$$S_{1048576} = S_{2^{20}} > 1 + \frac{20}{2} = 11$$

$$S_{1048575} = S_{2^{20}-1} < 20 + 1 = 21$$

t.j. zbroj od prvih 1048576 članova tog reda je manji od 21 i veći od 11. (Zapravo smo samo pokazali, da je suma prvih 1048575 članova manja od 21. No budući da je već suma drugog i trećeg člana $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ za $\frac{1}{6}$ manja od 1, to je razlika između 21 i sume prvih 1048575 članova sigurno veća od $\frac{1}{6}$, ako dakle dodamo 1048576-ti član $\frac{1}{1048576}$, onda smo još uvijek ispod 21).

Vidimo dakle, da taj red divergira vrlo sporo.

Kod redova, koji su divergentni u širem smislu, nema doduše limesa parcijalnih suma, ali se može često na drugi način definirati "suma" toga reda. Takovi se redovi zovu "sumabilni" ili "zbrojivi". Pobliže o tome vidi Marković I, 2.izd. str.102.

Konvergentni redovi mogu konvergirati sporo ili brzo. Tako na pr. red za izračunavanje broja π koji je otkrio Leibniz, a koji glasi :

Leibnizov red

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots,$$ konvergira vrlo sporo,

tako da bi trebalo zbrojiti milijun članova toga reda, da izrazimo broj π na 6 decimala točno.

Mnogo je jednostavnije izračunati broj π pomoću dvaju redova, koji oštro konvergiraju, a glase :

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \ldots\ldots\right) -$$

$$- 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \ldots\right)$$ (Machin-ov red)
(izgovor: Mečin)

Da se izračuna broj π na 7 decimala, dovoljno je zbrojiti 6 članova od prvog i 2 člana od drugog reda.

Računanje s limesima.

Slijed $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ ima limes A, ako za svaki makar kako maleni pozitivni ε postoji neki N, tako da za sve $n \geqslant N$ vrijedi nejednadžba :

$$|A - a_n| < \varepsilon \quad ,$$ što znači, da

$$A - a_n \to 0$$

Ako je

$$\lim a_n = A$$

$$\lim b_n = B ,$$

onda za neko ε vrijedi za prvi slijed za sve $n \geqslant N_1$ $|A - a_n| < \varepsilon$

za drugi slijed za sve $n \geqslant N_2$ $|B - b_n| < \varepsilon$

Uzmemo neki n veći od N_1 i N_2. Tražimo $\lim(a_n + b_n)$

$$|A + B - (a_n + b_n)| = |(A - a_n) + (B - b_n)|$$

Prema poučku, da je apsolutna vrijednost sume manja ili jednaka sumi apsolutnih vrijednosti, slijedi dalje :

$$|(A - a_n) + (B - b_n)| \leqq |A - a_n| + |B - b_n| \leqq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Dakle :

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{10}$$

ili :

$a_n + b_n \to A + B$

Limes sume jednak je sumi limesa.

Slično izlazi za razliku :

$$\left|A - B - (a_n - b_n)\right| = \left|(A - a_n) - (B - b_n)\right| \leq$$
$$\leq \left|A - a_n\right| + \left|B - b_n\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Dakle :

$$\lim_{n \to \infty}(a_n - b_n) = A - B = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n \tag{11}$$

Limes diferencije jednak je diferenciji limesa.

Analogni dokazi postoje i za produkt i kvocijent limesa.

Iz $\left|AB - a_n b_n\right| = \left|A(B - b_n) + b_n(A - a_n)\right| \leq \left|A(B-b_n)\right| + \left|b_n(A-a_n)\right|$

$\leq |A| \cdot |B - b_n| + |b_n| \cdot |A - a_n|$, gdje i $|B - b_n|$ i $|A - a_n|$ teži nuli, slijedi, da je

$$\lim_{n \to \infty} a_n b_n = A\,B = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n \quad , \quad \text{t.j.} \tag{12}$$

Limes produkta jednak je produktu limesa.

Iz $\dfrac{A}{B} - \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A \cdot b_n - a_n \cdot B}{B \cdot b_n} = \dfrac{b_n(A - a_n) - a_n(B - b_n)}{B \cdot b_n}$

gdje u brojniku oba člana teže nuli dok nazivnik teži ka B^2 slijedi, da je $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, t.j. (13)

Limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa.

3. Pojam funkcije

U matematici računamo sa dvije osnovne vrste veličina : sa konstantama te sa promjenjivim veličinama ili varijablama.

Konstante su na pr. svi posebni brojevi kao 1,2,3, π , e i sl. te se obično označavaju slovima prvog dijela abecede (a, b, c, ... m, n, p, q, i sl.).

Varijable su na pr. put i brzina kod gibanja i sl. te se označavaju posljednjim slovima alfabeta (x, y, z, t, u, v).

Varijable, t.j. promjenjive veličine najčešće dolaze u nekoj međusobnoj vezi, na pr. put s i vrijeme t. Pišemo, da je kod jednolikog gibanja s = kt, što znači da nekoj veličini t odgovara određena vrijednost puta s, koja se dobije po toj formuli.

Ako se dvije veličine mijenjaju u stanovitoj ovisnosti, tako da svakoj vrijednosti jedne veličine po nekom zakonu (računskom propisu) pripada određena vrijednost druge veličine, zovemo tu drugu veličinu funkcijom prve. Prva je neovisna varijabla, funkcija je ovisna varijabla.

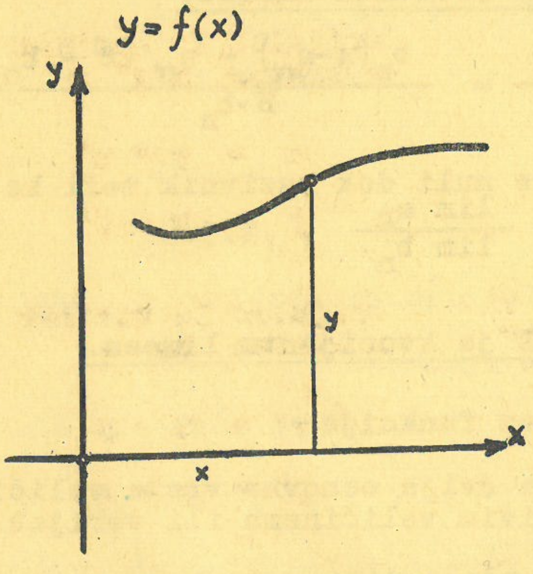
Pišemo : $y = f(x)$ (y jednako funkcija od x)

y je funkcija, t.j. ovisna varijabla
x je neovisna varijabla .

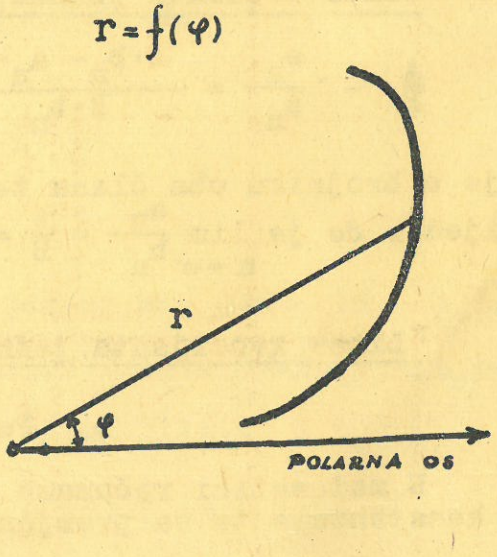
Grafički tu istu funkcionalnu ovisnost dviju varijabli prikazujemo u ravnini, u kojoj je dan neki koordinatni sistem, najčešće pravokutni (Descartesov) ili polarni.

Niz svih točaka, čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu, kojom je funkcija zadana, sačinjavaju graf ili grafičku sliku funkcije.

Slika 21 prikazuje graf u pravokutnom koordinatnom sustavu, a slika 22 u polarnom koordinatnom sustavu.

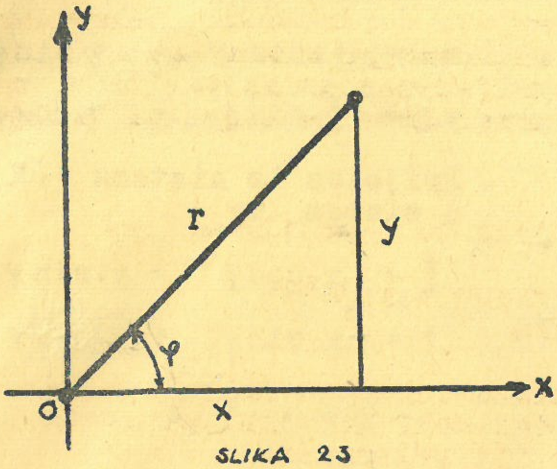


SLIKA 21



SLIKA 22

Formule za prijelaz iz jednog koordinatnog sustava u drugi (slika 23) lako izvodimo :



SLIKA 23

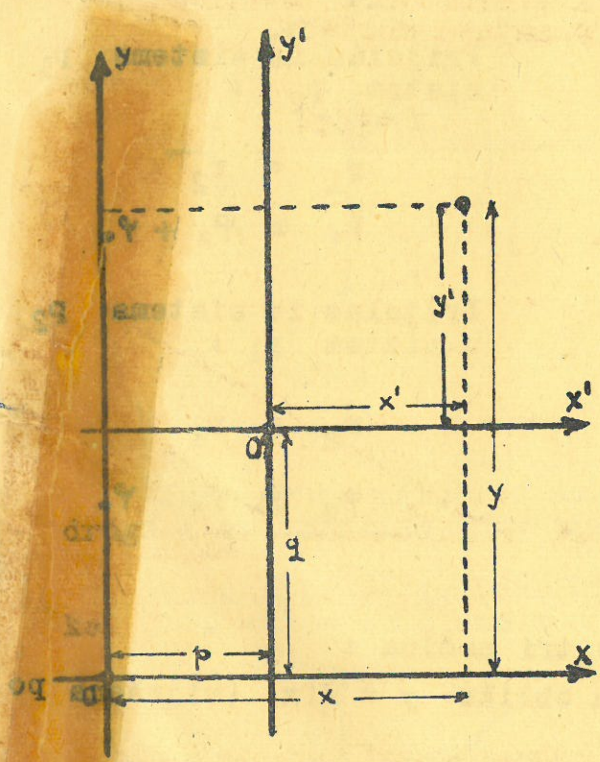
Prijelaz iz pravokutnih u polarni :

$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Prijelaz iz polarnih u pravokutne :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Lako je dobiti i formule za translaciju (paralelno pomicanje, slika 24) i rotaciju pravokutnog koordinatnog sustava (slika 25) :



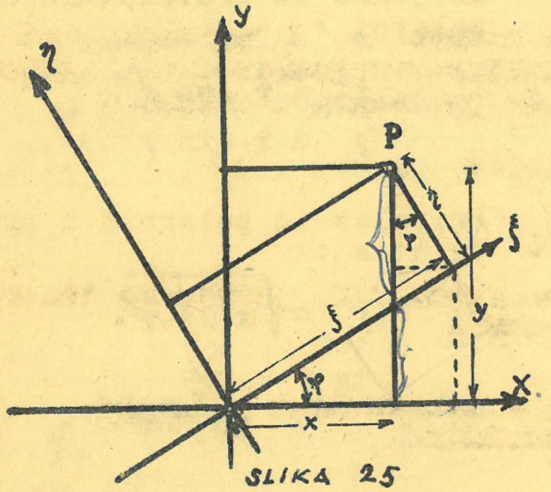
SLIKA 24

Prijelaz iz sistema xy u sistem x'y' :

$$x = p + x'$$
$$y = q + y'$$

Prijelaz iz sistema x'y' u sistem xy :

$$x' = x - p$$
$$y' = y - q$$



SLIKA 25

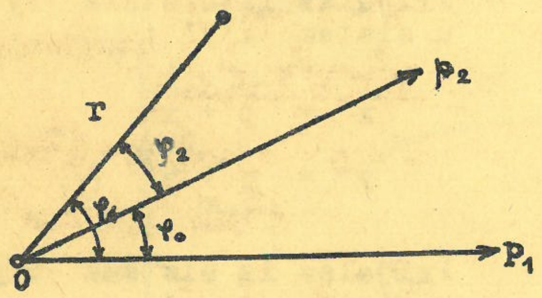
Prijelaz iz sistema xy u sistem ξ, η :

$$x = \xi \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi$$
$$y = \xi \cdot \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi$$

Prijelaz iz sistema ξ, η u sistem xy :

$$\xi = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi$$
$$\eta = -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$$

Rotacija je u polarnim koordinatama mnogo jednostavnija (slika 26) :



SLIKA 26

Prijelaz iz sistema p_1 u sistem p_2 :

$$r_1 = r_2$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_0$$

Prijelaz iz sistema p_2 u sistem p_1 :

$$r_2 = r_1$$
$$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_0$$

Funkcije mogu biti zadane na tri načina :

1) eksplicitno, t.j. jednadžbom oblika $y = f(x)$ (riješena po y, po zavisnoj varijabli).

2) implicitno, t.j. jednadžbom oblika $f(x,y) = 0$.

Funkcije, koje grafički predočene daju elementarne krivulje, često susrećemo zadano implicitno :

pravac u obliku $Ax + By + C = 0$
kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$

elipsu $\quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

hiperbolu $\quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad$ i t.d.

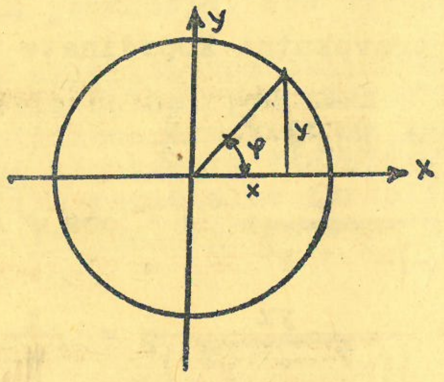
3) parametarski : koordinate svih točaka x i y zadane su kao funkcije jedne nove promjenljive vrijednosti t, koju zovemo parametrom. Dakle, funkcija je zadana u obliku

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t)$$

Primjer : Ako kut φ uzmemo kao parametar, jednadžba centralne kružnice (slika 27) glasila bi :

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad (r = \text{konstanta} = \text{polumjer kružnice})$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

Prijelaz iz parametarskog oblika u implicitni vršimo pomoću eliminacije parametra.



SLIKA 27

U našem primjeru :

$$\begin{array}{l} x = r\cdot\cos\varphi \\ \underline{y = r\cdot\sin\varphi} \end{array} \quad \text{kvadriranjem}$$

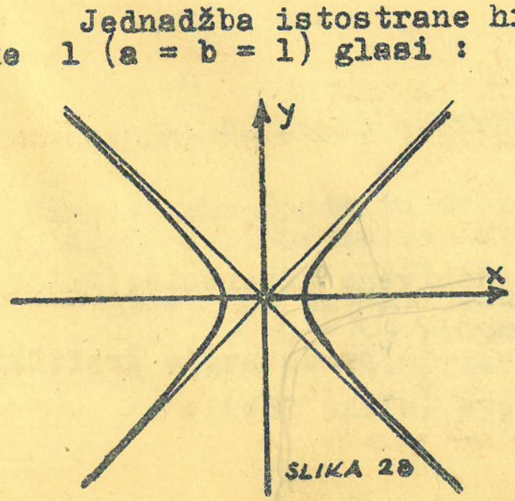
$$\begin{array}{l} x^2 = r^2\cos^2\varphi \\ \underline{y^2 = r^2\sin^2\varphi} \end{array} \quad \text{zbrajanjem}$$

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi$$
$$= r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Primjer za prijelaz iz jednog koordinatnog sistema u drugi i za rotaciju koordinatnog sistema :

Jednadžba istostrane hiperbole, kojoj su poluosi jednake 1 ($a = b = 1$) glasi :

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad (\text{sl.28})$$



SLIKA 28

prijeđemo li u polarni koordinatni sustav :

$$x = r\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$
$$r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = 1$$
$$r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 1$$

Izvršimo sada rotaciju sistema za 45^0 u smjeru gibanja kazaljke na satu (negativni smisao vrtnje) : $\boxed{\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}}$

$$r_1 = r_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\pi}{4}$$

$$r^2 \cdot \left[\cos^2(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \sin^2(\varphi - \frac{\pi}{4}) \right] = 1$$

$$r^2 \cdot \left[(\cos\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\varphi \cdot \sin\frac{\pi}{4})^2 - (\sin\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi)^2 \right] = 1$$

$$r^2 \cdot \left[\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 1$$

$$r^2 \cdot 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi = 1$$

$$r^2 \cdot \sin 2\varphi = 1$$

Izvršimo sada prijelaz na pravokutne koordinate :

polazeći od

$$r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

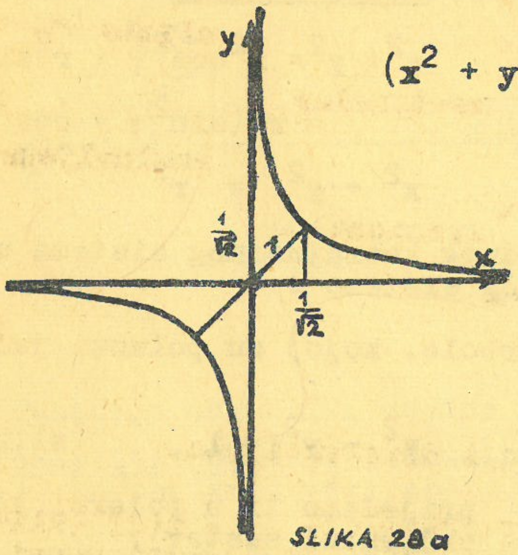
$$(x^2 + y^2) \cdot \frac{yx}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{1}{2}$$

$$yx = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2x}$$

Općenito $x^2 - y^2 = a^2$

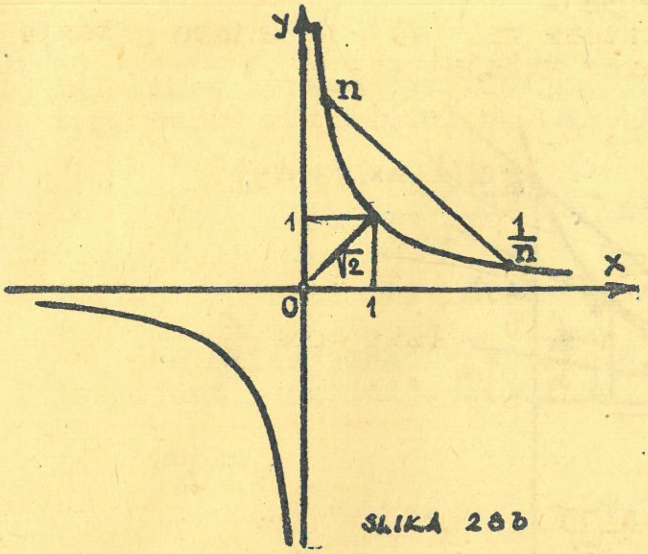
prelazi u $y = \frac{a}{2x}$



SLIKA 28a

Slika 28a prikazuje graf dobivene hiperbole.

Istostrana hiperbola $y = \frac{1}{x}$ predstavlja grafički sliku recipročnih vrijednosti brojeva (slika 28b) :



SLIKA 28b

Funkcije dijelimo na <u>algebarske</u> i <u>transcedentne</u>. Algebarske su funkcije sve, kod kojih su x i y međusobno vezani algebarskom jednadžbom konačnog stepena. (Na primjer opći oblik algebarske jednadžbe trećeg stepena po x i y glasio bi :

$$a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 +$$

$$+ b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + c_1x +$$

$$+ c_2y + d_1 = 0$$

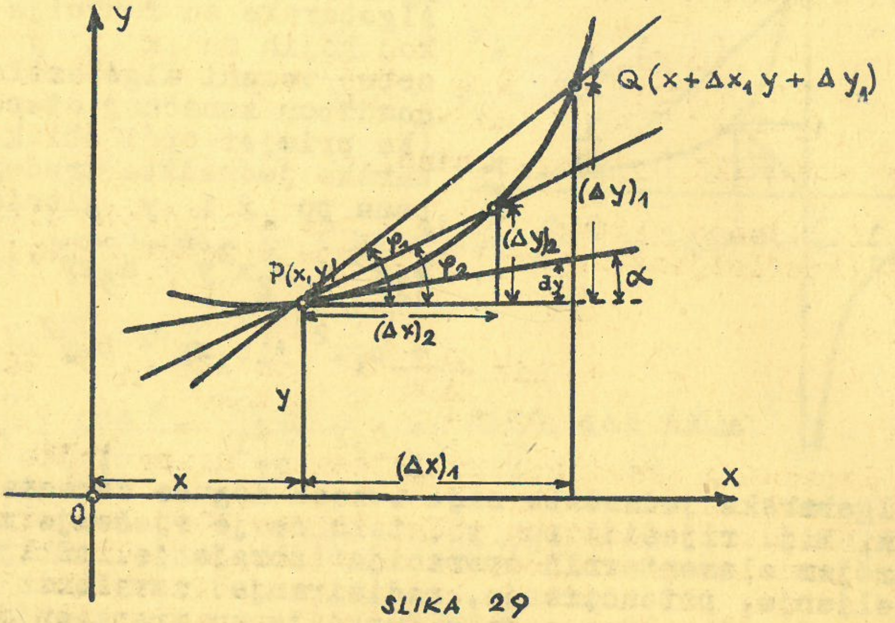
Sve algebarske jednadžbe nije uvijek moguće dovesti u eksplicitni oblik, t.j. riješiti po y, tako da je rješenje izraženo konačnim brojem elementarnih operacija (zbrajanje, odbijanje, množenje, dijeljenje, potenciranje, radiciranje) izvršenih na koeficijentima jednadžbe. Sve ostale funkcije su transcendentne.

Ako u eksplicitnom obliku neke algebarske funkcije nezavisna varijabla dolazi pod znakom korijena ili se funkcija opće ne da eksplicitno izraziti na gore rečeni način, tada je to <u>iracionalna</u> algebarska funkcija. Ako neovisna varijabla u eksplicitnom obliku racionalne funkcije dolazi u nazivniku razlomka tada je to <u>razlomljena</u> racionalna funkcija.

- funkcija
  - algebarska
    - racionalna
      - cijela racionalna
      - razlomljena racionalna
    - iracionalna
  - transcendentna

4. Pojam derivacije i diferencijala.

Uzmemo neku općenitu točku P funkcije $y = f(x)$ (slika 29). Njene su koordinate x i y. Ako vrijednosti neovisne varijable x damo neki prirast (koji označujemo općenito sa Δx - čitaj delta x) dobit će funkcija odgovarajući prirast Δy. Δx i Δy zovu se još i diferencije. Time smo dobili drugu točku krivulje te funkcije $y = f(x)$, Q $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



SLIKA 29

Pišemo :

$$y = f(x)$$

$$\underline{y + \Delta y = f(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (14)$$

Kvocijent diferencije $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je, kako vidimo, gradijent (koeficijent smjera, tangens smjera) sekante zadane krivulje $y = f(x)$, koja prolazi točkama P i Q.

t.j.

$$\frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1} = \mathrm{tg}\, \varphi_1$$

Pustimo sada, da Δx poprima redom sve vrijednosti članova jednog konvergentnog slijeda, čiji je limes jednak nuli, t.j. slijeda $(\Delta x)_1$, $(\Delta x)_2, \ldots (\Delta x)_n$ i t.d., tako da je $\lim\limits_{n \to \infty} (\Delta x)_n = 0$.

Tada je i $\lim\limits_{n \to \infty} (\Delta y)_n = 0$, ako pretpostavimo da je $y = f(x)$ kontinuirana (neprekinuta) funkcija od x. (Ovim zahtjevom je definiran pojam neprekinutosti funkcije u nekoj točki).

Promatrajmo sada odgovarajući slijed kvocijenata diferencije $\frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1}$, $\frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}$, ... Def. Ako je ~~taj slijed~~ niz $\left\{\frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}\right\}$ konvergentan, ma kakav ~~slijed~~ niz $(\Delta x)_1$, $(\Delta x)_2, \ldots$ odabrali (ako je samo $\lim (\Delta x)_n = 0$ i ako su svi $\Delta x_n \neq 0$) i ima isti limes za sve ·dobrane ~~sljedove~~ nizove $\{(\Delta x)_n\}$, tada kažemo da je funkcija u toj točki derivabilna, a

Weierstrass - funkcije

taj limes zovemo derivacijom zadane funkcije u točki $P(x,y)$, t.j. za tu vrijednost od x (i y).

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

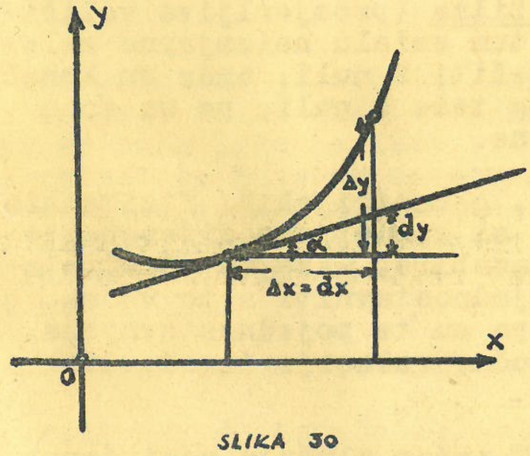
(čitaj y crta ili y derivirano).

Na slici jasno vidimo, da je limes kvocijenta diferencija gradijent (koeficijent smjera) tangente u točki $P(x,y)$.

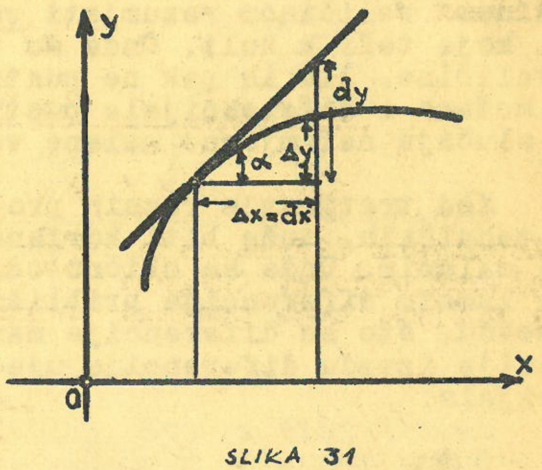
Dakle :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{tg} \varphi_n = \operatorname{tg} \alpha \qquad (15)$$

Kod izvedenog graničnog prijelaza se naime točka Q neograničeno približavala točki P i kod toga se sekanta neograničeno približava tangenti u točki (Slika 30). Promatrajući postaje nam jasno, da je vrijednost Δx mogla težiti k nuli i s negativne strane ili uopće na bilo koji način (slika 31). Postupak određivanja derivacije nazivamo deriviranjem ili diferenciranjem. Prirast na tangenti zovemo dy (diferencijal od y).



SLIKA 30



SLIKA 31

Po slici se vidi da je $dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$
Ako funkcija glasi $y = f(x)$, možemo mjesto dy pisati i $df(x)$. Na primjer, ako je $y = x^2$, možemo pisati $dy = d(x^2)$ i t.d. Promatramo li napose funkciju $y = x$ (pravac kroz ishodište pod 45^0 spram osi x), onda je $dy = dx$, $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$, dakle $y' = 1$ $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$, dakle $dx = \Delta x$, t.j. diferencija od x (neovisne varijable) identičan je s diferencijom. Pišem stoga mjesto $dy = y' \cdot \Delta x$ obično $dy = y'dx$. Vidimo dakle, d je $dx = \Delta x$, ali općenito $dy \neq \Delta y$.

Kako smo vidjeli, diferencijal funkcije jednak je pro tu derivacije i diferencijala neovisne varijable, t.j.

$dy = y'dx$. Iz toga slijedi : $\dfrac{dy}{dx} = y'$

t.j. kvocijent diferencijala jednak je derivaciji. Stoga derivaciju zovemo još i diferencijalnim kvocijentom.

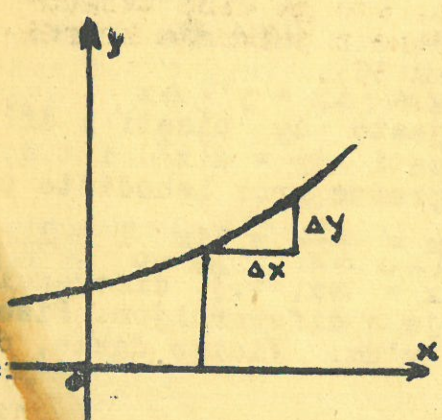
Diferencijal dy i dx nisu neke određene vrijednosti. Samo njihov kvocijent je stalan i jednak derivaciji. Budući da je $dx = \Delta x$ po volji odaberiv, možemo reći da su diferencijal dx i dy dva broja čiji je kvocijent jednak derivaciji, t.j. jednak limesu kvocijenta diferencija, kad diferencija teži k nuli. Možemo diferencijale odabrati velike, a možemo ih zamišljati i vrlo malenim, ako nam to konvenira. Ako ih zamislimo vrlo malenim, onda ih možemo vrlo približno zamijeniti diferencijama

t.j. vrijedi $\dfrac{dy}{dx} \doteq \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\doteq$ znači približno jednako), tim točnije, čim je $\Delta x = dx$ manji.

Nije ispravno reći, da su diferencijali neizmjerno malene veličine, ako zamišljamo pod tim veličine, koje su manje od bilo koje konačne veličine, jer kako god malena bila neka veličina, možemo naći još manju uzevši, recimo, polovicu te veličine.

Možemo se međutim pod "neizmjerno malenom" ili "infinitesimalnom" veličinom razumjeti varijabilna (promjenljiva veličina), koja teži k nuli. Onda su to u tom smislu neizmjerno malene veličine. Ako ih pak ne pustimo težiti k nuli, onda su konačne. Možemo i diferencijale pustiti da teže k nuli, pa su to u tom slučaju neizmjerno malene veličine.

Kod tretiranja raznih problema, geometrijskih, fizikalnih ili tehničkih, može biti korisno, da si zamišljamo diferencije jako malenim. Onda se obično odmah razabira, kako se mogu relacije između diferencija približno pojednostavniti s to većom točnošću, što su diferencije manje, pa su te pojednostavnjene relacije između diferencija ujedno točne relacije između diferencijala.



SLIKA 32

U našem slučaju reći ćemo: za malene diferencije Δx, Δy krivulje će biti na tom dijelu približno pravac t.j. gotovo se poklapa sa svojom tangentom, pa je približno :

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \doteq \operatorname{tg}\alpha$ tangente (sl.32)

tim točnije, čim su manje diferencije. Dakle za diferencijale vrijedi točno.

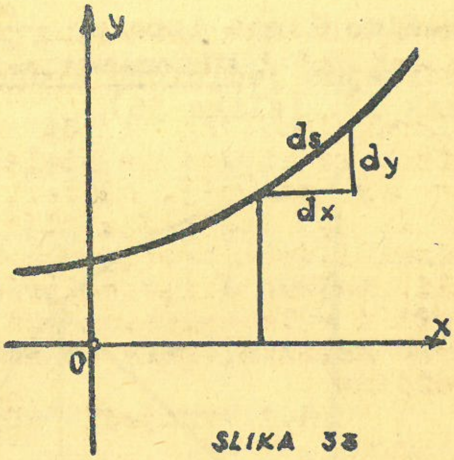
$\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ tangente

c
ma
lim
slj
nizove

Zbog toga se slika riše ovako, (slika 33) pa se veli, da je to neizmjerno maleni trokut, kojemu su stranice diferencijali. Kvocijent je onda $\frac{dy}{dx} = y'$. Hipotenuzom trokuta smatramo diferencijalom luka, ds. Prema slici izlazi :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)\frac{dx^2}{dx^2}}$$

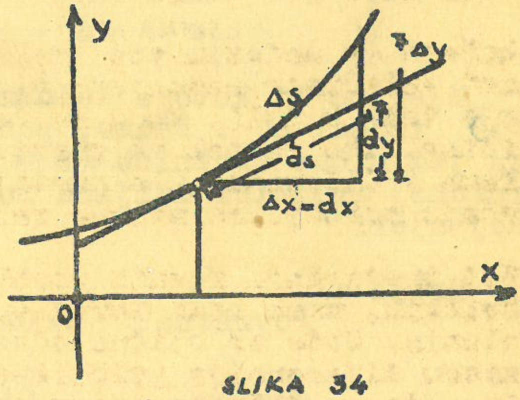
$$= \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$



SLIKA 33

Zapravo je diferencijal luka dio tangente (slika 34) za koji potpuno ekzaktno vrijedi $ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$, i koji je tim približnije jednak luku na krivulji čim su diferencije, pa odatle i diferencijal, manji. Za malene dijelove luka vrijedi približno $\Delta s = ds$. Kako se može izračunati luk krivulje bit će razjašnjeno u integralnom računu.

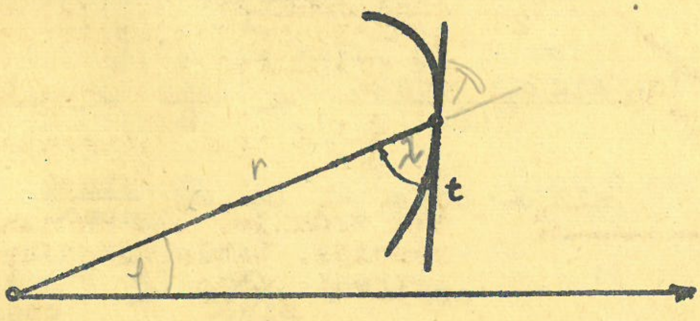
Kod primjene je spretno računati sa vrlo malim diferencijama, jer se onda lako naslute približne relacije, koje su ujedno točne relacije između diferencijala. Te vrlo malene diferencije označuju se onda često kao da su to diferencijali.



SLIKA 34

Još jasnije će to biti na ovom primjeru :

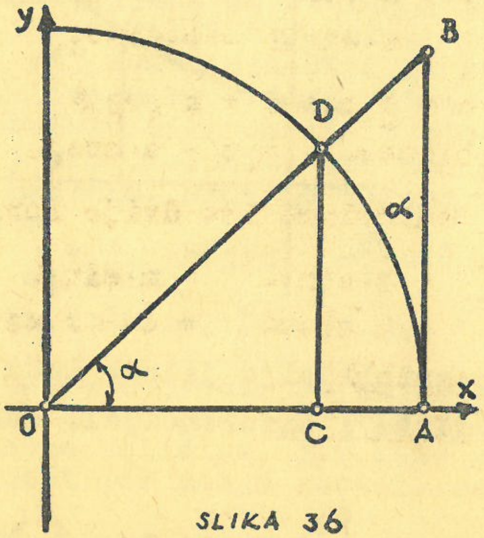
Traži se, da izračunamo tangens luka, što ga čini tangenta s radij-vektorom dirališta krivulje zadane u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbom $r = f(\varphi)$. (Slika 35).



SLIKA 35

Potrebno je prethodno izvesti neke formule, koje ćemo primijeniti u zadatku.

a) Tražimo limes izraza $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ kad α teži nuli ($\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = ?$)
Nacrtajmo jediničnu kružnicu (kružnicu kojoj je polumjer jednak 1). (slika 36)



$\overline{OA} = 1$
$\overline{CD} = \sin\alpha$
$\overline{OC} = \cos\alpha$
$\overline{AB} = \operatorname{tg}\alpha$

SLIKA 36

Mjerimo li kutove lučnom mjerom (radijanima), duljina luka $\overset{\frown}{AD}$ iznosi α . Naime, puni kut ima 2π radijana, dok je opseg jedinične kružnice ($r = 1$) jednak $2r\pi = 2\pi$. Dakle na jediničnoj kružnici duljina luka jednaka je kutu izraženom u lučnoj mjeri.

Dalje :

Površina $\triangle OAB$ --- $P_{t_1} = \frac{1.\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$

sektor OAD --- $P_s = \frac{\alpha \cdot 1}{2} = \frac{\alpha}{2}$

površina $\triangle OCD$ --- $P_{t_2} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$

Među navedenim površinama postoji prema slici odnos :

$$P_{t_2} < P_s < P_{t_1}$$

$$\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \quad / \cdot 2$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad / : \sin\alpha$$

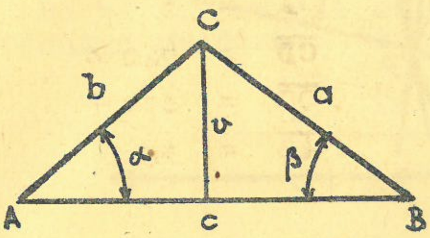
$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

Graničnim prijelazom izlazi: $\lim_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1$ i $\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\cos\alpha} = 1.$

Dakle i $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$. Na drugi bi način mogli kazati, da vrlo malene lukove možemo aproksimirati tetivom.

b) Potrebne su nam još dvije formule iz trigonometrije :

SLIKA 36 a



$$v = a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$$
$$a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$$

$$c = b\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\beta$$
$$b\cdot\cos\alpha = c - a\cdot\cos\beta$$

Podijelimo ove dvije formule :

$$b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$$
$$b\cdot\cos\alpha = c - a\cdot\cos\beta$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{c - a\cdot\cos\beta}$$

I druga formula :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$2\cdot\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

ili uvrstivši $\frac{\alpha}{2}$ mjesto α

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

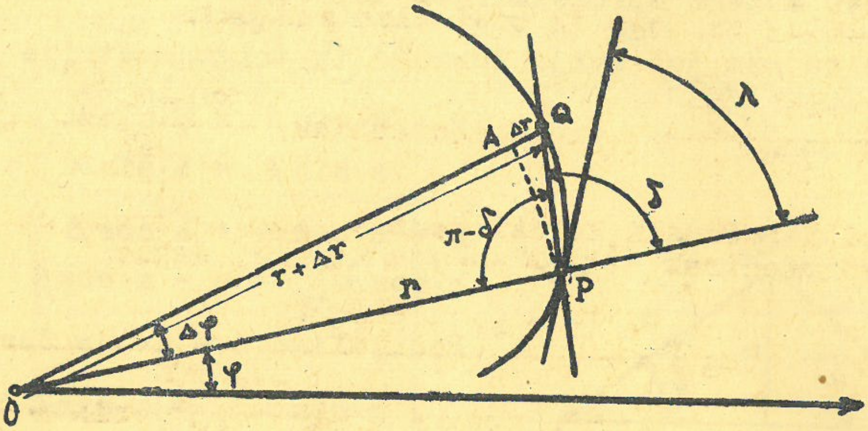
Vratimo se sada zadatku :

Tražimo tangens kuta, što ga tangenta na neku krivulju zatvara s pripadnim radij-vektorom dirališta.

Uzmemo neku općenitu točku na krivulji, kojoj su koordinate φ i r. Ako nezavisna varijabla dobije prirast $\Delta\varphi$, funkcija r dobije prirast Δr (slika 37).

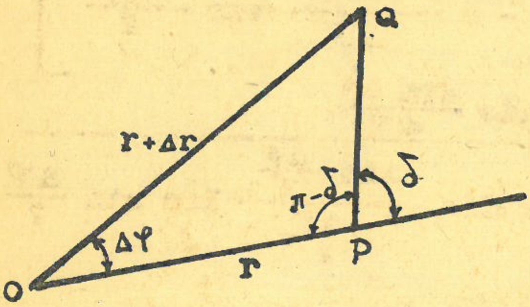
Kut što ga sekanta krivulje $\overline{PQ}$ čini s radij-vektorom označimo sa δ . Ako $\Delta\varphi$ postaje sve manji, očito je da će se točka Q sve više približavati točki P , te će se i pripadna sekanta sve više približavati tangenti na krivulji u P.

Pišemo : $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \delta = \lambda$, i stoga mora biti i $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\lambda$



SLIKA 37

Iz trokuta OPQ izračunat ćemo sada pomoću izvedenih trigonometrijskih relacija tangens vanjskog kuta δ (slika 38).



SLIKA 38

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{c - a\cdot\cos\beta} \quad ;$$

stranici a odgovara $r + \Delta r$

c -------- r

β -------- $\Delta\varphi$

α -------- $\pi - \delta$

Dakle :

$$\operatorname{tg}(\pi - \delta) = -\operatorname{tg}\delta = \frac{(r + \Delta r)\cdot\sin\Delta\varphi}{r - (r + \Delta r)\cdot\cos\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(r + \Delta r)\sin\Delta\varphi}{r - r\cdot\cos\Delta\varphi - \Delta r\cdot\cos\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(r + \Delta r)\cdot\sin\Delta\varphi}{r(1 - \cos\Delta\varphi) - \Delta r\cdot\cos\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(r + \Delta r)\cdot\sin\Delta\varphi}{2\cdot r\cdot\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} - \Delta r\cdot\cos\Delta\varphi} \qquad \begin{matrix} / :\Delta\varphi \\ / :\Delta\varphi \end{matrix}$$

$$= \frac{(r + \Delta r)\cdot\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{r\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\cdot\cos\Delta\varphi}$$

Nakon što smo formuli $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ transformirali izraz $1 - \cos\Delta\varphi$, podijelili smo brojnik i nazivnik razlomka sa $\Delta\varphi$, što će nam omogućiti izvršenje graničnog prijelaza. S istog razloga je prvi član razlomka

$$\frac{2r\cdot\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \quad \text{napisan u obliku} \quad \frac{r\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Da bi izračunali koliki je sam $tg\,\delta$, treba da izrazu promijenimo predznak $(tg(\pi - \delta) = -tg\,\delta)$, dakle

$$tg\,\delta = \frac{(r + \Delta r)\cdot\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\cdot\cos\Delta\varphi - r\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

Sada možemo provesti prijelaz služeći se kod toga formulama za izračunavanje sa limesima ;

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} tg\,\delta = tg\,\lambda = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left[\frac{(r + \Delta r)\cdot\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\cos\Delta\varphi - r\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right]$$

$$= \frac{\lim\,(r + \Delta r)\,\lim\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{\lim\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\cdot\lim\cos\Delta\varphi - r\cdot\lim\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\lim\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

kada $\Delta\varphi$ teži nuli i Δr teži nuli, dakle

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}(r + \Delta r) = r \quad ; \quad \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1 \quad ;$$

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1 \quad ; \quad \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\varphi} = r' \quad ;$$

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\cos\Delta\varphi = 1 \quad ; \quad \lim_{\Delta\varphi\to 0}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \quad .$$

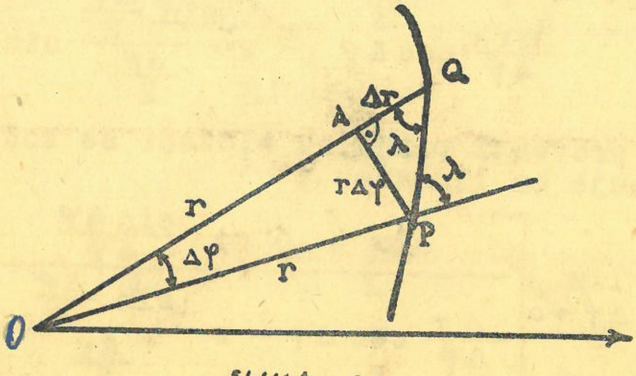
Dakle :

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} tg\,\delta = tg\,\lambda = \frac{r\cdot 1}{r'\cdot 1 - r\cdot 1\cdot 0} = \frac{r}{r'}$$

Služimo li se drugim manje egzaktnim načinom, da malene diferencije označimo kao diferencijale i da među njima utvrdimo relacije, koje vrijede približno za diferencije, a za diferencijale vrijede točno, račun je mnogo jednostavniji. Ako je naime $\Delta\varphi$ vrlo malen, možemo luk PQ približno nadomjestiti tetivom PQ (slika 39), kružni luk PA okomicom PA spuštenom iz P na pravac OQ, i smatrati, da je kut PQA jednak kutu λ, jer su OQ i OP gotovo paralelni. Okomica PA gotovo je jednaka $r \cdot d\varphi$ (jer je gotovo jednaka kružnom luku), pa iz pravokutnog trokuta izlazi :

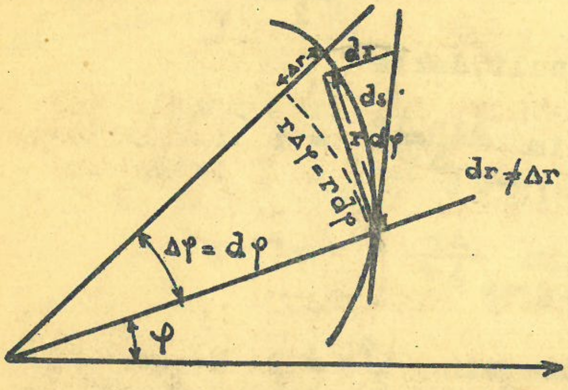
$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{r \cdot d\varphi}{dr} = r \cdot \frac{d\varphi}{dr} = r \cdot \frac{1}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{r'} ,$$

gdje smo odmah pisali diferencijale mjesto diferencija. Vidi se, da je taj način mnogo kraći.



SLIKA 39

Diferencijal luka ds u polarnim koordinatama bio bi po Pitagorinom poučku (slika 40) :



SLIKA 40

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2\right) \cdot d\varphi^2}$$

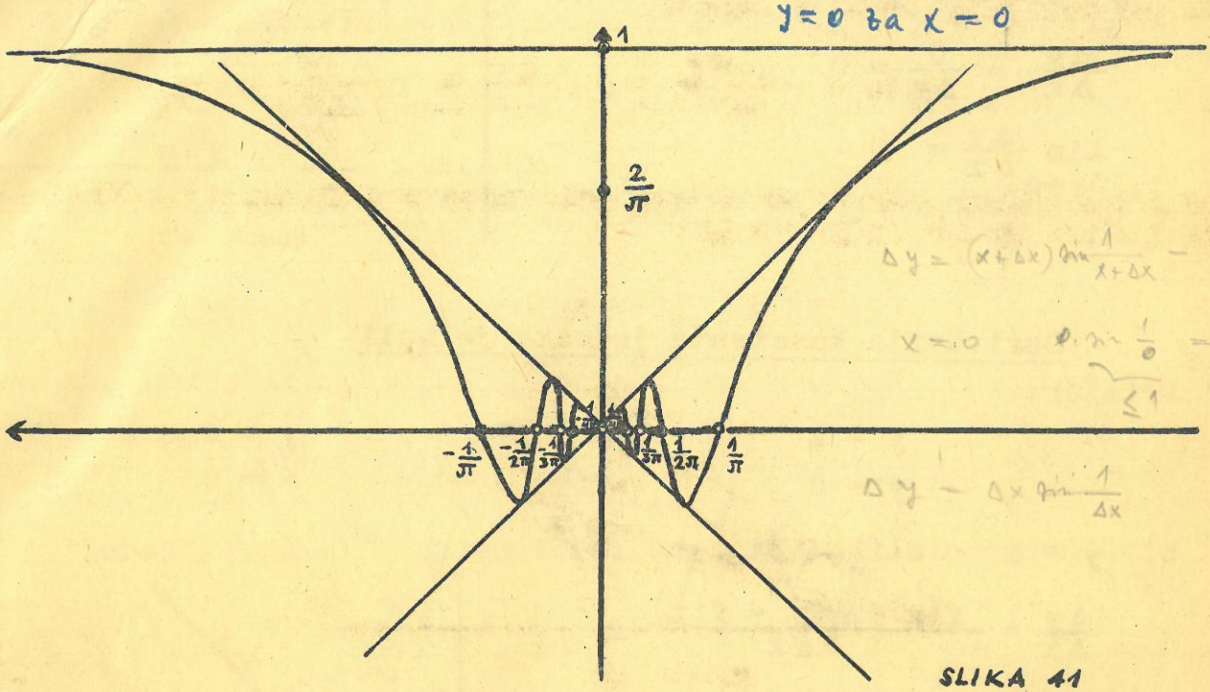
$$= \sqrt{r'^2 + r^2} \cdot d\varphi$$

Odaberemo li diferencijale velike, taj izraz znači stanoviti odsječak na tangenti, kako se vidi iz slike 40.

Iz pojma derivacije izlazi, da derivabilna funkcija mora biti i kontinuirana (neprekinuta), jer ako postoji $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ onda mora sa Δx i Δy ići prema nuli (inače bi kvocijent zbog sve manjeg nazivnika mogao poprimiti po volji velike vrijednosti, ne bi se dakle približavao nekoj konačnoj vrijednosti). No ako iz $\Delta x \to 0$ slijedi $\Delta y \to 0$, onda to znači, da je funkcija u toj točki neprekinuta, t.j. da se pomična točka Q$(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ neograničeno približava točki $P(x,y)$.

Obrnuto neprekinutost nije dovoljan uvjet za derivabilnost, jer $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne mora težiti prema određenoj granici makar i Δx i Δy težili k nuli. Na pr. funkcija $y = x \sin \frac{1}{x}$ (slika 41)

$y = 0$ za $x = 0$



$\Delta y = (x+\Delta x) \sin \frac{1}{x+\Delta x} - x \sin \frac{1}{x}$

$x = 0 \quad 0 \cdot \sin \frac{1}{0} = 0$, ≤ 1

$\Delta y - \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}$

SLIKA 41

neprekinuta je u točki $x = 0$, jer za sve manji x prvi faktor x teži k nuli, a drugi faktor $\sin \frac{1}{x}$ ostaje konačan (između -1 i +1). No ne postoji u toj točki derivacija. Bilo bi

$$\Delta y = \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

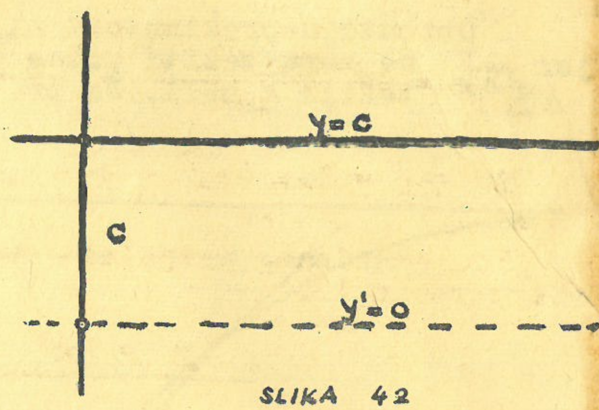
Kad Δx teži k nuli, taj izraz oscilira sve brže između -1 i +1 i ne teži k određenoj granici. Ima i funkcija koje su svagdje kontinuirane, a nigdje nemaju derivacije. Prvi je takovu funkciju našao Weierstrass (Vidi Marković I, str.291).

5. Osnovna pravila deriviranja

Vidjeli smo, da je derivacija y' gradijent tangente na krivulju $y = f(x)$. Radi li se o krivoj crti, svakoj će vrijednosti apcise pripadati druga vrijednost derivacije. Vidimo dakle, da će derivacija u općenitom obliku $y' = f'(x)$ biti neka nova funkcija od x koja se mijenja onako, kako se mijenja nagib tangente krivulje primitivne funkcije $y = f(x)$. Na mjestima, gdje funkcija "raste", $f'(x)$ imat će vrijednost veću od nule, jer je gradijent kutova od nula do $\frac{\pi}{2}$ pozitivan. Tamo gdje funkcija "pada", $f'(x)$ će imati negativne vrijednosti. Sada ćemo redom za elementarne vrste funkcija izvesti pravila za deriviranje izvodeći za svaku posebno granični prijelaz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

a) $y = C$ (slika 42)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$
$$= C - C = 0$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$



SLIKA 42

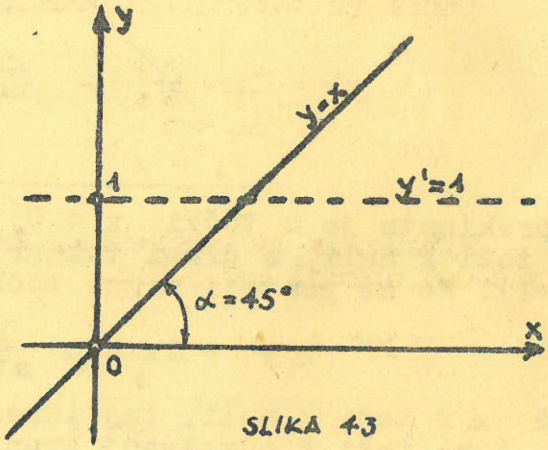
Derivacija konstante jednaka je nuli

Primjer:

$y = 2$	$y = 17$	$y = a$
$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$

b) $y = x$ (slika 43)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$
$$y = x \qquad y' = 1$$

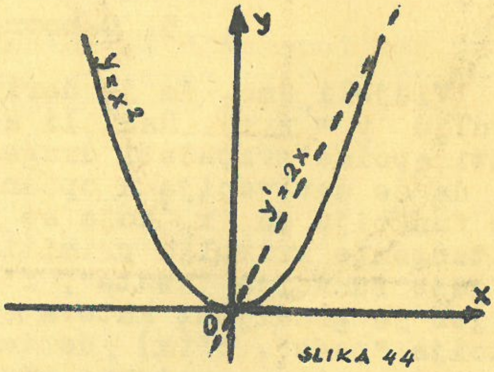


SLIKA 43

Derivacija nezavisne varijable jednaka je jedan.

c) $y = x^2$ (slika 44)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= 2x + \Delta x$$



SLIKA 44

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x \qquad \underline{y = x^2 \qquad y' = 2x}$$

d) $y = x^3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

Kod graničnog prijelaza svi članovi, u kojima se nalazi Δx, teže prema nuli.

$$\underline{y = x^3 \qquad y' = 3x^2}$$

e) $y = x^n$ (gdje je n prirodan broj, slika 45)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

Izraz $(x+\Delta x)^n$ potencirali smo prema binomnom poučku.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

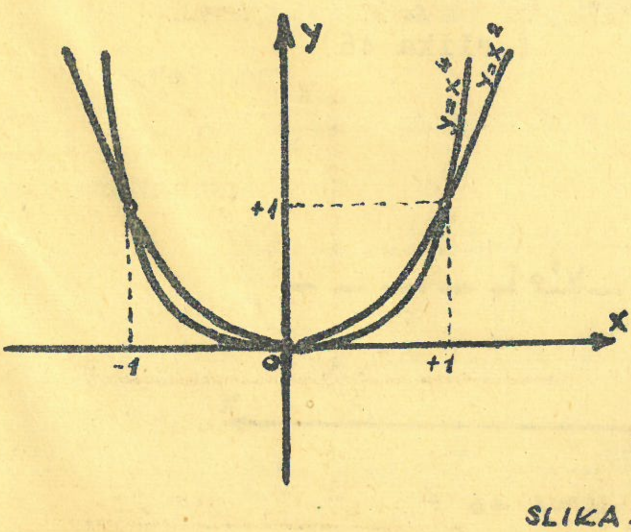
$$\underline{y = x^n \qquad y' = n\, x^{n-1}} \qquad (16)$$

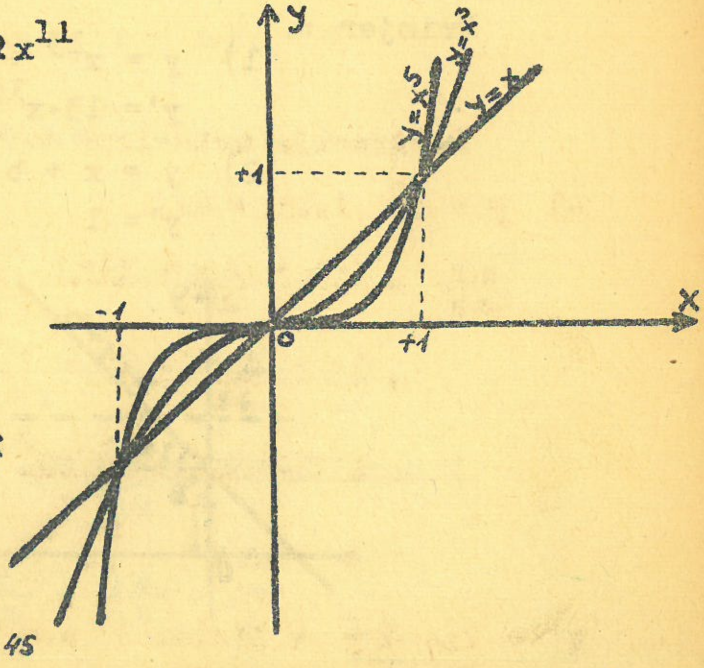
Potencija se derivira, da se pomnoži sa eksponentom, dok se eksponent smanji za jedan.

Primjer :

$$y = x^{12}$$

$$y' = 12x^{11}$$





SLIKA 45

f) $y = u + v$ gdje su u i v nove funkcije od x, koje označujemo sa :

$$u = f_1(x)$$
$$v = f_2(x) \quad \text{t.j.} \quad y = u + v = f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) - [f_1(x) + f_2(x)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x) + f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$f_1(x+\Delta x) - f_1(x)$ je zapravo prirast funkcije $u = f_1(x)$, a $f_2(x+\Delta x) - f_2(x)$ je prirast od $v = f_2(x)$. Možemo dakle pisati :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$
$$= u' + v' = f_1'(x) + f_2'(x)$$

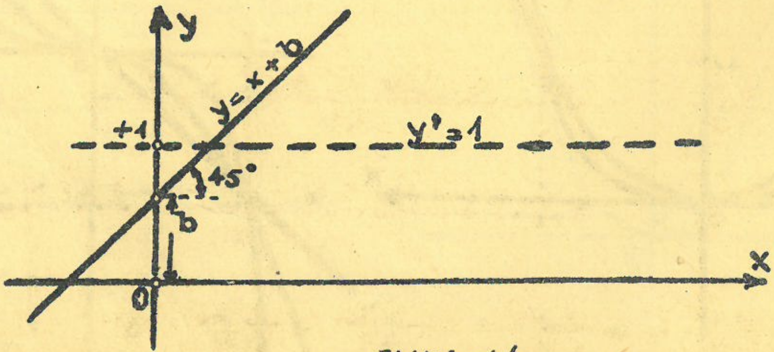
$$y = u + v \qquad y' = u' + v' \tag{17}$$

Derivacija sume dv~~a~~iju funkcija jednaka je sumi derivacija tih ~~derivacija~~ funkcija. To pravilo vrijedi za svaki broj sumanda, što možemo dokazati istim dokaznim postupkom.

Primjer :

1) $y = x^{13} + x^2 - 17$
$y' = 13 \cdot x^{12} + 2 \cdot x$

2) $y = x + b$ (slika 46)
$y' = 1$



SLIKA 46

3) $y = x^n + C$

$y' = n \cdot x^{n-1}$

Konstanat sumanda kod deriviranja otpada.

Znajući, da je $dy = y'dx$, možemo mjesto derivacija pisati i diferencijale.

Primjer :

$$y = u + v \quad \text{gdje je} \quad u = f_1(x)$$
$$v = f_2(x)$$

$$y' = u' + v'$$

$$dy = (u' + v')\,dx = u' \cdot dx + v' \cdot dx$$

$u'dx$ je diferencijal funkcije $u = f_1(x)$, jer je diferencijal funkcije jednak derivaciji pomnoženoj sa diferencijalom nezavisne varijable. Analogno, $v'dx$ je dv. Možemo pisati:

$$dy = du + dv$$

g) $y = u \cdot v$, gdje su u i v funkcije od x $u = f_1(x)$

$v = f_2(x)$

$$y = u \cdot v = f_1(x) \cdot f_2(x) = f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{\Delta x}$$

Iz

$$\Delta u = f_1(x + \Delta x) - f_1(x) = f_1(x + \Delta x) - u$$

izlazi

$$f_1(x + \Delta x) = u + \Delta u$$

i analogno

$$f_2(x + \Delta x) = v + \Delta v$$

dakle

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v}{\Delta x}$$

$$= \frac{u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v ,$$

dakle

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v\right)$$

$$= u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v$$

$$= u \cdot v' + v \cdot u' + u' 0$$

$$\underline{y' = u \cdot v' + v \cdot u'} \qquad (18)$$

Sa diferencijalima bi istu formulu pisali :

$$dy = (u'v + u \cdot v')\, dx = u' dx \cdot v + u \cdot v' \cdot dx$$

$$\underline{= v \cdot du + u \cdot dv}$$

Ako imamo tri faktora, tri funkcije od x,

$y = u \cdot v \cdot w$, možemo to pisati kao produkt dviju funkcija

$y = (u \cdot v) \cdot w$

slijedi :

$$y' = (u \cdot v)' w + u \cdot v \cdot w' = (u'v + u \cdot v')w + u \cdot v \cdot w'$$

$$\underline{y' = u' v \cdot w + u \cdot v' w + u \cdot v \cdot w'} \qquad (19)$$

Analogno se može dokazati za svaki broj faktora. Derivacija produkta se dobije, ako se u produktu derivira po redu samo prvi faktor, pa samo drugi, samo treći faktor i t.d. te se nastali članovi zbroje.

Iz pravila za deriviranje produkta slijedi :

$y = a \cdot f(x)$

$y' = a' f(x) + a f'(x)$ Budući da je $a' = 0$ jer je a konstanta, izlazi dalje :

$y' = a f'(x)$, t.j. <u>Konstantan faktor kod deriviranja ostaje netaknut.</u> (20)

Primjer :

1) $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + C$

$y' = 2a \cdot x + b$

2) $y = (2x - 1)(x^2 + 1)$

$y' = 2(x^2 + 1) + (2x - 1)2x =$

$= 2x^2 + 2 + 4x^2 - 2x$

$= 6x^2 - 2x + 2$

h) $y = \dfrac{u}{v}$ $\qquad u = f_1(x)$

$$v = f_2(x)$$

$$y = \frac{u}{v} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f(x)$$

Kod toga je potrebno napomenuti, da je funkcija ovog oblika na mjestima, gdje je $v = 0$, diskontinuirana, te promatramo samo tok funkcije za $v \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\left\{\frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right\} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\left\{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{v(u+\Delta u) - u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{u\cdot v + v\cdot\Delta u - u\cdot v - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2} \qquad (21)$$

Derivacija kvocijenta je razlomak, kojem je nazivnik kvadrat nazivnika funkcije, a u brojniku piše nazivnik puta derivacija brojnika minus brojnik puta derivacija nazivnika funkcije.

Diferencijal funkcije $y = \dfrac{u}{v}$ je prema tome :

$$dy = y'dx = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2}\,dx = \frac{v\cdot u'dx - u\cdot v'dx}{v^2} = \frac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}$$

Primjer : 1) $y = \dfrac{1}{u}$

$$y' = \frac{u\cdot 0 - 1\cdot u'}{u^2} = \boxed{-\frac{u'}{u^2}} \quad \text{(napamet!)} \qquad (22)$$

2) $y = \dfrac{1}{x}$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{(napamet!)} \qquad (23)$$

3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

$$y' = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2\cancel{x}}{(x+1)^2}$$

Kod funkcija u obliku kvocijenta s konstantnim brojnikom primjenjujemo izravno formulu :

$$y = \frac{a}{u}$$

$$y' = -\frac{a \cdot u'}{u^2}$$

jer je jednostavnije. Funkcije u obliku kvocijenta s konstantnim nazivnikom ne treba derivirati po formuli za derivaciju kvocijenta, jer je konstantan nazivnik zapravo konstantan faktor.

$$y = \frac{u}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot u$$

$$y' = \frac{u'}{a} \qquad (25)$$

Primjer :

1) $y = \dfrac{a + b}{x^2}$

$y' = \dfrac{-(a + b)2x}{x^4}$

2) $y' = \dfrac{3x^2 - 5x + 6}{\sqrt{27}}$

$y' = \dfrac{6x - 5}{\sqrt{27}}$

Prema formuli za deriviranje kvocijenta izvodimo dokaz, da i za negativne cijele eksponente vrijedi formula za derivaciju potencije

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$y' = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

I ovdje se dakle derivacija dobije množenjem s eksponentima i smanjivanjem eksponenta za jedan.

Na pr. $\quad y = \dfrac{1}{x^7} = x^{-7}$

$$y' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$$

i) Deriviranje složenih funkcija

$y = f(u)$, gdje je $u = \varphi(x)$

$y = f\left[\varphi(x)\right]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (26)$$

Kad Δx teži nuli i Δu teži nuli, jer se pretpostavlja, da je funkcija u (kao i funkcija f) derivabilna, dakle i neprekinuta. $du \neq \Delta u$ jer u nije nezavisna varijabla nego funkcija od x.

Složena se funkcija derivira dakle tako, da se vanjska funkcija derivira po nutarnjoj, uzetoj kao varijabla, i zatim pomnoži s derivacijom nutarnje funkcije.

Diferencijal funkcije dy je prema tome :

$$dy = f'(u) \cdot \varphi'(x)\, dx \quad \text{te, budući da je} \quad du = \varphi'(x)dx$$

$$dy = f'(u)du.$$

Ova formula za diferencijal dakle vrijedi bez obzira na to, da li je "u" već neovisna varijabla, ili je funkcija neovisne varijable.

Primjer :

$$y = (x^2 + 2x - 1)^3 \qquad u = \varphi(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$y' = 3\underbrace{(x^2 + 2x - 1)^2}_{u} \; \underbrace{(2x + 2)}_{u'}$$

$$y = u^3 \qquad y' = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2 + 2x - 1)^2(2x + 2)$$

$$dy = 3(x^2 + 2x - 1)^2 \cdot d(x^2 + 2x - 1)$$

$$3(x^2 + 2x - 1)^2\,(2x + 2)\, dx$$

Ako imamo višestruko složenu funkciju, pravilo deriviranja izvodimo analogno.

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(v) \qquad v = \psi(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x) \qquad (27)$$

Primjer :

$$y = \left[(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) \right]^4$$

$y' = 4(2(x^2-1)2x - 3(x^2-1)2x$

$$y' = u^4 \qquad u = v^2 - 3v \qquad v = x^2 - 1$$

$$y' = 4u^3 \cdot (2v - 3)2x$$

$$= 4 \cdot \left[(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1)\right]^3 \cdot \left[2(x^2 - 1) - 3\right] \cdot 2x$$

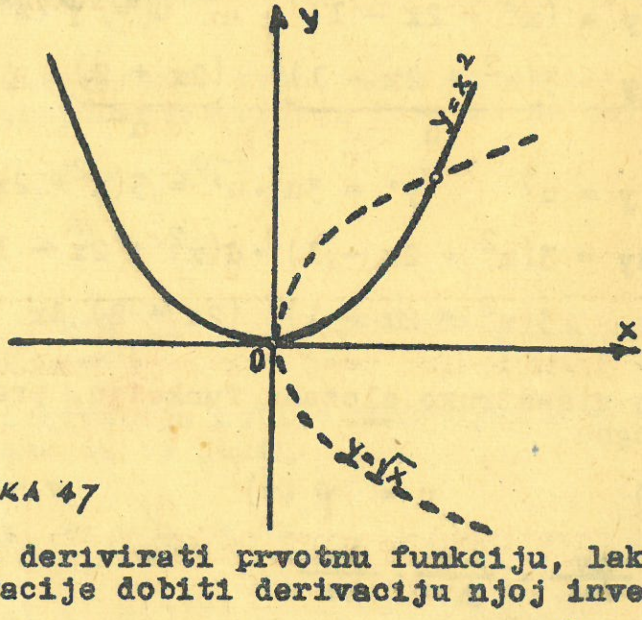
j) Deriviranje inverznih funkcija.

Ako u funkcionalnom odnosu $y = f(x)$ varijablu y shvatimo kao nezavisnu promjenljivu varijablu, a varijablu x kao funkciju, t.j. zavisnu promjenljivu, dobijemo novu funkciju ~~$x = f(y)$~~, za koju kažemo, da je inverzna prvoj funkciji. Nanoseći vrijednosti nove nezavisne varijabla y na os apcise a funkciju na ordinatu dobijemo graf inverzne funkcije. Budući da u suštini nastaje samo zamjena koordinatnih osi, koja se može provesti preklapanjem oko simetrale I kvadranta ili zrcaljenjem na toj simetrali, graf inverzne funkcije je zrcalno (aksijalno) simetričan s grafom primitivne funkcije s obzirom na pravac $y = x$, koji je simetrala kuta među pozitivnim smjerovima koordinatnih osi. Ako želimo, možemo naravno i kod inverznih funkcija označiti nezavisnu varijablu sa x a funkciju sa y. (O točnijim uvjetima za postojanje inverznih funkcija vidi Marković. I. str.199 i 263.)

ili $x = f(y)$
$y = \varphi(x)$

Primjer :

Inverzna funkcija funkcije $y = x^2$ bila bi ~~$x = \sqrt{y}$~~ $x = y^2$ ili ako zamijenimo nazive varijablama $y = \sqrt{x}$ (slika 47)



SLIKA 47

Ako znamo derivirati prvotnu funkciju, lako možemo pomoću te derivacije dobiti derivaciju njoj inverzne funkcije :

$$y = \varphi(x) \qquad\qquad x = f(y)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad , \quad \text{uz uvjet da je } \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$$

Prema pravilima za računanje sa limesima slijedi :

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta x}{\Delta y}} \text{ , dakle : } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad (28)$$

Derivacija inverzne funkcije jednaka je recipročnoj vrijednosti derivacije prvotne funkcije.

Način, kako se deriviraju inverzne funkcije, najbolje će biti objašnjen primjerima.

Pomoću pravila za deriviranje inverznih funkcija dokazat ćemo, da je $y' = n \cdot x^{n-1}$ derivacija funkcije $y = x^n$ i za sve razlomljene eksponente n.

Tražimo najprije derivaciju funkcije :

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Inverzna funkcija zadane funkcije bila bi $x = y^n$
Derivacija inverzne funkcije glasi :

$$\frac{dx}{dy} = n \cdot y^{n-1} \text{ , a budući da je } y = x^{\frac{1}{n}}, \text{ slijedi dalje}$$

$$\frac{dx}{dy} = n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = n \cdot x^{1-\frac{1}{n}} = n \cdot x^{-(\frac{1}{n}-1)}$$

Derivacija prvotne funkcije $\frac{dy}{dx}$ je recipročna vrijednost derivacije $\frac{dx}{dy}$, t.j.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n \cdot x^{-(\frac{1}{n}-1)}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \text{ , dakle}$$

$$y = x^{\frac{1}{n}} \qquad y' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Analogno primijenimo ovaj dokaz na funkciju tipa

$$y = \sqrt[s]{x^r} = x^{\frac{r}{s}}$$

Ako x^r shvatimo kao novu funkciju $u = x^r$, tada imamo slučaj složene funkcije :

$y = \sqrt[s]{u} = u^{\frac{1}{s}}$. Derivacija te funkcije po gore dokazanom pravilu te po pravilu za deriviranje složenih funkcija glasi :

$$y' = \frac{1}{s} \cdot u^{\frac{1}{s}-1} \cdot u' = \frac{1}{s}(x^r)^{\frac{1}{s}-1} \cdot r \cdot x^{r-1}$$

$$= \frac{r}{s} \cdot x^{r(\frac{1}{s} - 1)+(r - 1)} = \frac{r}{s} \cdot x^{\frac{r}{s} - 1}$$, dakle

$$y = x^{\frac{r}{s}} \qquad y' = \frac{r}{s} \cdot x^{\frac{r}{s} - 1}$$

Time je dokazano, da se sve funkcije u obliku potencije $y = x^n$ gdje je n racionalan broj, deriviraju po pravilu

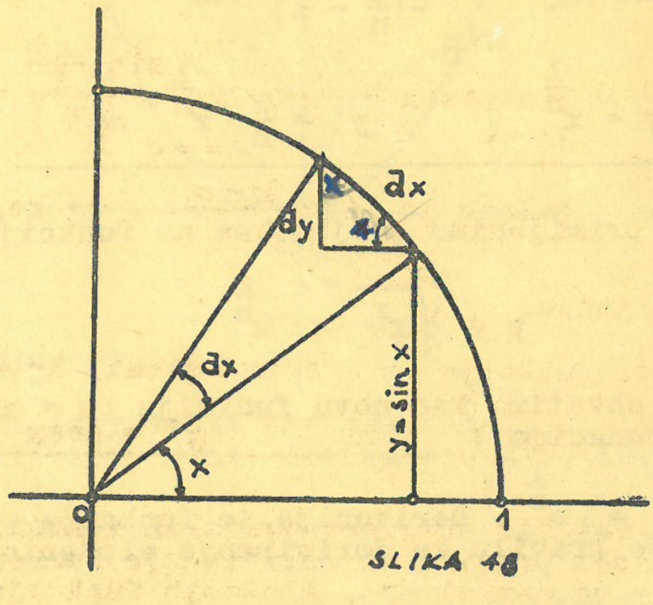
$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

Slučaj iracionalnih eksponenata dolazi kasnije.

6. Deriviranje trigonometrijskih funkcija

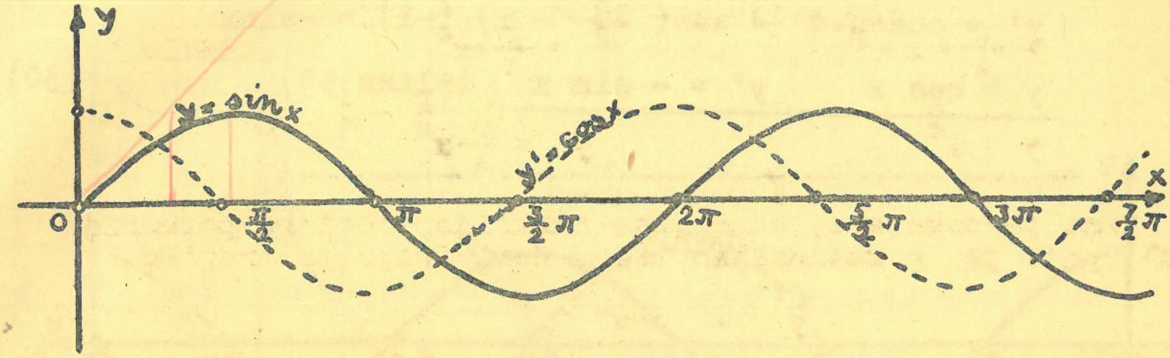
Kod izvođenja derivacije funkcije $y = \sin x$ poslužit ćemo se poznatim načinom traženja relacije, koje su među malim diferencijama približno točne, a među diferencijalima sasvim točne. Priraste smo označili kao diferencijale premda su to zapravo male diferencije. Funkcija $y = \sin x$ označuje nam, kako se mijenja sinus nekog kuta, kada se kut mijenja. Budući da odnose ispitujemo na jediničnoj kružnici, pripadni luk diferencijala kuta dx također je jednak dx (kutove mjerimo naime lučnom mjerom, slika 48). Kada je dio luka vrlo malen, možemo ga aproksimirati (približiti) pravcem. Opažamo, da je kut između dx (luka) i dy jednak x (jer su mu krakovi okomiti na krakovima kuta x). I odatle

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$$ (susjedna kateta kroz hipotenuza)



SLIKA 48

Derivacija sinusa jednaka je cosinusu (slika 49).



SLIKA 49

To isto možemo dokazati ekzaktnijom metodom graničnog prijelaza :

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

Izraz za diferenciju od y rastavili smo po pravilu za rastavljanje zbroja sinusa u produkt prema formuli

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ jednak je $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, za koji smo dokazali da je jednak jedan.

Diferencijal funkcije $y = \sin x$ glasi $dy = \cos x\, dx$

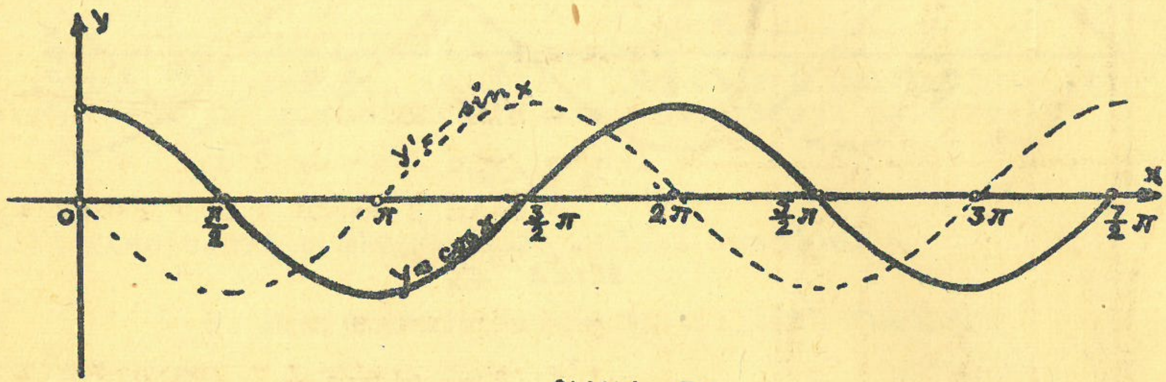
$$y = \sin x \qquad y' = \cos x \tag{29}$$

Derivacije ostalih trigonometrijskih funkcija izvest ćemo jednostavnije pomoću pravila za deriviranje funkcije $y = \sin x$ te pomoću pravila za deriviranje složenih funkcija.

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad y = \sin u \qquad u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$y' = \cos u \cdot u' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x$$

$$\underline{y = \cos x \qquad y' = -\sin x} \quad \text{(slika 50)} \qquad (30)$$



SLIKA 50

Diferencijal funkcije $y = \cos x$ glasi $dy = -\sin x \cdot dx$

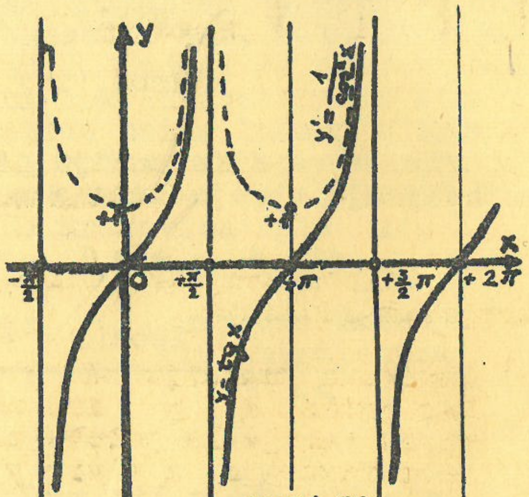
Dalje :

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$



SLIKA 51

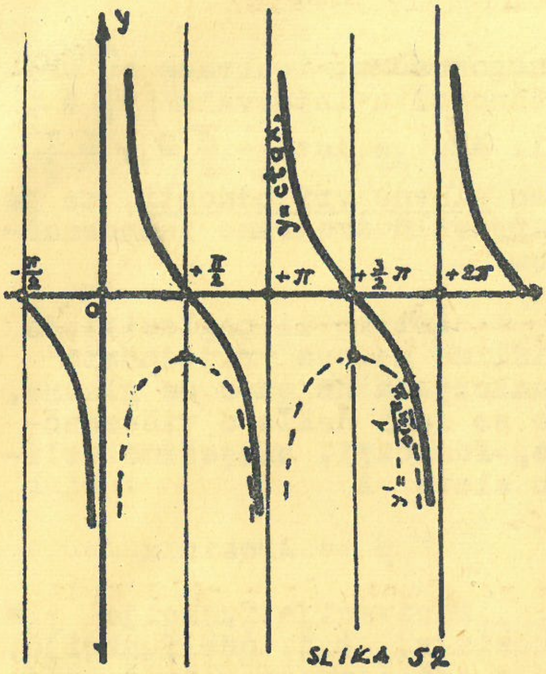
$$\underline{y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}} \quad \text{(slika 51)} \qquad (31)$$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



SLIKA 52

$$y = \operatorname{ctg} x \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (32)$$

(slika 52)

Primjeri :

1) $y = \sin^2 2x$

$y' = 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 =$

$= 4\sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin 4x$

$y' = 2\sin 4x$

2) $y = \sin x \cdot \cos x$

$y' = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$y' = \cos 2x$

7. Ciklometrijske funkcije

Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija.

a) Inverznu funkciju od $y = \sin x$ dobijemo, ako x smatramo kao ovisnu a y kao neovisnu varijablu. Ako kod toga neovisnu varijablu ponovo označimo sa x a ovisnu sa y dobijemo funkciju $x = \sin y$ koju u eksplicitnom obliku označavamo sa

$$y = \arcsin x$$

Arkussinus od x je onaj kut izmjeren u lučnoj mjeri na jediničnoj kružnici, čiji je sinus jednak x.

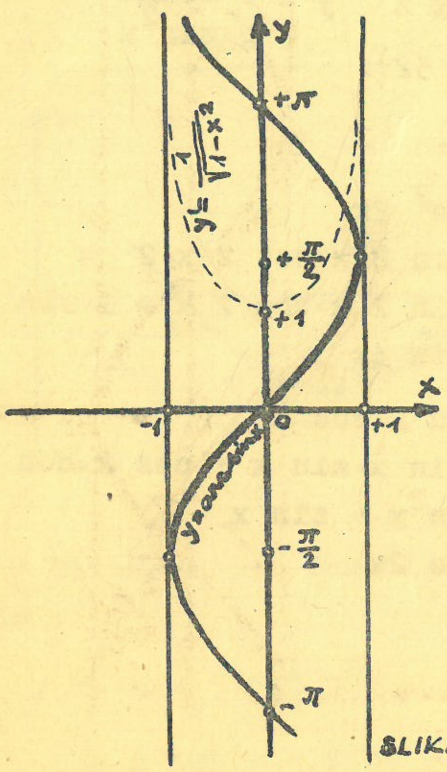
Derivacija funkcije $y = \arcsin x$ slijedi :

$$x = \sin y \quad \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{i dalje}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{(slika 53)} \qquad (33)$$

Da funkcija $y = \arcsin x$ ne bi u intervalu u kojem je definirana t.j. u intervalu $|x| \leq 1$ bila beskonačno



SLIKA 53

mnogoznačna, izabrane su vrijednosti u intervalu $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ ili što je isto $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ kao <u>glavne vrijednosti</u>, te je u pravilu smatramo jednoznačnom.

Želimo li naglasiti, da mislimo na sve vrijednosti funkcije a ne samo na glavne, da se radi dakle o višeznačnoj funkciji, bilježimo veliko slovo A

$$y = \mathrm{Arcsin}\ x$$

Derivacija funkcije $y = \arcsin x$, t.j. one funkcije, koju sačinjavaju glavne vrijednosti, pozitivna je, kako se vidi iz slike, dakle

$$y = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$$

b) Analogno funkciju $x = \cos y$ označujemo u eksplicitnom obliku sa $y = \arccos x$. Pravilo za deriviranje izvodimo analogno

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (slika 54)} \qquad (34)$$

Glavne vrijednosti definiramo intervalom $0 \leq y \leq \pi$
I ovdje bilježimo $y = \mathrm{Arccos}\ x$, ako mislimo na višeznačnu funkciju.

Osnovna relacija između arcussinusa i arcuskosinusa glasi $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, što dokazujemo na slijedeći način: Uzmimo dva komplementna kuta

$$y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2} \text{ , pri čemu neka je}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad ,$$

Dakle

$$0 \leqq y_2 \leqq \pi$$

Tada je sin $y_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - y_1)$

$$= \cos y_2 = x$$

I dalje :

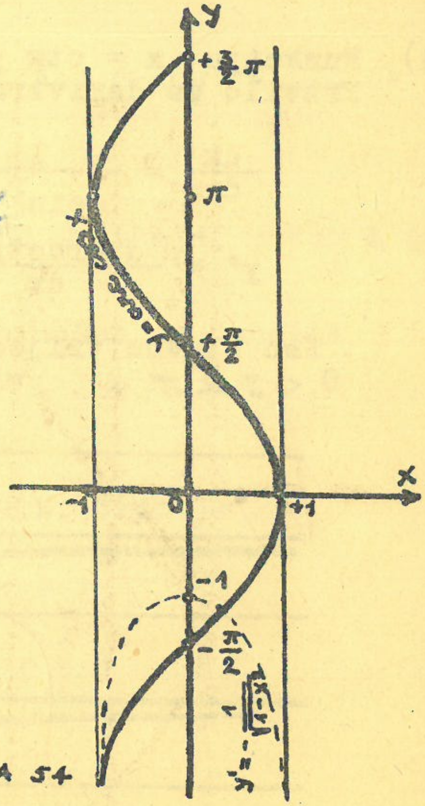
$$y_1 = \arcsin x$$

$$y_2 = \arccos x,$$

što uvršteno u prvu jednadžbu daje :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad (35)$$

c) Funkciju $x = tg\, y$ označavamo eksplicitno sa $y = arctg\, x$
Pravilo za deriviranje izvodimo:



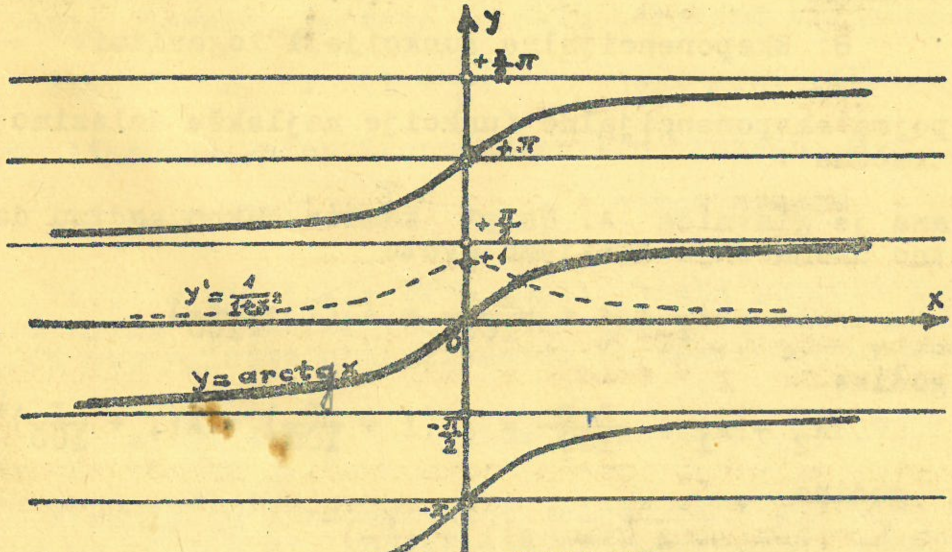
SLIKA 54

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + tg^2 y = 1 + x^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{d\, arctgx}{dx} \quad \text{(slika 55)} \qquad (36)$$

Kao glavne vrijednosti uzimamo vrijednosti u intervalu

$$|y| < \frac{\pi}{2}$$



SLIKA 55

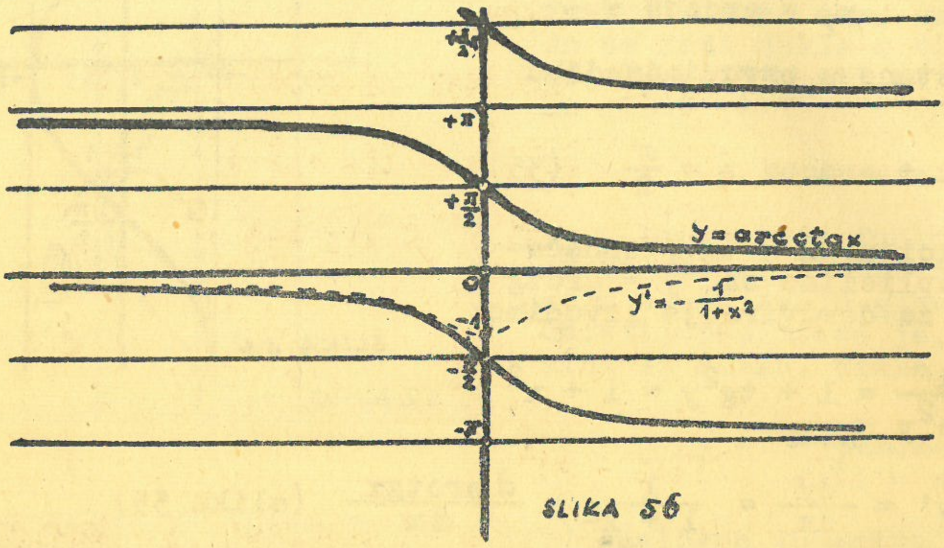
Višeznačnu funkciju pišemo $y = Arctg\, x$.

d) Funkciju $x = \mathrm{ctg}\, y$ označavamo eksplicitno sa $y = \mathrm{arcctg}\, x$
Pravilo za deriviranje izvodimo :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \mathrm{ctg}^2 y) = -(1 + x^2)$$

$$y' = \frac{d\, \mathrm{arcctg}\, x}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \text{(slika 56)} \qquad (37)$$

Kao glavne vrijednosti ove funkcije uzimamo vrijednosti $0 < y < \pi$, višeznačna funkcija se piše $y = \mathrm{Arcctg}\, x$.



SLIKA 56

Funkcije $y = \mathrm{arctg}\, x$ i $y = \mathrm{arcctg}\, x$ definirane su u čitavom neizmjernom intervalu $-\infty < x < \infty$, t.j. svagdje.

8. Eksponencijalne funkcije i logaritmi.

Do pojma eksponencijalne funkcije najlakše dolazimo preko kamatnog računa :

Zadana je glavnica A. Uz p% kamata nakon godinu dana uz jednokratno ukamaćenje dobijemo svotu

$$A_1 = A + \frac{A\,p}{100} = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Nakon 2 godine

$$A_2 = A_1 + \frac{A_1 p}{100} = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Nakon n godina

$$A_n = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Ako se kamate računaju svake pol godine tada nakon 1 godine dobijemo

$$A_1^{(2)} = A\left(1 + \frac{p}{2\cdot 100}\right)^2$$, odnosno nakon n godina

$$A_n^{(2)} = A\left(1 + \frac{p}{2\cdot 100}\right)^{2n}$$

Ako se glavnica ukamaćuje $\cancel{s}$ r puta godišnje, nakon 1 godine dobijemo

$$A_1^{(s)} = A\left(1 + \frac{p}{r\cancel{s}\cdot 100}\right)^{1\cdot \cancel{s}r}$$, te nakon n godina

$$A_n^{(s)} = A\left(1 + \frac{p}{r\cancel{s}\cdot 100}\right)^{n\cdot \cancel{s}r}$$

Neka se sada kamate računaju sa 100%. Tada je

$$A_1^{(1)} = A\left(1 + \frac{100}{100}\right)^1 = A\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$$

$$A_1^{(2)} = A\left(1 + \frac{100}{2\cdot 100}\right)^2 = A\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$A_1^{(3)} = A\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$$

,------------------------

$$A_1^{(n)} = A\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Neka n raste, t.j. neka se glavnica A ukamaćuje sve više i više puta godišnje. Da bi dobili vrijednost glavnice sa kamatama nakon godinu dana, množimo glavnicu A izrazom $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pitamo se, da li je taj slijed definiran izrazom $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergentan ili divergentan, t.j. da li kod neprekinutog ukamaćivanja glavnica naraste na neku određenu vrijednost.

Slijed $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest konvergentan, a njegov limes je važan iracionalan broj nazvan e :

$$\lim a_n = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459\ldots \qquad (38)$$

Broj e je dakle broj, kojim treba pomnožiti početnu glavnicu, da bi dobili vrijednost glavnice nakon godinu dana uz 100% neprekinuto ukamaćivanje. Za dokaz konvergencije slijeda

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ vidi Marković I, str.72.

Formulu za izračunavanje vrijednosti glavnice nakon n godina uz p%-tno stalno ukamaćivanje izvodimo, kako slijedi :

Vidjeli smo, da je

$$A_n^{(r)} = A\left(1 + \frac{p}{r\cdot 100}\right)^{n\cdot r}$$

Uvrstimo li novu oznaku $\frac{1}{m} = \frac{p}{r\cdot 100}$, slijedi $r = \frac{m\cdot p}{100}$

Uvrštenje u gornju formulu daje :

$$A_n^{(r)} = A(1 + \frac{1}{m})^{\frac{m\cdot p\cdot n}{100}} = A\left[(1 + \frac{1}{m})^m\right]^{\frac{p\cdot n}{100}}$$

Kod neprekinutog ukamaćivanja, t.j. kada r teži u ∞ i $m \to \infty$, što se vidi iz jednadžbe $\frac{1}{m} = \frac{p}{r\cdot 100}$, iz koje izlazi da je $m = \frac{r\cdot 100}{p}$. Izraz $(1 + \frac{1}{m})^m$ teži dakle broju e, te dobijemo formulu :

$$A_n^{(\infty)} = A\cdot e^{\frac{p\cdot n}{100}}$$

Primjer : $A = 1$, $p = 4\%$. Nakon godinu dana dobije se

jednokratnim ukamaćivanjem			$(1 + 0{,}04)^1 = 1{,}04$
polugodišnjim	"		$(1 + \frac{0{,}04}{2})^2 = 1{,}0404$
mjesečnim	"		$(1 + \frac{0{,}04}{12})^{12} = 1{,}0407415$
dnevnim	"	*)	$(1 + \frac{0{,}04}{360})^{360} = 1{,}04080846$
stalnim ukamaćivanjem			$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{0{,}04}{n})^n = e^{0{,}04} = 1{,}04081077$

Formula $A_n^{(\infty)} = A_0 e^{\frac{p\cdot n}{100}}$ je formula prirodnog rastenja, a upotrebljavamo je i kod izračunavanja raspadanja radioaktivnih tvari, jer u oba slučaja utječe na razvoj jednog stalnog procesa sva količina, koja je u danom momentu prisutna, samo što je u slučaju rastenja p pozitivan, a u slučaju raspadanja p je negativan, jer se radi o opadanju.

Tako dobivamo eksponencijalnu funkciju $y = e^x$ (slika 57) koja označuje promjene vrijednosti glavnice 1 uz 100%-no neprekinuto ukamaćivanje kroz x godina.

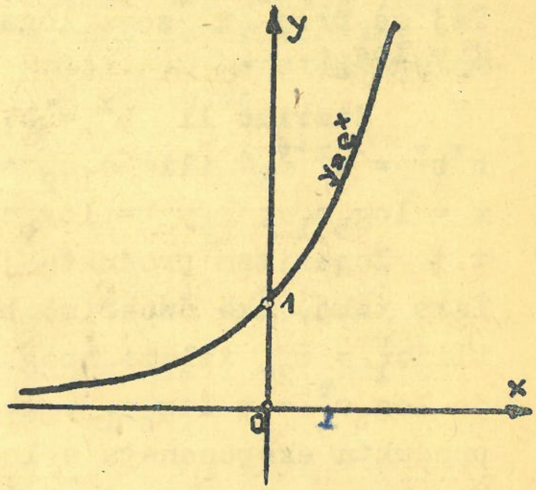
Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $y = e^x$ je logaritamska funkcija $x = \ln y$. Vidimo dakle, da je $\ln y$ (t.j. x) eksponent, kojim treba potencirati bazu e , da se dobije broj (numerus) y . Ovakvi logaritmi po bazi e zovu se prirodni ili Neperovi logaritmi, za razliku od Briggsovih logaritama, koji su uzeti po bazi 10.

Primijenimo li oznake označivši sa x neovisnu, a sa y ovisnu varijablu, funkcija glasi $y = \ln x$ (ln je kratica za logarithmus naturalis, u literaturi se upotrebljavaju i oznake l i log.).

---

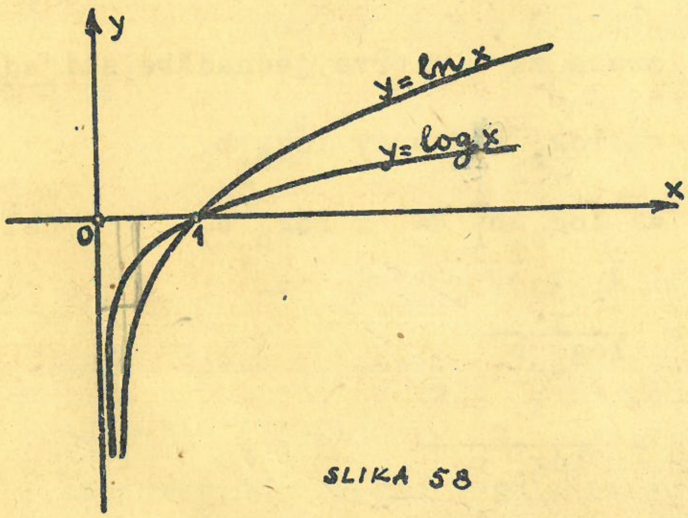
*) U kamatnom računu običava se godina računati sa 360 dana.

Uz graf prirodnih logaritama ($y = \ln x$) ucrtan je i graf dekadskih ili Briggsovih logaritama ($y = \log x$) (slika 58). Opažamo da su dekadski logaritmi za sve vrijednosti neovisne varijable osim za $x = 1$ po apsolutnoj vrijednosti manji, što je i jasno jer je baza dekadskih logaritama veća ($10 > e$), te je prema tome treba potencirati s manjim eksponentom (logaritmom), da bi dobili zadani broj.



SLIKA 57

Prije nego što pređemo na pravila za deriviranje eksponencijalnih i logaritamskih funkcija, potrebno je, da utvrdimo relacije između logaritamskih sistema različitih baza. Treba pri tom najprije točnije odrediti neke pojmove. Ako je b neki realan pozitivan broj, onda je potencija b^n definirana kao produkt od n jednakih faktora, ako je n cio pozitivan broj. Dalje je definirano $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.



SLIKA 58

Ako je eksponent racionalan broj onda je $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$. Pri tom je n-ti korijen, takav broj, koji dignut na n-tu potenciju daje radikant. Ako nema takvog racionalnog broja, dolazimo do iracionalnog korijena na analogan način, kako smo došli do pojma broja $\sqrt{2}$ kod razmatranja iracionalnih brojeva kao limesa izvjesnog slijeda brojeva. Ako je konačno eksponent iracionalni broj x, onda ćemo promatrati dva slijeda racionalnih brojeva $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ i $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$, $a_n > c_n$, čiji je zajednički limes $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = x$ taj iracionalni eksponent. Može se pokazati, da postoji $\lim_{n \to \infty} b^{a_n} = \lim_{n \to \infty} b^{c_n}$ koji smatramo vrijednošću potencije b^x. Time smo došli do pojma potencije, gdje i baza i eksponent smiju biti iracionalni brojevi. Može se dalje pokazati, da za takve potencije vrijede obični računski zakoni, napose $b^x b^y = b^{x+y}$ i $(b^x)^y = b^{xy}$.

Ako su napokon b i c dva pozitivna realna broja, onda se može dokazati, da postoji realan broj x, tako da bude $b^x = c$.

Taj se broj x zove logaritam od c za bazu b i piše se $x = \log_b c$.

Stavimo li $b^x = c_1$ $b^y = c_2$ $b^{x+y} = c_3$, onda iz $b^x b^y = b^{x+y}$ ili $c_1 c_2 = c_3$ izlazi zbog $x + y = \log_b c_3$, $x = \log_b c_1$; $y = \log_b c_2$, da je $\log_b c_1 c_2 = \log_b c_1 + \log_b c_2$ t.j. logaritam produkta je suma logaritama pojedinih faktora. Isto tako, ako označimo $b^x = c_1$, $b^{x\,y} = c_2$, onda iz $(b^x)^y = b^{x\,y}$ ili $c_1^y = c_2$ izlazi zbog $x = \log_b c_1$, $x\,y = \log_b c_2 = \log_b c_1^y$ da je $\log_b c_1^y = y \log_b c_1$, t.j. da je logaritam potencije jednak produktu eksponenata s logaritmom baze te potencije.

Općenito $y = \log_b x$ je inv. funkcija od $y = b^x$

Uspoređujemo sada dva logaritamska sustava s bazama b_1 i b_2.

Neka je

$$x = \log_{b_1} A \qquad\qquad y = \log_{b_2} A$$

Slijedi

$$b_1^x = b_2^y = A$$

Uvrstivši dobivene izraze za A u prve jednadžbe slijedi

$$x = \log_{b_1} b_2^y = y \log_{b_1} b_2$$

$$y = \log_{b_2} b_1^x = x \log_{b_2} b_1 \qquad \text{i dalje}$$

iz gornje jednadžbe :

$$x = \frac{y}{\log_{b_2} b_1}$$

$$y \log_{b_1} b_2 = \frac{y}{\log_{b_2} b_1} \qquad : y$$

$$\log_{b_1} b_2 \cdot \log_{b_2} b_1 = 1 \tag{39}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y \log_{b_1} b_2}{y} = \log_{b_1} b_2 = \frac{x}{x \log_{b_2} b_1} = \frac{1}{\log_{b_2} b_1} = \text{Const.}$$

Dobili smo dakle, da su logaritmi dvaju logaritamskih sistema proporcionalni, t.j. kvocijent logaritama nekog broja u dvjema različitim logaritamskim sistemima je konstantan (neovisno od toga broja, koji je logaritmiran).

$$\frac{\log_{b_1} A}{\log_{b_2} A} = \frac{\log_{b_1} B}{\log_{b_2} B} = \frac{\log_{b_1} X}{\log_{b_2} X} = \text{Const.}$$

Konstanta, kojom moramo pomnožiti logaritme jednog logaritamskog sistema da bi dobili logaritam drugog logaritamskog sistema ovisi dakle samo o bazama. Da bi dobili tu konstantu, uzmemo kao broj, koji se logaritmira, jednu od tih baza.

$$\frac{\log_{b_1} A}{\log_{b_2} A} = \frac{\log_{b_1} b_1}{\log_{b_2} b_1} = \frac{1}{\log_{b_2} b_1} = \frac{\log_{b_1} b_2}{1}$$

(Jasno je, da je općenito $\log_b b = 1$, jer je $b^1 = b$).

Lako nalazimo tu konstantu proporcionalnosti prirodnih i dekadskih logaritama.

$$\frac{\log A}{\ln A} = \frac{1}{\ln 10} = \log e$$

$\log e$ je konstanta, kojim trebamo pomnožiti prirodni logaritam nekog broja, da bi dobili njegov dekadski (Briggsov) logaritam. Tu konstantu zovemo još modulom dekadskog logaritamskog sustava. Općenito je modul nekog logaritamskog sustava logaritam od e po bazi dotičnog sustava.

$$\log e = M = 0{,}4342944819\ldots \tag{40}$$

modul dekadskog sustava

Slično je

$$\frac{\ln A}{\log A} = \ln 10 = \frac{1}{M} = 2{,}3025850930\ \ldots \tag{41}$$

$$\log A = M \cdot \ln A \tag{42}$$

$$\ln A = \frac{1}{M} \cdot \log A \doteq 2{,}3 \log A \tag{43}$$

Treba dakle zapamtiti : Apsolutne vrijednosti prirodnih logaritama približno su 2,3 puta veće od apsolutnih vrijednosti Briggsovih logaritama.

Za numeričke račune prikladni su Briggsovi logaritmi zbog toga, što su logaritmi dekadskih jedinica 1, 10^2, 10^3,.... cijeli brojevi 0, 1, 2, 3,...., što olakšava sastavljanje i upotrebu tablica. U višoj analizi su opet osobito prikladni prirodni logaritmi, jer se s njima najlakše računa, kao će se odmah očitovati kod deriviranja funkcije $y = \ln x$.

Derivacija logaritamske i eksponencijalne funkcije.

$$y = \ln x$$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Da bi lakše izveli granični prijelaz uvrstimo novu vrijednost t, koja ovisi o x i Δx tako, da je $\frac{x}{\Delta x} = t$. Odmah opažamo, da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{\Delta x} = \infty \qquad \text{Slijedi}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{1}{x}} = \ln\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$$

Kad Δx teži nuli tada t teži u ∞, te prema tome izraz $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ teži ka vrijednosti e. Dakle :

$$y' = \frac{1}{x}\lim_{t \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x} \quad {}^{*)}$$

Isto pravilo možemo pisati i ovako :

$y = \log x = M\cdot\ln x$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad$ ili $\qquad dy = d\ln x = \frac{dx}{x}$

$\boxed{y' = M\frac{1}{x}}$!

$$y = \ln x \qquad\qquad y' = \frac{1}{x} \tag{44}$$

Eksponencijalna funkcija

Derivaciju izvodimo po pravilu za deriviranje inverznih funkcija :

$$y = e^{x} \qquad\qquad x = \ln y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = e^{x}$$

$$y = e^{x} \qquad y' = e^{x} \tag{45}$$

Eksponencijalna funkcija jednaka je svojoj derivaciji. Po pravilu za deriviranje složenih funkcija lako izvodimo pravila za deriviranje logaritamskih i eksponencijalnih funkcija s općom bazom :

---

*) Ovdje smo zapravo stavili $\lim \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \ln \lim\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \ln e = 1$. Opravdanje za to je osnovano na neprekinutosti funkcije ln x. Vidi pobliže Marković I str.273,252,254.

$$y = \log_a x$$

$$y = \log_a x = \log_a e \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \tag{56}$$

Primjer :

$$y = \log x \qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{2,3\, x}$$

<u>Opća eksponencijalna funkcija</u>

$$y = a^x = e^{x \ln a}$$ $a = e^{\ln a}$

jer iz $y = a^x$ slijedi $\ln y = x \cdot \ln a$ i dalje $y = e^{x \cdot \ln a}$

Tako transformiranu funkciju lako deriviramo :

$$y' = e^{x \cdot \ln a} \ln a = a^x \ln a$$ $y' = \ln a \cdot (e^x)^{\ln a - 1} \cdot e^x$

$$y = a^x \qquad y' = a^x \ln a \tag{57}$$ $y' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \cdot \ln a$

9. Hiperbolne funkcije

Zbog njihove važnosti uvedene su neke kombinacije funkcije e^x i e^{-x} kao nove transcedentne funkcije nazvane hiperbolne funkcije.

Definirane su izrazima :

sinus hiperbolni $\quad \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

kosinus hiperbolni $\quad \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

tangens hiperbolni $\quad \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

kotangens hiperbolni $\quad \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Između trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija postoji mnogo sličnosti, pa se osnovne relacije između hiperbolnih funkcija razlikuju od analognih relacija među trigonometrijskim funkcijama samo u predznacima.

Tako $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 =$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

$$ch^2x - sh^2x = 1 \qquad (58)$$

Pobliže će o tome biti rečeno kasnije.

Derivirajući izraze, kojima su pojedine hiperbolne funkcije definirane izvodimo pravila za deriviranje tih funkcija :

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

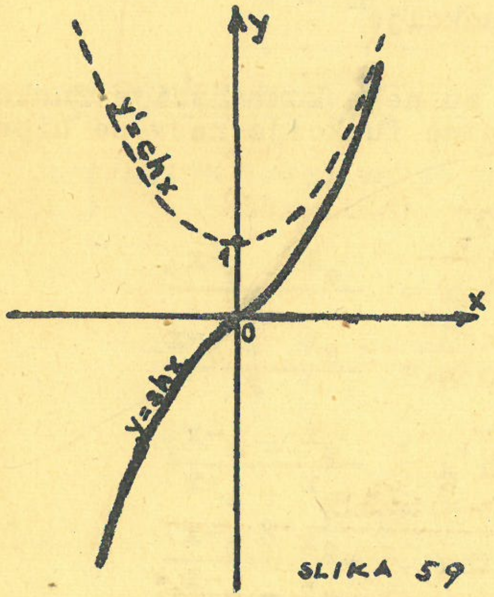
$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$\underline{y = shx \qquad y' = chx} \quad \text{(slika 59)} \qquad (59)$$

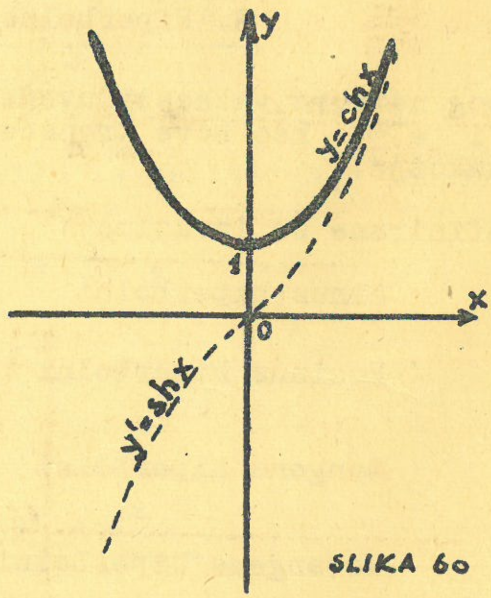
$$y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx\,.$$

$$\underline{y = chx \qquad y' = shx} \quad \text{(slika 60)} \qquad (60)$$



SLIKA 59

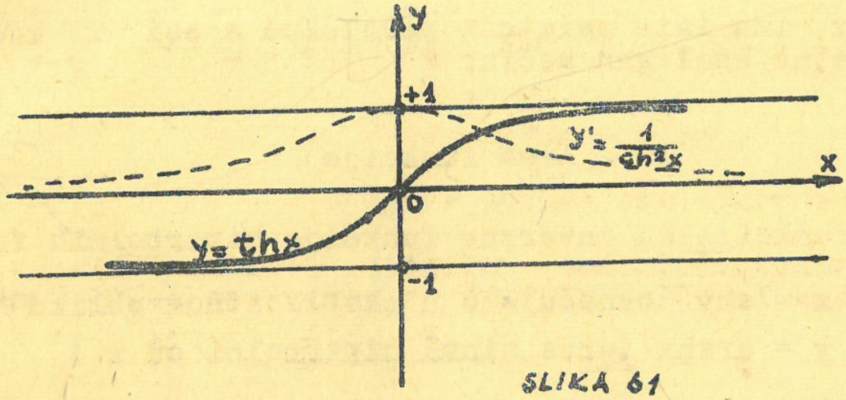


SLIKA 60

$$y = thx = \frac{shx}{chx}$$

$$y' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$$

$$\underline{y = thx \qquad y' = \frac{1}{ch^2x}} \quad \text{(slika 61)} \qquad (61)$$



SLIKA 61

Da krivulja $y = thx$ ima asimptote $y = 1$ i $y = -1$ vidi se graničnim prijelazom :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$

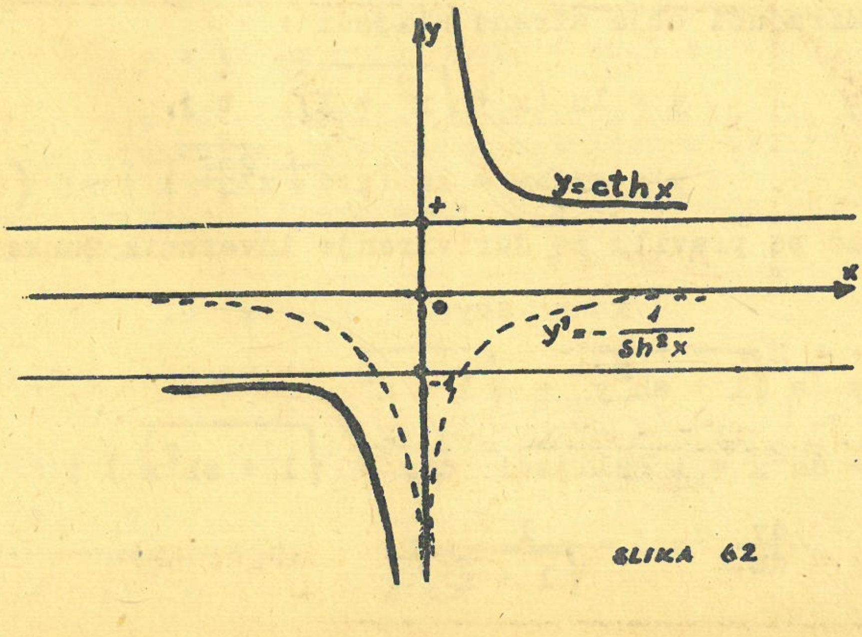
dakle $\lim\limits_{x \to \infty} thx = 1$

Dalje : $y = thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\frac{1 - \frac{1}{e^{-2x}}}{1 + \frac{1}{e^{-2x}}}$, dakle $\lim\limits_{x \to -\infty} thx = -1$

$$y = cth\,x = \frac{chx}{shx}$$

$$y' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = \frac{-1}{sh^2x}$$

$$y = cthx \qquad y' = -\frac{1}{sh^2x} \quad \text{(slika 62)} \tag{62}$$



SLIKA 62

I cthx ima iste asimtote paralelne s osi x kao thx, što se uviđa na analogan način.

10. Area funkcije

Area funkcije su inverzne funkcije hiperbolnih funkcija.

$x = shy$ označujemo u eksplicitnom obliku

$y = arshx$ (area sinus hiperbolni od x)

Kao što smo hiperbolne funkcije definirali eksponencijalnim funkcijama, tako možemo area funkcije izraziti pomoću logaritama. Izvodimo to ovako :

Mjesto $y = arshx$ pišemo

$$x = sh\,y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2 \cdot x = e^y - e^{-y} \quad / \cdot e^y$$

$$2\,x \cdot e^y = (e^y)^2 - 1$$

$$(e^y)^2 - 2\,x\,e^y - 1 = 0$$

Riješimo li ovu jednadžbu po e^y dobijemo $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$
Kod toga uzimamo ispred korijena samo pozitivni predznak, jer je e^y za sve vrijednosti od y pozitivan, dok bi izraz $x - \sqrt{x^2 + 1}$ bio negativan.

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Odatle logaritmirajući obje strane slijedi :

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad \text{t.j.}$$

$$y = arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad (63)$$

Deriviramo po pravilu za deriviranje inverznih funkcija:

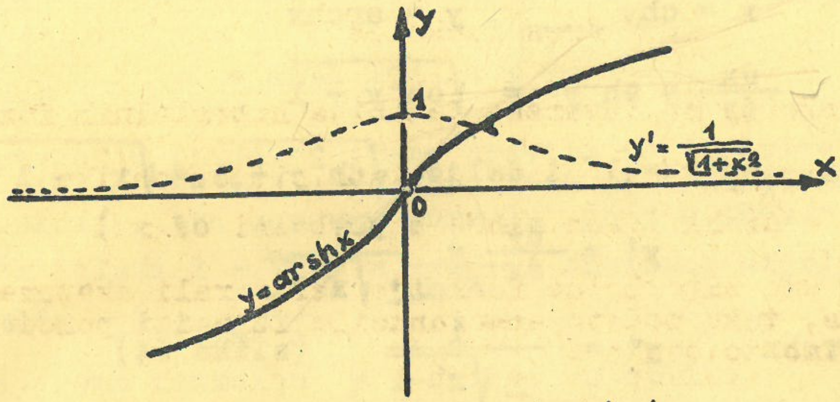
$$x = shy$$

$$\frac{dx}{dy} = chy = \sqrt{1 + sh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

(jer iz $ch^2x - sh^2x = 1$ slijedi $chx = \sqrt{1 + sh^2x}$) ;

Konačno $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$y = \text{arshx} \qquad y' = + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ (slika 63) (64)



SLIKA 63

Dalje : $x = \text{ch}y$ označujemo eksplicitno sa
, $y = \text{arch}x$ (area kosinus hiperbolni od x) $x \geq 1$

Istu funkciju možemo izraziti i logaritamski :

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \Big/ \cdot 2e^y$$

$$2x \cdot e^y = (e^y)^2 + 1$$

$$(e^y)^2 - 2x e^y + 1 = 0$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

gdje zadržavamo oba predznaka, jer im odgovaraju realne vrijednosti u određenim intervalima.

Logaritmiraju li se obje strane, konačno izlazi :

$$y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) = \text{arch}\, x \qquad (65)$$

Graf te funkcije je simetričan s obzirom na os x, kao što je graf inverzne funkcije $y = \text{ch}x$ simetričan s obzirom na os y. Izraz $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ daje gornju, a $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ donju granu krivulje. Prema tome zbog simetrije krivulje mora vrijediti jednakost

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

što se vidi i računski :

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x - \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \ln \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \ln \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = -\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Funkciju $y = \mathrm{arch}x$ deriviramo po pravilu za deriviranje inverznih funkcija.

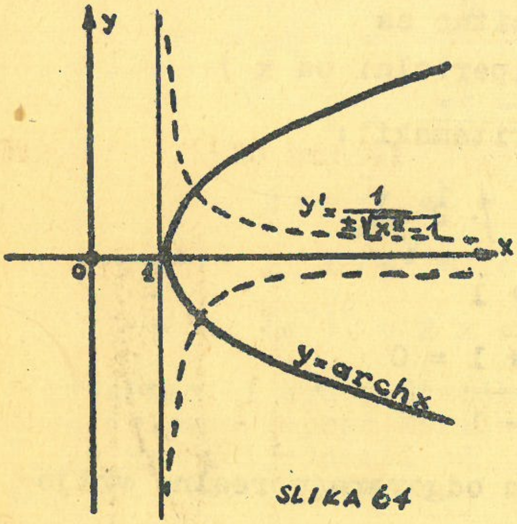
$$x = \mathrm{ch}y \qquad y = \mathrm{arch}x$$

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{sh}\, y = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - 1}$$

(jer je $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ i dalje $\sqrt{\mathrm{ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$) ;

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \mathrm{arch}x \qquad y' = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}} \quad \text{(slika 64)} \qquad (66)$$



SLIKA 64

U derivaciji zadržavamo oba predznaka, jer je funkcija $y = \mathrm{arch}x$ dvoznačan, te i derivacija ima dvije grane, dvije vrijednosti za svaku vrijednost varijable x.

Funkcionalni odnos $x = \mathrm{th}y$ eksplicitno označujemo sa $y = \mathrm{arth}x$ (area tangens hiperbolni od x)

Isti se funkcionalni odnos može izraziti i pomoću logaritama, što pokazujemo ovako :

Mjesto $y = \mathrm{arth}\, x$ pišemo : $x = \mathrm{th}y$, dakle

$$x = \mathrm{th}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \cdot \frac{e^y}{e^y} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Big| \cdot (e^{2y} + 1)$$

$$x\, e^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y}(1 - x) = 1 + x$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

i dalje logaritmirajući :

$$2 \cdot y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Dakle :

$$y = \text{arth } x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \tag{67}$$

Derivaciju izvodimo prema pravilu za deriviranje inverznih funkcija služeći se kod toga formulama za transformaciju hiperbolnih funkcija. Ako osnovnu formulu $ch^2x - sh^2x = 1$ podijelimo sa ch^2x izlazi $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$, analogno dijeljenjem sa sh^2x izlazi $cth^2x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}$

Deriviramo funkciju $y = \text{arth } x$ u obliku :

$$x = \text{th } y \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{ch^2y} = 1 - th^2y = 1 - x^2, \text{ odatle}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y = \text{arth } x \qquad y' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{(slika 65)} \tag{68}$$

Funkcija je definirana samo u intervalu $|x| < 1$

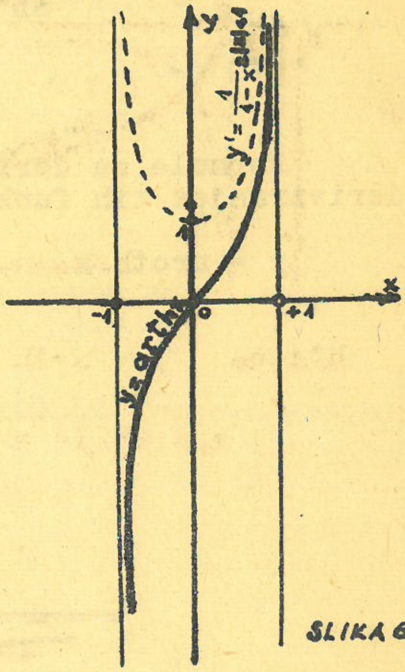
Derivacije area funkcija možemo izvesti i iz logaritamskog oblika.

Tako deriviramo na primjer :

$$y = \text{arth } x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$



SLIKA 65

Funkcionalni odnos $x = \text{cth } y$ označujemo u eksplicitnom obliku sa:

$y = \text{arcth}x$ (area kotangens hiperbolni od x)

Funkciju možemo napisati i u logaritamskom obliku :

$$x = \text{cth } y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \cdot \frac{e^y}{e^y} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}$$

$$x\,(e^{2y} - 1) = e^{2y} + 1$$

$$x\,e^{2y} - e^{2y} = 1 + x$$

$$e^{2y}\,(x - 1) = x + 1$$

$$e^{2y} = \frac{x + 1}{x - 1}$$ i logaritmirajući slijedi

$$2y = \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} = \ln \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} = \operatorname{arcth} x \qquad (69)$$

Funkcija je definisana u intervalu zadanom sa $|x| > 1$ što vidimo i po tome da logaritmand u izrazu

$\ln \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$ za $|x| < 1$ poprima imaginarne vrijednosti.

Funkciju deriviramo kao inverznu funkciju :

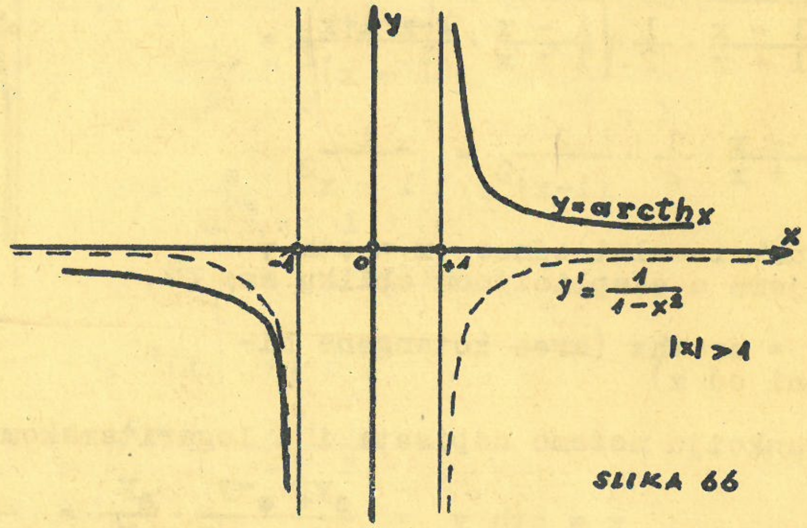
$$x = \operatorname{cth} y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} = -(\operatorname{cth}^2 y - 1) = 1 - \operatorname{cth}^2 y = 1 - x^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Formule za deriviranje area - funkcija mogu se dobiti i deriviranjem tih funkcija izraženih pomoću logaritama.

$$y = \operatorname{arcth} x \qquad y' = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \text{(slika 66)} \qquad (70)$$



SLIKA 66

L o g a r i t m i č k o   d e r i v i r a n j e

Funkcije oblika $y = u^v$ gdje je $u = f(x)$ i $v = \varphi(x)$ ne možemo derivirati po dosada izloženim metodama, jer je to u isto vrijeme i potencija i eksponencijalna funkcija. U takvim i sličnim slučajevima primjenjujemo metodu logaritmičkog deriviranja.

Najjednostavnija funkcija takvog oblika je funkcija $y = x^x$. Logaritmirajući obe strane te jednadžbe dobijemo $\ln y = x \ln x$. Sada deriviramo posebno obje strane, držeći pri tom na umu, da je $y = f(x)$ i da je prema tome derivacija po x od $\ln y$ jednaka $\frac{1}{y} \cdot y'$.

Dakle :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad \Big| \cdot y$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Analogno bi derivirali na pr.funkciju $y = (\sin x)^{\ln x}$

$$y = (\sin x)^{\ln x}$$

$$\ln y = \ln x \cdot \ln \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \ln \sin x + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = (\sin x)^{\ln x} \left[\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \cdot \operatorname{ctg} x \right]$$

Općenito funkciju $y = u^v$ deriviramo :

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) \quad *) \qquad (71)$$

Primjer :

$y = (\sin x)^{\ln x}$ $\qquad u = \sin x \qquad v = \ln x$

$\qquad u' = \cos x \qquad v' = \frac{1}{x}$

---

*) Ovu formulu ne treba pamtiti, nego treba znati metodu.

$$y' = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right) = (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\sin x + \frac{\ln x}{\sin x}\cdot\cos x\right).$$

Istim postupkom deriviramo i funkcije oblika $y = u^{v^w}$, na pr. $y = x^{x^x}$, samo što trebamo dva puta logaritmirati.

Kod toga treba razlikovati na pr. $y = x^{x^x}$ od $y = (x^x)^x$, jer po pravilu potenciranja potencija izlazi, da je $(x^x)^x = x^{(x^2)}$

Metodom logaritmičkog deriviranja proširujemo pravilo za deriviranje potencija i za potencije s iracionalnim eksponentom, kao na pr. $y = x^a$ i sl.

Funkciju $y = x^a$ gdje a može biti iracionalan broj, logaritmiramo :

$$\ln y = a\ln x$$

deriviranjem izlazi :

$$\frac{y'}{y} = a\cdot\frac{1}{x} = \frac{a}{x}$$

$$y' = \frac{a}{x}\cdot y = \frac{a}{x}\cdot x^a = a\cdot\frac{x^a}{x} = ax^{a-1} \qquad (72)$$

~~Umetak: Grafičko deriviranje str. 114.~~

11. Više derivacije

Vidjeli smo, da je derivacija neke funkcije nova funkcija nezavisne varijable x . Derivirajući tu novu funkciju $y' = f'(x)$ t.j. derivaciju funkcije $y = f(x)$ dobijemo njenu drugu derivaciju.

Druga derivacija neke funkcije je dakle derivacija prve derivacije. Analogno se dobije treća. četvrta i t.d. derivacija.

Pišemo : derivacija funkcije $y = f(x)$ glasi $y' = f'(x)$. Druga derivacija :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{dy'}{dx} = (y')' = y''$$

Više derivacije označujemo sa :

$$y^{III}, \quad y^{IV} = y^{(4)}, \; \dots \; y^{(n)}, \quad y^{(n+1)} \; \dots\dots$$

Primjeri :

1) $y = x^n$
$y' = n\cdot x^{n-1}$

"Jark - promjena akceleracije po vremenu 's'''

$$y'' = n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$$

$$y''' = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)x^{n-3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = n!$$

Ili na drugi način napisano $(x^n)^{(n)} = n!$

2) U mehanici često se pojavljuje funkcionalni odnos puta i vremena. Prevaljeni put s nekog tijela po nekom zakonu ovisi o vremenu t, ili drugim riječima $s = f(t)$, gdje je s zavisna, a t neovisna varijabla. Ako želimo izračunati brzinu tijela u nekoj točki, moramo pronaći kvocijent infinitezimalnog elementa puta i infinitezimalnog elementa vremena, t.j.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v = \dot{s} \;{}^{*)}$$

Kažemo, da je brzina v prva derivacija puta po vremenu. Kvocijent diferencija $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ zove se srednja brzina u vremenu Δt.

Brzinu mijenjanja brzine tokom vremena, t.j. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ zovemo ubrzanje ili akceleracija. Kvocijent diferencija $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ zove se srednje ubrzanje u vremenu Δt.

Ubrzanje je dakle : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}$, te kažemo, da je akceleracija druga derivacija puta po vremenu ili prva derivacija brzine po vremenu.

Umetak: Leibnizova formula, "derivacija složenih f., diferencijali višeg reda.

12. Maksima i minima

Odnos Dy i Dx s obje strane

Ako je vrijednost neke kontinuirane funkcije u nekoj točki veća nego vrijednosti funkcije u neposrednoj okolini te točke, mora joj derivacija u toj točki, ako postoji, biti jednaka nuli, t.j. tangenta na krivulju u toj točki je paralelna ~~je~~ sa osi x. Kažemo da funkcija u toj točki ima maksimum. Analogno, ako je vrijednost funkcije u nekoj točki manja od vrijednosti funkcije u neposrednoj okolini, funkcija ima minimum, a derivacija funkcije u toj točki, ukoliko postoji, jednaka je nuli :

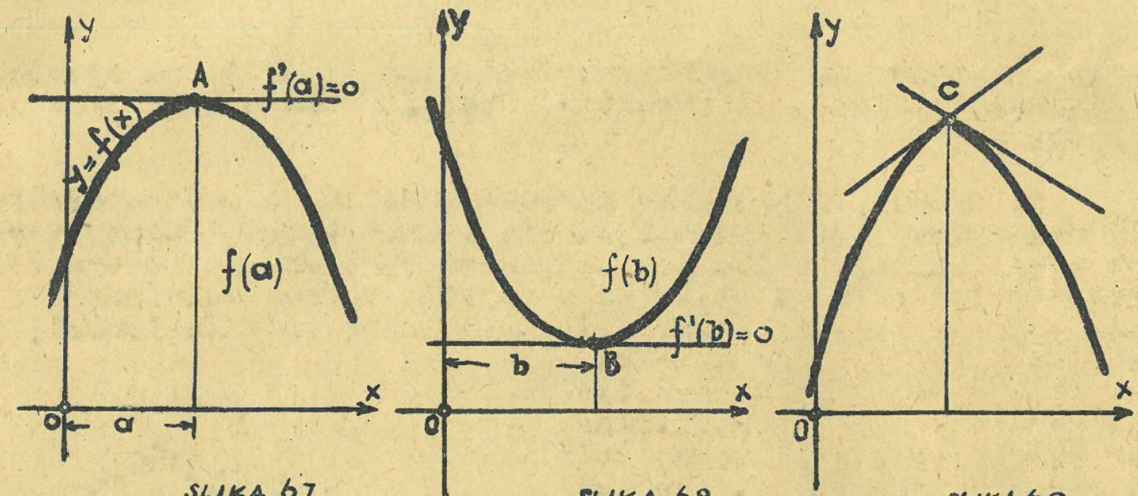
Maksima i minima zovu se jednim imenom ekstremne vrijednosti funkcije.

Na slici 67 funkcija $y = f(x)$ u točki A ima maksimum, a $f'(a) = 0$.

Na slici 68 funkcije ima u točki B minimum.

---

*) Derivacija po vremenu obično se označuje točkom iznad slova, umjesto crticom.

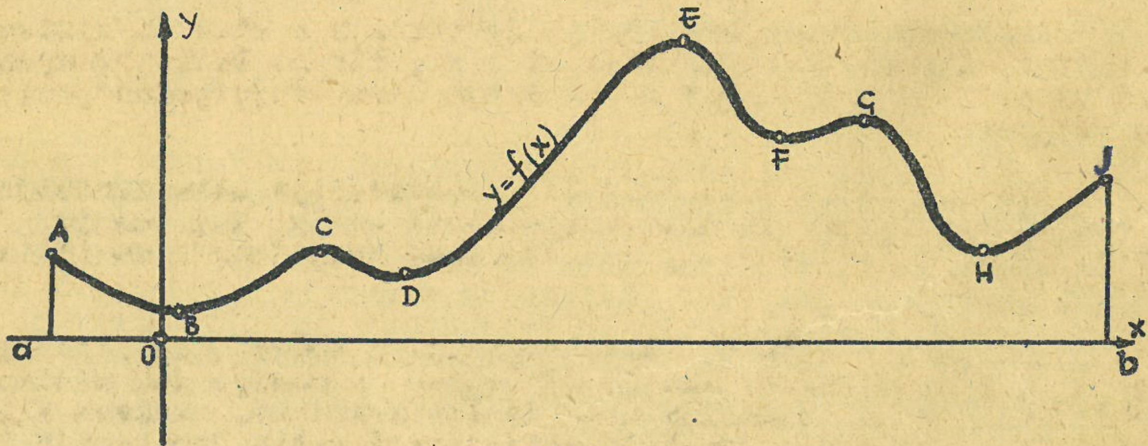


SLIKA 67 SLIKA 68 SLIKA 69

Na slici 69 funkcija ima u točki C maksimum, a da derivacija nije jednaka nuli, jer se funkcija u toj točki lomi, te zato nema derivacije. U tom slučaju možemo govoriti samo o derivaciji s desna ili s lijeva, t.j. o tangensu smjera tangente u točki C na desni ili lijevi krak krivulje.

Razlikujemo relativne i apsolutne minimume i maksimume funkcije koju promatramo u nekom intervalu.

Tako na slici 70 funkcija $y = f(x)$ u intervalu $[a,b]$ ima apsolutni maksimum, t.j. najveću vrijednost u točki E, dok je apsolutni minimum funkcije u točki B.

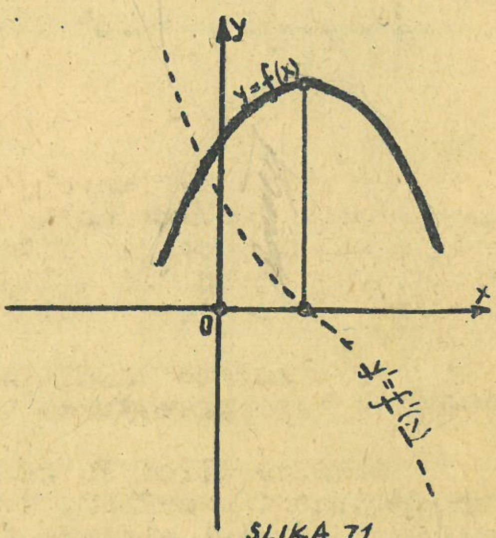


SLIKA 70

Funkcija ima relativne maksimume u točkama A, C, G i J, te relativne minimume u točkama D, F i H. Lako razaznajemo da, ako je minimum ili maksimum na kraju intervala u kojem posmatramo tok funkcije, derivacija ne mora biti jednaka nuli.

Da bi našli točke, u kojima neka funkcija ima ekstremne vrijednosti, određujemo njenu derivaciju i izjednačimo je sa nulom. Korijeni jednadžbe $f'(x) = o$ jesu apscise onih točaka krivulje, u kojima je tangenta horizontalna, t.j. to su apscise ekstremnih vrijednosti funkcije. Označit ćemo te korijene sa x_1, x_2, x_3, ...

Do metode, kojom ćemo odrediti, da li se radi o minimumu ili maksimumu, dolazimo slijedećim razmatranjem. Posmatrajući tok neke funkcije u okolici maksimuma opažamo, da se ona najprije penje, zatim dostiže neku najvišu točku (maksimum), a onda počinje padati (slika 71). Derivacija rastuće funkcije je pozitivna, derivacija u maksimumu jednaka je nuli, derivacija padajuće funkcije je negativna, jer je derivacija u svakoj točki krivulje tangens smjera tangenta na krivulju u toj točki.



SLIKA 71

Vidimo dakle, da derivacija u okolici maksimuma prima najprije pozitivne vrijednosti, zatim nulu i najzad negativne vrijednosti, t.j. derivacija $y'=f'(x)$ je padajuća funkcija od x.

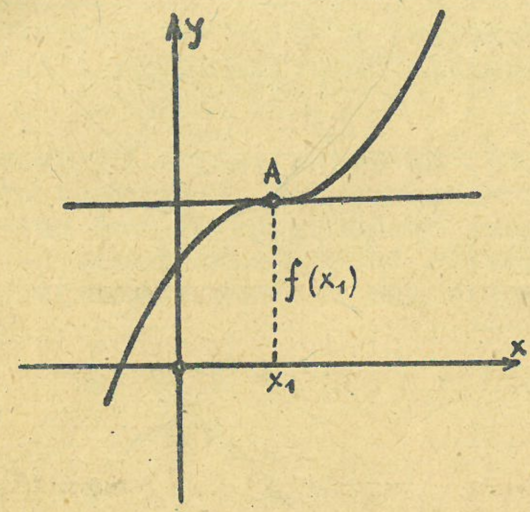
To će biti ispunjeno, ako derivacija derivacije funkcije $y = f(x)$, t.j. druga derivacija ima negativnu vrijednost na mjestu, gdje funkcija ima maksimum.

Analogno pokazujemo, da je derivacija u okolici minimuma neke funkcije rastuća funkcija od x , što će biti ispunjeno, ako za dotičnu vrijednost od x druga derivacija prima pozitivnu vrijednost.

Ako smo dakle pronašli, da se derivacija neke funkcije $y = f(x)$ poništava za neke vrijednosti od x, t.j. da je $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$..., tada tražimo vrijednosti za $f''(x_1)$, $f''(x_2)$ i t.d.

Ako je $f''(x_1) < 0$, tada funkcija u točki, kojoj je apscisa x_1 , ima maksimum. Ako je $f''(x_2) > 0$ funkcije ima minimum. Za $f''(x_3) = 0$ funkcija može da ima maksimum, minimum ili infleksiju, te moramo tražiti vrijednosti viših derivacija (potanje o tome kasnije).

Na slici 72 funkcija u točki A ima infleksiju ili obratište. Vidimo da je tangenta u toj točki paralelna sa osi x, t.j. prva derivacija je jednaka nuli. Općenito kažemo da funkcija u nekoj točki ima infleksiju, ako gradijent tangente na krivulju u toj točki ima ekstrem, t.j. ako prva derivacija ima ekstremnu vrijednost.

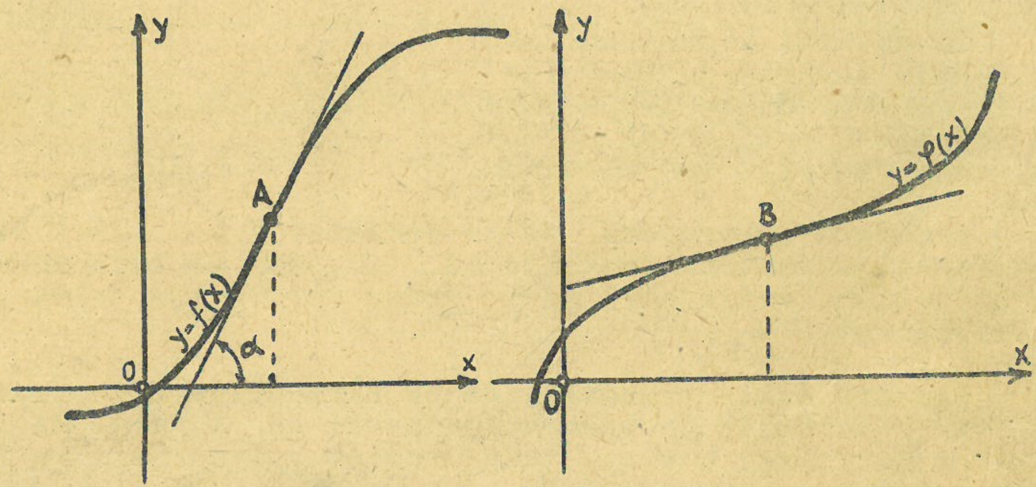


SLIKA 72

Na slici 73 prikazani su grafovi dviju funkcija. Prva ima infleksiju u točki A jer je tangens smjera tangente u točki A veći nego u susjednim točkama, t.j. prva derivacija u toj točki ima maksimum. Kod druge krivulje u točki B gradijent ima minimum, te je i u toj točki infleksija .

Iz slike je vidljivo, da se u okolini infleksije krivulja nalazi s raznih strana svoje tangente.

Prvi uvjet, da krivulja u nekoj (x_1 , y_1) ima infleksiju, jest, da se druga derivacija za tu vrijednost od x poništava, t.j. da bude $f''(x_1) = o$. Ako je druga derivacija jednaka nuli, još nije sigurno, da se radi



SLIKA 73

o infleksiji. Potpuna diskusija ekstremnih vrijednosti i infleksija moći će se provesti tek upotrebom razvijanja funkcija u Taylorov red.

Primjeri :

a) $y = \sin x$

$y' = \cos x = o$; $x = \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$

$y'' = -\sin x$

Za $x = \ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ $y'' = -\sin x = 1 > o$, minimum

$x = \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$ $y'' = -\sin x = -1 < o$, maksimum

b) $y = x^3 - x$

$y' = 3 \cdot x^2 - 1 = 0$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y'' = 6 \cdot x$ Za $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $y'' = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$ minimum

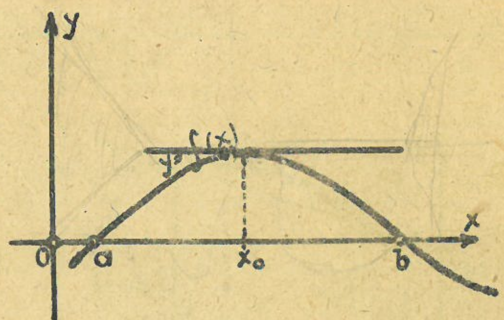
Za $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y'' = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$ maksimum

Umetak

13. Rolleov teorem i teorem o srednjoj vrijednosti.

Ako je neka funkcija $y = f(x)$ (slika 74) derivabilna i ~~kontinuirana~~ unutar zatvorenog intervala $[a, b]$, te ako je za $x = a$ i $x = b$ $f(x) = 0$, t.j. ako je $f(a) = 0$ i $f(b) = 0$, onda između a i b postoji neka vrijednost x_0 od x tako, da je $f'(x_0) = 0$, t.j. u intervalu $[a, b]$ funkcija ima barem jednu tangentu paralelnu sa osi x.

Ako je $f(x)$ u čitavom intervalu jednak nuli, mora biti $f'(x) = 0$ u čitavom intervalu. Ako funkcija poprima pozitivne vrijednosti mora imati negdje maksimum u zadanom intervalu, a ako poprima negativne, minimum, dakle barem jedno mjesto, gdje je $f'(x) = 0$. (Za strogi dokaz, da funkcija mora poprimiti maksimum, odnosno minimum, vidi Marković I, str.263.)

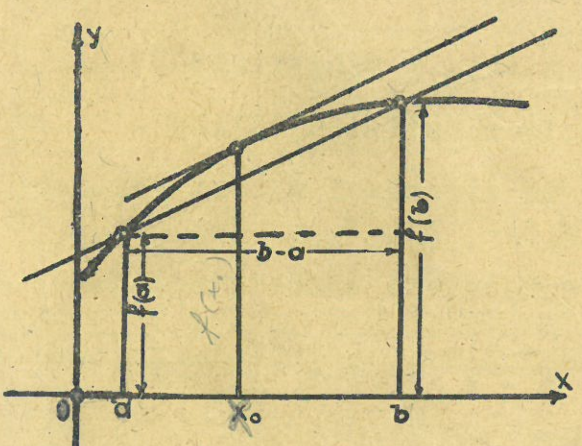


SLIKA 74

Rolleov teorem može se poopćiti (slika 75). Ako nije $f(a) = f(b) = 0$, onda tvrdimo, ako neka funkcija ima derivaciju u svim točkama intervala $[a, b]$ da postoji između a i b neka vrijednost x_0 od x za koju je

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$

t.j. tangenta u točki $[x_0, f(x_0)]$ paralelna je sa sekantom kroz točke $[a, f(a)]$ i $[b, f(b)]$. To dokazujemo na temelju Rolleovog teorema.



SLIKA 75

Jednadžba sekante glasi:

$$\boxed{y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x-a)}$$

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, a + f(a)$$

Tvorimo sada novu funkciju $F(x)$, čije su ordinate svagdje jednake razlici ordinata krivulje $f(x)$ i sekante :

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot a$$

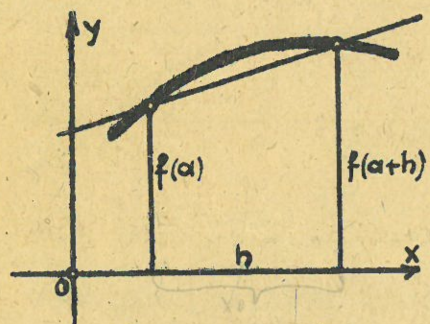
Na ovu novu funkciju možemo primjeniti Rolleov teorem, jer vrijedi $F(a) = F(b) = o$ (budući da se za $x = a$ i $x = b$ sekanta i krivulja poklapaju, te su tamo razlike njihovih ordinata $F(a)$ i $F(b)$, jednake nuli), a osim toga zadovoljen je i uvjet da funkcija bude kontinuirana i da ima derivaciju u zadanom intervalu.

Postoji dakle neka vrijednost x_o između a i b $(a < x_o < b)$ tako, da je $F'(x_o) = o$. Mjesto $a < x_o < b$ možemo pisati $x_o = a + \Theta(b-a)$ gdje je $o < \Theta < 1$.

Deriviranjem funkcije $F(x)$ i uvrštavanjem $F'(x_o) = o$ dobijemo :

$$F'(x_o) = f'(x_o) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = o \quad \text{t.j.}$$

$$f(b) - f(a) = (b - a)\cdot f'(x_o)$$



SLIKA 76

L. Lagrange (1801)

Nazovimo :

a x

b - a ..... h

b ...... x + h

x_o....x + Θh $o < \Theta < 1$

Tako dobijemo konačni oblik poopćenja Rolleovog teorema, koji nazivamo teorem o srednjoj vrijednosti, a glasi :

Liv teorem Lagrange

$$\boxed{f(x + h) - f(x) = h\cdot f'(x + \Theta h)}$$

Ako označimo $h = \Delta x$ možemo to pisati i u obliku :

$\Delta y = f'(x + \Theta\Delta x)\cdot \Delta x$, dok za diferencijal vrijedi, kao što nam je poznato, $dy = f'(x)\cdot \Delta x = f'(x)\cdot dx$

Općenitiji oblik teorema o srednjoj vrijednosti dobijemo, ako mjesto sekante

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot x - a\cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

uzmemo parabolu r - tog reda sa tjemenom odnosno infleksijom *) u $[b, f(b)]$, koja prolazi i točkom $[a, f(a)]$.

Smatrajući razliku ordinata funkcije $f(x)$ i parabole r-tog reda novom funkcijom $F(x)$, primijenimo na tu funkciju $F(x)$ Rolleov teorem.

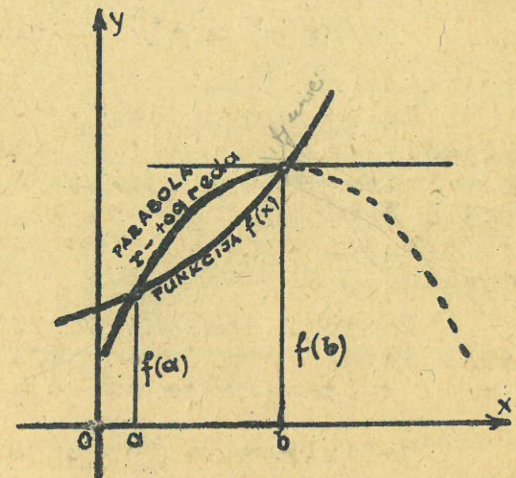
Jednadžba parabole r - tog reda (slika 77) sa tjemenom u b,f(b) ima jednadžbu :

$$y - f(b) = A\cdot(x-b)^r ,$$

o čemu se možemo lako uvjeriti :

za $x = b$ $y = f(b)$ je $y' = 0$, t.j. parabola prolazi kroz točku b,f(b) i ima u njoj ekstrem (koji je kod parabole identičan sa tjemenom) ili infleksiju.

Koeficijent A odredimo iz uvjeta, da krivulja prolazi točkom a, f(a).



SLIKA 77

Za $x = a$ mora biti $y = f(a)$ t.j. $f(a) - f(b) = A(a-b)^r$, odatle slijedi da je

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{(a - b)^r}$$

Konačna jednadžba parabole r-tog reda dakle glasi :

$$y = f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{(a - b)^r}\cdot(x - b)^r$$

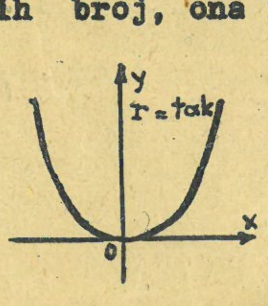
Razlika ordinata funkcije $f(x)$ i parabole, t.j. $F(x)$ glasi :

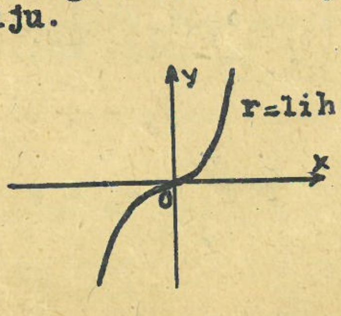
$$F(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(a) - f(b)}{(a - b)^r}\cdot(x - b)^r$$

Njena je derivacija

$$F'(x) = f'(x) - \frac{r[f(a) - f(b)]}{(a - b)^r}\cdot(x - b)^{r-1}$$

*) Ako je r tak broj , parabola r-toga reda ima tjeme, ako je r lih broj, ona ima infleksiju.





Za neku vrijednost od x_0 između a i b, $x_0 = a + \vartheta(b-a)$, gdje je $o < \vartheta < 1$, ta se derivacija po Rolleovom teoremu poništava :

$$F'\left[a + \vartheta(b-a)\right] = o = f'\left[a + \vartheta(b-a)\right] - \frac{r}{(a-b)^r}\left[f(a) - f(b)\right] \cdot$$
$$\cdot\left[a + \vartheta(b-a) - b\right]^{r-1}$$

Sredimo li dobiveni izraz, izlazi :

$$f'\left[a + \vartheta(b-a)\right] - \frac{r}{(a-b)^r}\cdot\left[f(a) - f(b)\right].(a-b)^{r-1}(1-\vartheta)^{r-1} = o$$

i dalje

$$f'\left[a + \vartheta(b-a)\right] - \frac{r(1-\vartheta)^{r-1}}{a-b}\left[f(a) - f(b)\right] = o$$

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{r(1-\vartheta)^{r-1}} \cdot (b-a)\cdot f'\left[a + \vartheta(b-a)\right]$$

nazovemo li

a ----- x

b ----- x + h

b-a ...... h ~~b f(a+ a t.t.h~~

dobijemo ~~po~~općeni oblik teorema o srednjoj vrijednosti :

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{r(1-\vartheta)^{r-1}} \cdot h \cdot f'(x + \vartheta h)$$

Limitati > Poopćeni teorem sr. vrijednosti, Taylorova formula za polinome

14. Taylorov i Mac Laurinov red

Poznato nam je, da je kod geometrijskog reda za $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^n + a_1q^{n+1} + \ldots$$

Ako je $a_1 = 1$, te ako mjesto q pišemo x dobivamo da je:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots \quad \text{za } |x| < 1$$

Izraz $\frac{1}{1-x}$ je funkcija od x. Vidimo dakle, da funkciju $y = f(x) = \frac{1}{1-x}$ možemo razviti u beskonačni red potencija. Tražimo opći oblik takvog reda potencija, pomoću kojeg bi i neke druge funkcije mogli razviti u takav red.

Označujemo takav red sa

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2\cdot x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots$$

Da bi funkcije mogli razviti u takav red, treba da nađemo vrijednosti konstantnih koeficijenata a_o , a_1, a_2,.....

Pretpostavljamo : 1) da se funkcija dade razviti u takav red, t.j. da postoji red, koji je konvergentan i jednak toj funkciji u nekom intervalu.

2) Da se konvergentni red potencija smije derivirati član po član i da se kod toga dobije opet konvergentni red potencija s istim intervalom konvergencije i sumom, koja je jednaka derivaciji funkcije, koju smo razvijenu u red derivirali (što ovdje ne dokazujemo).

Za $x = o$ dobijemo iz gornjeg reda da je $a_o = f(o)$.

Deriviranjem reda izlazi :

$$f'(x) = a_1 + 2\cdot a_2 x + 3\cdot a_3\cdot x^2 + 4\cdot a_4\cdot x^3 + \ldots\ldots.$$

Za $x = o$ dobijemo $a_1 = f'(o)$

Druga derivacija reda glasi :

$$f''(x) = 2\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3\, x + 4\cdot 3\cdot a_4 x^2 + \ldots\ldots..$$

Za $x = o$ dobijemo $f''(o) = 2\cdot a_2$ i odatle $a_2 = \frac{f''(o)}{2!}$

Dalje :

$$f'''(x) = 3\cdot 2\, a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 x + \ldots\ldots$$

Za $x = o$ izlazi $f'''(o) = 3\cdot 2\cdot a_3$ i odatle $a_3 = \frac{f'''(o)}{3!}$

Nastavljanjem ovog računa (vidi se, da je opći koeficijent $a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!}$

Uvrstivši nađene koeficijente dobijemo Mac Laurinov red :

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1!}x + \frac{f''(o)}{2!}x^2 + \frac{f'''(o)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(o)}{n!}x^n + \ldots$$

Red možemo pisati i ovako :

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1!}f'(o) + \frac{x^2}{2!}f''(o) + \frac{x^3}{3!}f'''(o) + \ldots\ldots$$

Primjeri za razvijanje funkcija u Mac Laurinov red :

1) $y = e^x$ $\qquad a_o = f(o) = e^o = 1$

$y' = e^x$ $\qquad a_1 = f'(o) = e^o = 1$

$y'' = e^x$ $\qquad a_2 = \frac{f''(o)}{2!} = \frac{1}{2!}$

$y^{(n)} = e^x$

$a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!} = \frac{1}{n!}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots + \frac{x^{n}}{n!} + \dots\dots \qquad \text{(Napamet !)}$$

2) $y = \sin x \qquad a_o = f(o) = \sin o = o$

$y' = \cos x \qquad a_1 = f'(o) = \cos o = 1$

$y'' = -\sin x \qquad a_2 = \frac{f''(o)}{2!} = \frac{-\sin o}{2!} = o$

$y''' = -\cos x \qquad a_3 = \frac{f'''(o)}{3!} = \frac{-\cos o}{3!} = -\frac{1}{3!}$ − 1

$y^{IV} = \sin x \qquad a_4 = \frac{f^{IV}(o)}{4!} = \frac{\sin o}{4!} = o \qquad$ i t.d.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\dots\dots \qquad \text{(Napamet !)}$$

Analogno dobijemo :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots\dots \qquad \text{(Napamet !)}$$

Može se pokazati, da su sva tri reda konvergentna za sve vrijednosti od x . Slično se izvodi red za $f(x) = \ln(1 + x)$ koji glasi :

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots$ a konvergentan je za $-1 < x \leqq 1$.

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

Sh x = ...
ch x = ...

EULEROVA i MOIVRE-ova RELACIJA

Izraz e^{ix} definiramo redom, koji se dobije iz reda za e^x , ako nadomjestimo x sa ix :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots\dots =$$

$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \dots\dots\dots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos x + i \sin x$$

Uvrstivši vrijednosti za potencije imaginarne jedinice i odijelivši imaginarne članove dobili smo redove za $\cos x$ i $\sin x$.

Dobivenu jednadžbu zovemo EULEROVA RELACIJA .

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Ta relacija pojednostavnjuje računanje s kompleksnim brojevima i kompleksni broj možemo pisati pomoću te relacije u obliku

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}$$

Poznato nam je, da se kod množenja kompleksnih brojeva moduli (apsolutne vrijednosti) pomnože a argumenti zbroje :

$$r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\cdot\rho(\cos\psi + i\cdot\sin\psi) = r\cdot\rho\left[\cos(\varphi+\psi) + i\cdot\sin(\varphi+\psi)\right]$$

Pomoću Eulerove relacije izlazi jednostavnije :

$$r\cdot e^{i\varphi}\cdot\rho\cdot e^{i\psi} = r\cdot\rho\cdot e^{i\cdot(\varphi+\psi)}$$

Analogno je kod dijeljenja : $\dfrac{r\cdot e^{i\varphi}}{\rho\cdot e^{i\psi}} = \dfrac{r}{\rho}\cdot e^{i\cdot(\varphi-\psi)}$

te kod potenciranja kompleksnih brojeva :

$$(r\cdot e^{i\varphi})^n = r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$$

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Navedena formula za potenciranje kompleksnih brojeva naziva se MOIVRE-ova relacija.

Kod radiciranja kompleksnih brojeva broj kompleksnih korijena jednak je eksponentu radiciranja, i ti se korijeni razlikuju samo po argumentu.

Naime, dva kompleksna broja jednakih apsolutnih vrijednosti, čiji se argumenti razlikuju za $2k\pi$ (t.j. za višekratnik od 2π, jer k označava pozitivan ili negativan prirodan broj), identični su, jer označavaju istu točku ravnine kompleksnih brojeva. Stoga tražeći n-ti korijen nekog kompleksnog broja moramo uzeti u obzir sva različita rješenja, koja dobijemo, ako argumentu tog kompleksnog broja redom pridajemo višekratnik od 2π. Lako ustanovimo, da dobijemo n različitih riješenja, no jednakih apsolutnih vrijednosti, jer je

$$\sqrt[n]{r\, e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

$i^i = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

$$\sqrt[n]{e^{i(\varphi+2\pi)}} = e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}$$

$$\sqrt[n]{e^{i(\varphi+2\cdot 2\pi)}} = e^{i\frac{\varphi+2\cdot 2\pi}{n}}$$

....

$$\sqrt[n]{e^{i(\varphi+(n-1)2\pi)}} = e^{i\frac{\varphi+(n-1)2\pi}{n}}$$

$$\sqrt[n]{e^{i(\varphi+n\cdot 2\pi)}} = e^{i\frac{\varphi+n\cdot 2\pi}{n}} = e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}+2\pi} = e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{e^{i\varphi}}$$

$$\sqrt[n]{e^{i[\varphi + (n+1)2\pi]}} = e^{i\,\frac{\varphi+(n+1)2\pi}{n}} = e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi}{n}+2\pi} = e^{i\,\frac{\varphi+2\pi}{n}} =$$

$$= \sqrt[n]{e^{i(\varphi+2\pi)}} \qquad \text{i t.d.}$$

Tražeći argumente korijena kompleksnog broja $r\cdot e^{i\varphi}$ mi smo redom argumentu radikanda dodavali višekratnik od 2π, t.j. općenito $2k\pi$, uvrštavajući redom $k = 0,1,2,3,\ldots n-1,n,n+1$. Za $k = n$ uvjerili smo se, da je rezultat jednak rezultatu za $k = 0$, a za $k = n + 1$ rezultat je bio jednak rezultatu za $k = 1$ i t.d. Postoji dakle n različitih rješenja.

Lako se možemo uvjeriti, da se argumenti tih svih rješenja razlikuju za jednake veličine, t.j.

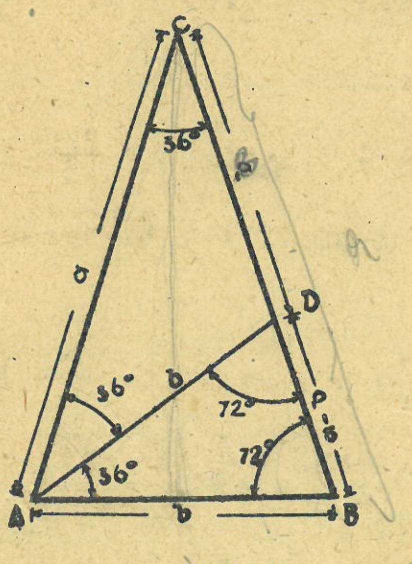
$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} - \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi}{n} \;,$$

dakle da razlika između argumenata korijena kompleksnih brojeva, čiji se argumenti razlikuju za 2π, iznosi $\frac{2\pi}{n}$,

U kompleksnoj ravnini n-ti korijen nekog kompleksnog broja (računajući tu i realne ili čisto imaginarne brojeve) daje niz točaka, koje su vrhovi pravilnog n-kuta upisanog kružnici, čije je središte u ishodištu i čiji je polumjer jednak n-tom korijenu apsolutne vrijednosti zadanog kompleksnog broja.
Primjer :

$$\sqrt[5]{-1} = x$$

Prije nego što prijeđemo na izračunavanje rješenja $\sqrt[5]{-1}$ potrebno je da izračunamo $\sin 36^0$, $\cos 36^0$, $\sin 72^0$ i $\cos 72^0$. Služimo se slijedećom konstrukcijom (slika 78)



SLIKA 78

AD = ~~A~~C D jer je trokut ADC istokračan zbog jednakih kuteva uz bazu AC. Isto tako AD = AB.

$$AC : AB = AB : BD$$

$$a:b = b:(a-b)$$

$$b^2 = a^2 - ab$$

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

$$b = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

$$= -\frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Zbog $b > a$

$$b = -\frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \doteq \sin 18^\circ$$

$$\sin 72^\circ = \sqrt{1-\left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]^2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{16-5+2\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}} = \cos 18^\circ$$

$$\sin 36^\circ = 2\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ = 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}-1) =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6-2\cdot\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos 36^\circ = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16-10+2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$$

Vratimo se sada našem primjeru.

$\sqrt[5]{-1} = x$ izračunat ćemo pomoću formule

$$\sqrt[5]{-1} = 1\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{5}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{5}\right)\right.$$

$$k = 0,1,2,3,4$$

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ + i\sin 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) + i\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$x_2 = \cos\frac{\pi+2\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{5} = -\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right) +$$

$$+ i\cdot\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos 72^\circ + i\cdot\sin 72^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + i\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{5} = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = -1$$

$$x_4 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{5} = \cos\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right) + i\cdot\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right) =$$

$$= -\cos\frac{2\pi}{5} - i\cdot\sin\frac{2\pi}{5} = -\cos 72^\circ - i\cdot\sin 72^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) -$$

$$- i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$x_5 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{9\pi}{5} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right) + i\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{5} - i\cdot\sin\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ - i\cdot\sin 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) -$$

$$- i\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Do tih rješenja može se doći i na drugi način.

$$\sqrt[5]{-1} = x \qquad x^5 = -1$$

$$x^5 + 1 = 0$$

$$(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \ /:x^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - (x + \frac{1}{x}) + 1 = 0 \qquad x + \frac{1}{x} = y$$

$$y^2 - 2 - y + 1 = 0$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + 1 - x \cdot (\frac{1 + \sqrt{5}}{2}) = 0$$

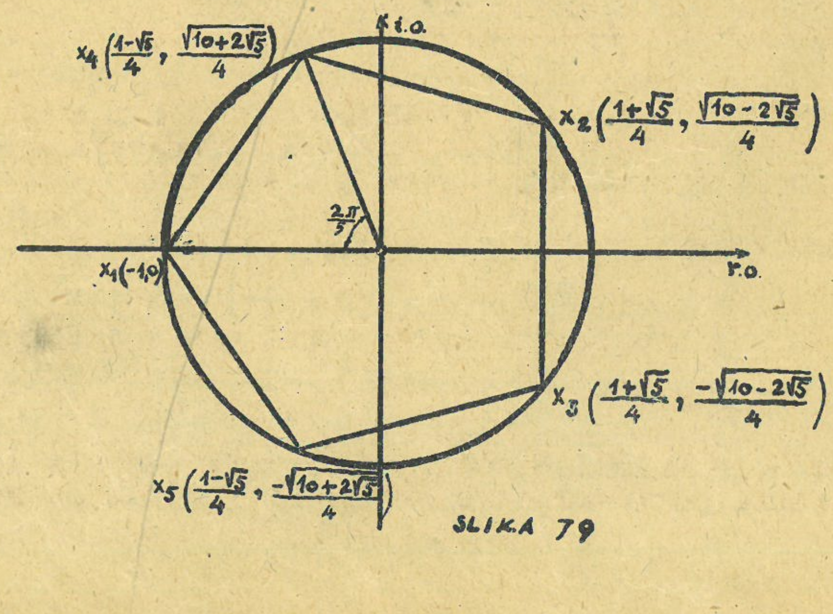
$$x^2 - x \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 16}{16}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \pm i \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$x_{4/5} = \frac{1-\sqrt{5} \pm \sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \pm i \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Slika 79 prikazuje položaj rješenja $\sqrt[5]{-1}$ u kompleksnoj ravnini.



SLIKA 79

Pomoću Eulerove relacije izvodimo relacije među trigonometrijskim i hiperbolnim funkcijama.

Eulerova relacija glasi : $e^{ix} = \cos x + i\cdot \sin x$

Uvrstimo li $-x$ mjesto x, izlazi: $e^{-ix} = \cos x - i\cdot \sin x$

Odbijajući odnosno zbrajajući ove dvije jednadžbe dobijemo, da je :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\cdot i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

i dalje :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = i\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

Znamo da je

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

te u izrazima dobivenim za $\sin x$ i $\cos x$ opažamo neku analogiju s hiperbolnim funkcijama. Direktnu relaciju među trigonometrijskim i hiperbolnim funkcijama dobijemo uvrštavanjem od ix mjesto x u eksponencijalne izraze za trigonometrijske i hiperbolne funkcije.

Tako je :

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2\cdot i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -i\cdot\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = i\cdot\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} =$$

$$= i\cdot \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{sh} i x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\cdot\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\cdot i} = i\cdot \sin x$$

$$\cos i x = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch} i x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin i x = i\cdot \operatorname{sh} x\ ; & \operatorname{sh} i x = i\cdot \sin x\ ; \\ \cos i x = \operatorname{ch} x\ ; & \operatorname{ch} i x = \cos x \end{array}}$$

Tangens i kotangens rastavimo na $\frac{\sin}{\cos}$ odnosno $\frac{\cos}{\sin}$ te izvodimo relacije :

$\operatorname{tg} ix = i\cdot \operatorname{th} x$; $\operatorname{th} ix = i\cdot \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} i x = - i\cdot \operatorname{cth} x$;

$\operatorname{cth} ix = - i\cdot \operatorname{ctg} x$

Pomoću ovih relacija možemo iz raznih formula za trigonometrijske funkcije izvesti odgovarajuće formule za hiperbolne funkcije :

tako iz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ uvrstivši ix izvodimo :

$$\sin^2(ix) + \cos^2(ix) = 1$$

$$(i\cdot sh\ x)^2 + ch^2 x = 1$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

Dalje : $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$$\sin(ix + iy) = \sin i(x+y) = \sin ix \cdot cox\ iy + \cos ix \cdot \sin iy$$

$$i\cdot sh(x + y) = i\cdot sh\ x\cdot ch\ y + i\cdot ch\ x\cdot sh\ y \quad /:i$$

$$sh(x + y) = sh\ x\cdot ch\ y + ch\ x\cdot sh\ y$$

Analogno izvodimo i formulu : $ch(x + y) = ch\ x\ ch\ y + sh\ x\cdot sh\ y$

iz formule $\cos(x + y) = \cos x\cdot \cos y - \sin x\cdot \sin y$

nadalje formule : $sh\ 2\ x = 2\cdot sh\ x\cdot ch\ x$

$$ch\ 2\ x = ch^2 x + sh^2 x$$

$$th(x + y) = \frac{th\ x + th\ y}{1 + th\ x\cdot th\ y}$$

i t.d.

T A Y L O R O V   R E D

Po Mac Laurinovom redu možemo ustanoviti, da je vrijednost funkcije za bilo koju vrijednost nezavisne varijable unutar intervala konvergencije reda potpuno određena, ako nam je poznata vrijednost funkcije i svih njenih derivacija u točki $x = o$.

Budući da točka $x = o$ nije nikakva osobita točka krivulje očito je, da analogno vrijedi i onda ako nam je poznata vrijednost funkcije i svih njenih derivacija za točku $x = a$.

Da dobijemo oblik reda za funkciju $f(x)$, kada su joj zadane derivacije za $x = a$, stavimo $x = a + h$, dakle $f(x) = f(a+h)$.

Smatramo li a čvrsto odabranim, bit će h promjenljiv, kad se x mijenja, pa je stoga $f(a + h)$ neka funkcija : od h , dakle

$$f(a + h) = \varphi(h)$$

Deriviramo li po h bilo koliko puta, dobivamo

$$f^{(n)}(a+h) = \varphi^{(n)}(h)$$

za svaki n. Ovo zato, jer funkciju $f(a+h)$ treba najprije derivirati po cijelom argumentu (a + h) i zatim pomnožiti sa derivacijom od a + h po h, koja je jednaka 1. Taj postupak ponovljen n puta, daje gornju jednakost. Sada napišemo Mac Laurinov red za funkciju $\varphi(h)$:

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{h}{1!}\cdot\varphi'(0) + \frac{h^2}{2!}\cdot\varphi''(0) + \ldots\ldots$$

i uvrstimo $\varphi(h) = f(a+h)$, $\varphi(0) = f(a)$; $\varphi'(0) = f'(a)$ i t.d.

Izlazi

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!}\cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(a) + \ldots$$

Time smo dobili traženi red, koji se zove Taylorov red.

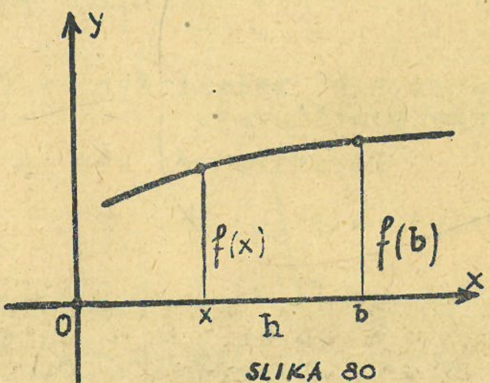
Ako mjesto a pišemo x, t.j. općenitu apscisu neke točke, u kojoj su zadane derivacije, dobijemo red

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!}\cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(x) + \ldots \qquad (78)$$

Ovaj red zove se Taylorov red. Mac Laurinov red je očito specijalan slučaj Taylorovog reda za $x = 0$.

Ako $x + h$ označimo sa b, tada je $h = b - x$, te Taylorov red možemo pisati u obliku :

$$f(b) = f(x) + \frac{b-x}{1!}\cdot f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f''(x) + \ldots\ldots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \ldots.$$



SLIKA 80

Kod primjene razvijanja funkcije u Taylorov (i Mac Laurinov) red javljaju se dva osnovna problema: 1. moramo ustanoviti, da li je red, u koji smo razvili neku funkciju, konvergentan, i koji je interval konvergencije i 2. ako smo funkciju aproksimirali, t.j. približno prikazali sa prvih n članova reda, želimo procijeniti, kolika je greška te aproksimacije, t.j. u kojim je granicama suma svih preostalih članova reda, koje nismo uzeli u obzir ili, drugim riječima, koliki je ostatak reda.

Oba problema rješavamo nalazeći matematički izraz za taj ostatak reda, t.j. za zbroj svih članova reda iza n-tog člana. Pomoću ostatka možemo ustanoviti, da li je red konvergentan, što će biti onda, ako ostatak R_n ima limes kad $n \to \infty$

Označimo li naime sa S_n sumu prvih n članova a sa R_n ostatak, onda je

$$f(x) = S_n + R_n$$

ili

$$S_n = f(x) - R_n$$

Ako R_n ima limes, kada n ide prema ∞, onda desna, dakle i lijeva strana ima limes i red je konvergentan, t.j. postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, koji zovemo sumom S toga reda. Vrijedi dakle

$$S = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n$$

ili

$$f(x) = S + \lim_{n\to\infty} R_n$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$ različit od nule, onda je dakle red konvergentan, ali nije jednak funkciji. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, red je konvergentan i jednak funkciji. Funkcija se dakle može onda razviti u Taylorov red, ako ostatak ima limes nula.

Da bi izračunali opći izraz za ostatak reda za funkciju $f(x)$, uvodimo pomoćnu funkciju $F(x)$, koja je jednaka sumi prvih n članova Taylorovog reda funkcije $f(x)$:

$f(b) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \ldots + \ldots + R_n$

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!}\cdot f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f''(x) + \frac{(b-x)^3}{3!} f'''(x) + \cdots\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(x).$$

Za $x = b$ izlazi $F(b) = f(b)$, jer se očito svi članovi osim prvoga poništavaju.

Derivirajući red za $F(x)$ dobijemo :

$$\begin{aligned} F'(x) = {} & f'(x) \\ & - f'(x) + (b-x) f''(x) \\ & - (b-x) f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) \\ & - \frac{3(b-x)^2}{3!} f'''(x) + \frac{(b-x)^3}{3!} f^{(IV)}(x) \\ & \text{-----------------} \\ & - \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Vidimo, da se u derivaciji $F'(x)$ svi članovi osim posljednjeg ukidaju, te je odatle

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x)$$

za $x = a$ izlazi:

$$F(a) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

Ako ostatak, t.j. zbroj svih članova od n dalje označimo sa R_n čitav red bi uz iste oznake $(a\,;\,b)$ glasio :

$$f(b)= f(a)+ \frac{(b-a)}{1!} f'(a)+ \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a)+\ldots+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)+ R_n$$

Odbijemo li red za $F(a)$ od reda za $f(b)$ dobijemo da je $f(b) - F(a) = R_n$ a budući da je $f(b) = F(b)$ onda je

$$R_n = F(b) - F(a)$$

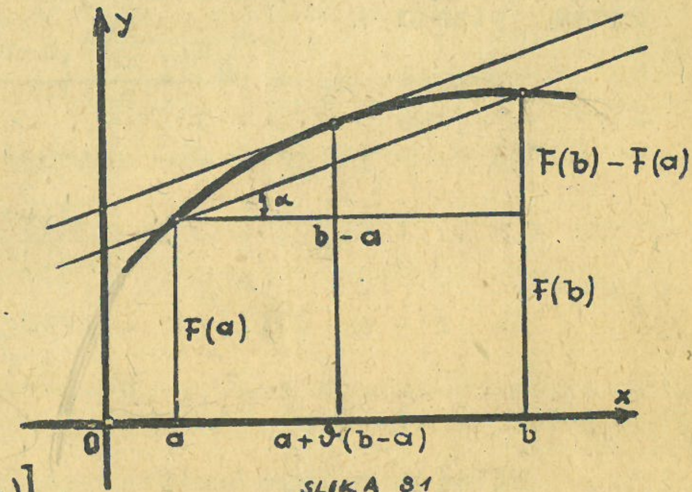
Znamo da je prema teoremu srednje vrijednosti koeficijent smjera sekante krivulje jednak prvoj derivaciji, t.j. koeficijentu smjera tangente na krivulju, u nekoj točki, čija se apscisa nalazi između apscise sjecišta sekante. Primijenimo taj teorem na krivulju $F(x)$. Uzmemo sekantu u točkama $a,F(a)$, $b,F(b)$ (slika 81) i dobijemo :

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'[a + \vartheta(b-a)]$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

i dalje :

$$R_n = F(b) - F(a) = (b-a)\cdot F'[a + \vartheta(b - a)]$$



SLIKA 81

Vidjeli smo da je

$$F'(x) = \frac{(b - x)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(x)$$

Mi tražimo $F'[a+ \vartheta(b-a)]$ te mjesto x uvrstimo $a + \vartheta(b - a)$

$$F'[a + \vartheta(b-a)] = \frac{\{b - [a + \vartheta(b - a)]\}^{n-1}}{(n - 1)!} \cdot f^{(n)}[a + \vartheta(b - a)]$$

Uvrstimo derivaciju u izraz za R_n i dobijemo, da je

$$R_n = F(b) - F(a) = \frac{(b-a)^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n - 1)!} \cdot f^{(n)}[a + \vartheta(b - a)] \quad (79)$$

Ovaj oblik ostatka zove se Cauchy-ev ostatak. Nazovemo li $a = x$; $b = x + h$; $b - a = h$

potpuni Taylorov red glasi :

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!}\cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(x) +\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)+R_n$$

gdje je

$$R_n = h^n \frac{(1 -\vartheta)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(x + \vartheta h) \qquad \text{(Cauchy)}$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ red je konvergentan i jednak $f(x + h)$.

Ako primjenimo na $F(b) - F(a)$ poopćeni teorem srednje vrijednosti, dobit ćemo općenitiji oblik ostatka.

Poopćeni oblik teorema srednje vrijednosti za F(b) - F(a) glasi :

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{r(1-\vartheta)^{r-1}} \cdot (b-a) \cdot F'\left[a + \vartheta(b-a)\right]$$

uvrštavanjem već gore izvedene vrijednosti za $F'\left[a + \vartheta(b-a)\right]$ dobijemo općenitiji izraz za ostatak :

$$F(b) - F(a) = R_n = \frac{(b-a)^n \cdot (1-\vartheta)^{n-r}}{r \cdot (n-1)!} \cdot f^{(n)}\left[a + \vartheta(b-a)\right]$$

Ovaj oblik ostatka zove se Schlömilchov ostatak, te ga možemo pisati i :

$$R_n = \frac{h^n(1-\vartheta)^{n-r}}{r \cdot (n-1)!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h) \tag{80}$$

Za $r = 1$ dobijemo već prije izvedeni Cauchy-ev ostatak:

$$R_n = h^n \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h)$$

Za $r = n$ dobijemo Lagrange-ov oblik ostatka :

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h) \tag{81}$$

Uz iste ostale uvjete veličina ϑ je različita u sva tri oblika ostatka.

Funkcije često u praksi aproksimiramo s nekoliko prvih članova Taylorovog reda, jer ostali članovi, osobito kada red naglo konvergira, nemaju praktičnog značenja. Grješku, koju time činimo, procjenjujemo pomoću ostatka.

Griješku ne možemo točno izračunati zbog nepoznate vrijednosti ϑ . No budući da znamo, da je $0 < \vartheta < 1$, možemo izračunati najveću moguću griješku.

Ako smo neku funkciju $f(x)$ aproksimirali s prva tri člana, tada smo umjesto $f(x) = s_3 + R_3$ uzeli smo $f(x) = s_3$, te je griješka, koju smo počinili jednaka R_3 .

Kod apsolutno padajućeg reda, koji alternira, t.j. čiji članovi stalno mijenjaju predznak i po apsolutnoj vrijednosti postaju sve manji, procjena griješke se pojednostavnjuje : iz samog grafičkog prikaza takvog reda (slika 82) vidimo da je griješka uvijek po apsolutnoj vrijednosti manja od prvog zanemarenog člana reda te je istog predznaka kao taj član :

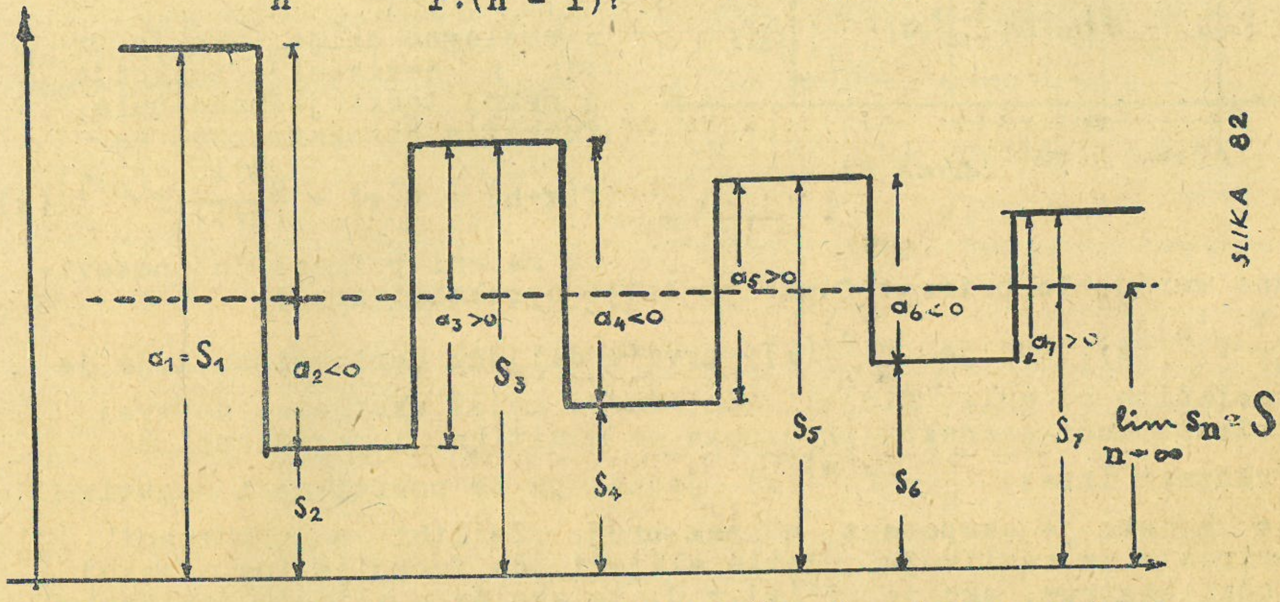
$$|R_n| < |a_{n+1}| , \qquad \operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} a_{n+1}$$

(čitaj signum R_n = signum a_{n+1}. Signum znači znak t.j. predznak).

Budući da je Mac Laurinov red samo specijalan slučaj Taylorovog reda, to iz formule za ostatak Taylorovog reda lako dobivamo odgovarajuće formule za Mac Laurinov red.

Stavimo $x = o$ i pišemo x mjesto h, pa dobijemo na pr. Schlömilchov ostatak za Mac Laurinov red :

$$R_n = \frac{x^n(1 - \vartheta)^{n-r}}{r.(n - 1)!} \cdot f^{(n)}(\vartheta x)$$



SLIKA 82

odatle za $r = 1$ Cauchy-ev ostatak Mac Laurinovog reda :

$$R_n = \frac{x^n (1 - \vartheta)^{n-1}}{(n - 1)!} \cdot f^{(n)}(\vartheta x)$$

i za $r = n$ Langrangeov ostatak

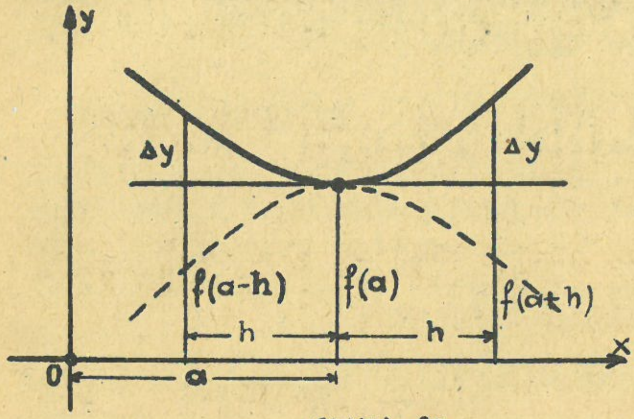
$$R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\vartheta x)$$ Binomni red

15. Maksima i minima

Potpuna diskusija ekstremnih vrijednosti funkcije provodimo pomoću Taylorovog reda. Kažemo, da funkcija u nekoj točki ima ekstrem, ako su vrijednosti funkcije u neposrednoj okolini te točke veće (minimum) ili manje (maksimum) od vrijednosti u zadanoj točki.

Drugim riječima, funkcija ima ekstrem u okolišu točke (slika 83), gdje je $y' = 0$, t.j. $f'(a) = 0$, ako za po apsolutnoj vrijednosti malene diferencije h, pozitivne ili negativne, poprima priraste istog predznaka.

Za vrlo maleni h funkciju možemo aproksimirati prvim članom Taylorovog reda iza $f(x)$, koji je različit od nule, jer su ostali članovi malene veličine višega reda, t.j. iščezavajući maleni prema prvim članovima, kad h ide prema nuli.



SLIKA 83

$$f(x+h) \doteq f(x) + \frac{h}{1!} \cdot f'(x)$$

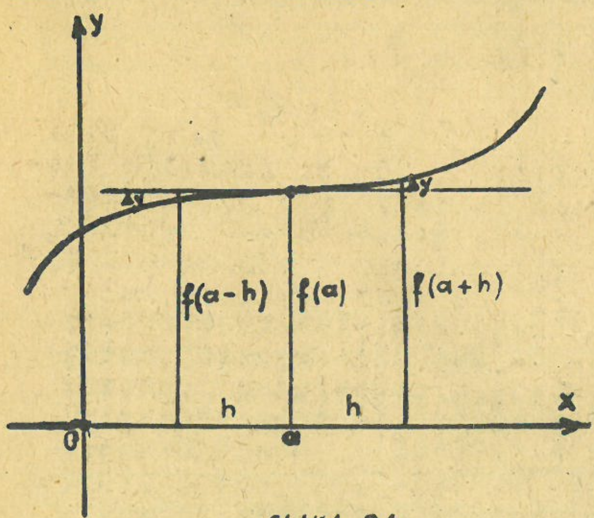
Ako je $f'(x) = 0$, što je prvi uvjet ekstrema, tada funkciju aproksimiramo sa

$$f(x+h) \doteq f(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x)$$

i analogno dalje, ako je prvih n derivacija funkcije u nekoj točki jednako nula, funkciju aproksimiramo sa

$$f(x+h) \doteq f(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)$$

Za maleni prirast h nezavisne varijable prirast funkcije dakle aproksimiramo sa $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$, kad je $f^{(n)}(x)$ prva u slijedu derivacija, koja je različita od nule. Vidjeli smo, da je uvjet ekstrema, da ovaj prirast bude jednakog predznaka za pozitivne i negativne h. Predznak izraza $\frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x)$ jednak je za pozitivne i negativne h, ako je eksponent n tak broj. Za lihi n predznaci prirasta se razlikuju. Odatle slijedi, da funkcija ima u nekoj točki ekstrem, ako je $f'(x) = 0$, te ako je u slijedu derivacija prva derivacija koja je različita od nule,, takoga reda. Ako je naprotiv lihog reda, tada funkcija u toj točki ima infleksiju ili obratište (slika 84).



SLIKA 84

Funkcija će imati maksimum, ako su za pozitivni i negativni h prirasti negativni, a minimum, ako su u oba slučaja pozitivni (slika 83). Predznak tih prirasta

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^{2r}}{(2r)!} f^{(2r)}(a)$$

ovisit će o derivaciji $f^{(2r)}(a)$ jer je, budući da je eksponent pozitivan i tak, $\frac{h^{2r}}{(2r)!}$ uvijek pozitivan, t.j.ako je $f^{(2r)}(a) > 0$ prirast će za $+h$ i $-h$ biti pozitivan, te će funkcije u točki $[a, f(a)]$ imati minimum, a ako je $f^{(2r)}(a) < 0$ prirast će u oba slučaja biti negativan, te će funkcija u toj točki imati maksimum.

Analogno izvodimo opći uvjet, da funkcija u nekoj točki ima infleksiju. Prvi uvjet je, da bude $f''(x) = 0$, bez obzira na vrijednost $f'(x)$, jer tražimo općenito točke infleksije, a ne samo one, u kojima je tangenta horizontalna, t.j. gdje je $f'(x) = 0$.

Funkcija u nekoj točki $[a, f(a)]$ ima infleksiju, ako je $f''(x) = 0$, te ako je prva u slijedu derivacija, $f^{(n)}(a)$, koja je različita od nule, lihog reda. $f^{(2n+1)}(a) > 0$

Ako je ta derivacija veća od nule, onda je krivulja desno od točke infleksije iznad tangente, a lijevo ispod, jer je prirast iznad tangente, koji je približno jednak

$$\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+1)}(a),$$ za pozitivni h

pozitivan, a za negativni h negativan. Naprotiv, ako je $f^{(2n+1)}(a) < 0$, tada je krivulja desno od točke infleksije ispod tangente u točki infleksije a lijevo iznad.

Egzaktnije izvodimo poučak o ekstremima funkcije, ako se mjesto prvim članom različitim od nule iza $f(x)$ u Taylorovom redu, služimo ostatkom reda R_n, jer time eliminiramo nepotpunost izvoda nastalu zanemarivanjem preostalih članova. Upotrebljavamo za taj izvod Lagrangerov oblik ostatka.

Ako je $f'(x) = 0$ za neku vrijednost od $x = a$, te ako su sve derivacije do neke derivacije $f^{(n)}(a)$ jednake nuli (t.j. ako je $f^{(n)}(a)$ prva u slijedu derivacija različita od nule), tada funkciju možemo pisati u obliku :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a) + \ldots\ldots$$

$$= f(a) + R_n = f(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta h)$$

Prirast funkcije $f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta h)$ mora biti istog predznaka za pozitivni i negativni h, da bi funkcija imala ekstrem. Taj uvjet ispunjen je samo za taki n, jer derivacija $f^{(n)}(a + \vartheta h)$ za koju smo kazali, da je za $h = 0$ različita od nule, ne mijenja zbog svoje neprekinutosti predznak u intervalu $(a - h, a + h)$ ako je samo $|h|$ odabran dovoljno malen. Vidi se ovdje, da za primjenljivost ovog kriterija treba pretpostaviti, da je n-ta derivacija u toj točki neprekinuta funkcija. Ako se funkcija $f(x)$ u toj točki može razviti u Taylorov red (ne samo do n-tog člana), onda je taj uvjet ispunjen, jer onda funkcija $f(x)$ ima derivacije bilo kojega reda. Postoji dakle i derivacija $(n + 1)$-toga reda, a to znači, da je $f^{(n)}(x)$ u toj točki derivabilna funkcija, dakle i neprekinuta.

Analogno se vidi, da je za lihi $\underline{n}$ razlika $f(a+h) - f(a) =$ $= \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(a + \vartheta h)$ same funkcije i ordinate tangente, zbog lihog eksponenta, različitog predznaka za pozitivni, odnosno negativni h. Za $f^{(2n+1)}(a) > 0$ krivulja je desno od točke $x=a$

iznad tangente, a lijevo ispod, za $f^{(2n+1)}(a) < 0$ obrnuto.

Da je $\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+1)}(a + \vartheta h)$ zaista razlika ordinata same krivulje $y = f(x)$ i njezine tangente u točki $[a, f(a)]$ vidi se ovako.

Cijela funkcija u okolici točke infleksije dana je izrazom

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+1)}(a + \vartheta h)$$

Pomaknemo li koordinatni sustav paralelno tako, da mu ishodište dođe u točku $(a,0)$, možemo h smatrati apscisom, t.j. neovisnom varijablom. Jednadžba tangente na krivulji u točki $[a, f(a)]$ onda glasi

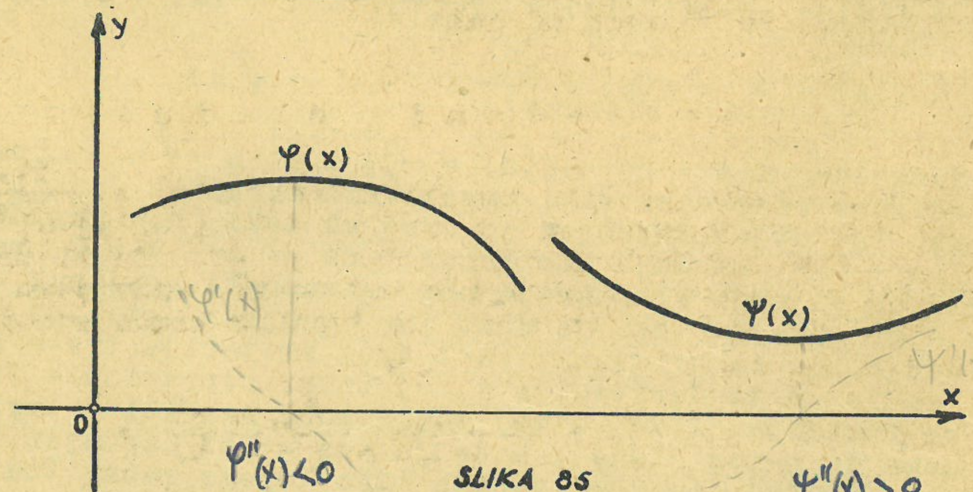
$$y = f'(a) \cdot h + f(a)$$

Vidi se dakle, da je

$$f(a + h) - y = \frac{h^{2n+1}}{(2n + 1)!} \cdot f^{(2n + 1)}(a + \vartheta h)$$

što smo htjeli pokazati.

O predznaku druge derivacije ovisi konveksnost i konkavnost krivulje. Za krivulju $y = \varphi(x)$ (slika 85) kažemo da je konkavna (udubljena) prema dolje (ili konveksna - ispupčena prema gore). Protivno za krivulju $y = \psi(x)$ velimo da konveksna prema dolje i konkavna prema gore.



SLIKA 85

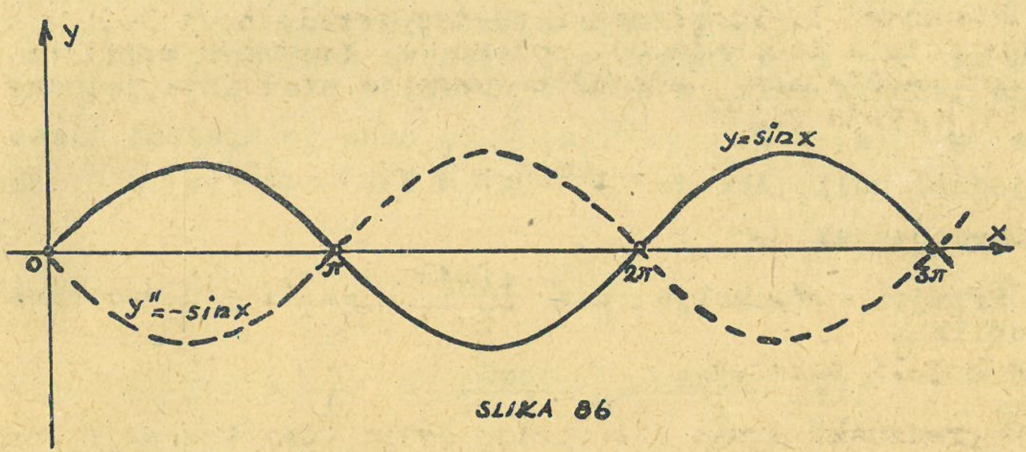
Lako opažamo, da prve derivacije funkcija $y = \varphi(x)$ poprima sve manje vrijednosti, kada x raste, t.j. tangenta na tu krivulju ima sve manji gradijent, najprije pozitivan, zatim jednak nuli pa negativan, što znači da je $y' = \varphi'(x)$ padajuća funkcija od x. Derivacija padajuće funkcije je negativna. Dakle krivulja konkavna prema dolje u nekom intervalu imat će u istom intervalu negativnu drugu derivaciju *). Obratno, ako

*) U nekim točkama može biti i jednaka nuli.

je $y'' = f''(x)$ u nekom intervalu manji od nule, u istom je intervalu krivulja konkavna prema dolje. Analogno pokazujemo da je krivulja konveksna prema dolje u intervalu, u kojem je druga derivacija funkcije pozitivna, t.j. veća od nule.

Primjer :

$$y = \sin x \qquad \text{(slika 86)}$$
$$y'' = -\sin x$$



SLIKA 86

U intervalu $(0 , \pi)$ krivulja $y = \sin x$ konkavna je prema dolje. U istom intervalu je druga derivacija $y'' = -\sin x$ negativna. U intervalu $(\pi , 2\pi)$ krivulja je konveksna prema dolje, a druga derivacija je veća od nule.

16. Neodređeni oblici

Ako je neka funkcija dana kao kvocijent $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, te ako je za neku vrijednost $x = a$ $\varphi(a) = 0$ i $\psi(a) = 0$, tada $f(x)$ poprima neodređeni oblik $f(a) = \frac{0}{0}$. Da bi prikladno odredili vrijednost funkcije u toj točki, razvijemo $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ u Taylorov red po $(a + h)$ te tražimo limes kvocijenta $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ kada $x \to a$, t.j. kada $h \to 0$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a + h)}{\psi(a + h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a) + \frac{h}{1!} \cdot \varphi'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot \varphi''(a) + \ldots}{\psi(a) + \frac{h}{1!} \cdot \psi'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot \psi''(a) + \ldots}$$

$\varphi(a) = \psi(a) = 0$. Razlomak kratimo sa h te dobijemo dalje :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi'(a) + \frac{h}{1!} \cdot \varphi''(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot \varphi'''(a) + \ldots}{\psi'(a) + \frac{h}{1!} \cdot \psi''(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot \psi'''(a) + \ldots} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

Dakle za $\varphi(a) = \psi(a) = 0 \quad \lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$
Ako je i $\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$ mogli bi sa funkcijama razvijenim u red ponovo kratiti sa h te bi dobili, da je

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)} \quad \text{i t.d.} \qquad (82)$$

To dakle znači, da je

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \dots \lim_{x \to a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$$

(de l'Hospitalovo pravilo)
ako su za $x = a$ i funkcije i njihove derivacije do $(n-1)$-toga reda jednake nuli, a n-te derivacije nisu obje jednake nuli. Ako je $\varphi^{(n)}(a) = 0$. $\psi^{(n)}(a) \neq 0$, onda je traženi limes dakako jednak nuli. Ako je $\psi^{(n)}(a) = 0$, $\varphi^{(n)}(a) \neq 0$, onda je taj limes jednak ∞.

Primjer : funkcija $y = \frac{\sin x}{x}$ sa $x = 0$ poprima neodređeni oblik $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1 .$$

Ako funkcija ima oblik kvocijenta $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, koji za ~~svaku~~ neku

vrijednost $x = a$ poprima neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ ($\varphi(a) = \infty$ $\psi(a) = \infty$), tada je i ovdje granična vrijednost

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

Da bi to dokazali, napišimo najprije funkciju u obliku takvog razlomka, da za $x = a$ poprimi neodređeni oblik $\frac{0}{0}$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

Derivacije brojnika i nazivnika dobivenog dvojnog razlomka, na koji možemo primijeniti poučak za neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ jesu

$$\left(\frac{1}{\psi(x)} \right)' = - \frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2} \qquad \left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)' = - \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$$

Označimo li $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = A$, to možemo pisati :

$$A = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{-\dfrac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}}{-\dfrac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}} = \lim_{x\to a}\frac{\psi'(x)\cdot[\varphi(x)]^2}{\varphi'(x)\cdot[\psi(x)]^2} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}\cdot\left[\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^2 =$$

$$= A^2\cdot\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \quad ;$$

$$A = A^2\cdot\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}\ , \text{ dakle } \quad A = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}\ , \quad \text{t.j.}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \qquad \text{ako je } \varphi(a)=\infty \quad \text{i} \quad \psi(a)=\infty$$

Ako i $\dfrac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ ima neodređeni oblik $\dfrac{\infty}{\infty}$ ili $\dfrac{0}{0}$, tada ovaj postupak daje samo $A = A^2\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$; $A = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$

Primijenivši na ovaj limes isti postupak, dobivamo, da je

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)} \qquad \text{i t.d.} \qquad (83)$$

·∞ Ako funkcija $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ poprima za $x = a$ neodređeni oblik $0\cdot\infty$, t.j. ako je $\varphi(a) = 0$ i $\psi(a) = \infty$, tada funkciju napišemo u obliku $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$ te rješavamo kao neodređeni oblik $\dfrac{0}{0}$ ili u obliku $\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, gdje poprima oblik $\dfrac{\infty}{\infty}$, koji rješavamo na isti način. Upotrebljavamo metodu, kod koje ima manje računanja i za koju se vidi, da vodi do cilja.

$\infty - \infty$ Ako funkcija $\varphi(x) - \psi(x)$ za $x = a$ poprima neodređeni oblik $\infty - \infty$, t.j. ako $\varphi(x) = \infty$ i $\psi(x) = \infty$, tada tu graničnu vrijednost nalazimo napisavši funkciju u obliku

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\dfrac{1}{\psi(x)} - \dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)\cdot\psi(x)}} \quad \text{t.j. u obliku}$$

razlomka koji za $x = a$ poprima neodređeni oblik $\dfrac{0}{0}$, čiju vrijednost određujemo već na poznati način.

Ako su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ već same u obliku razlomka, na pr.

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \qquad \text{i} \qquad \psi(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}\ ,$$

gdje je $\varphi_2(a) = 0$ i $\psi_2(a) = 0$ a $\varphi_1(a)$ i $\psi_1(a)$ konačan, bit će zgodnije dovesti ta dva razlomka na isti nazivnik:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} - \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)} =$$

$$= \frac{\varphi_1(x)\cdot\psi_2(x) - \psi_1(x)\cdot\varphi_2(x)}{\varphi_2(x)\cdot\psi_2(x)}$$

~~I ovako~~ je dobiven oblik $\frac{0}{0}$.

$0^0, \infty^0, 1^\infty$

Granična vrijednost funkcija, koje za neku vrijednost od x poprimaju neodređeni oblik 0^0, ∞^0, 1^∞, određujemo tako, da funkcije logaritmiramo, čime dobivamo jedan od već raspravljenih neodređenih oblika, odredimo graničnu vrijednost logaritma funkcije, te antilogaritmirajući odredimo limes funkcije.

Primjer: funkcija $y = (x - a)^{x - a}$ za $x = a$ poprima neodređeni oblik 0^0 . Logaritmirajući izlazi $\ln y = (x - a)\cdot \ln (x - a)$ što možemo napisati i

$$\ln y = \frac{\ln(x - a)}{\frac{1}{(x - a)}}$$

, koji izraz za $x = a$ poprima neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ te je prema tome

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{(x - a)}}{\frac{-1}{(x - a)^2}} = -\lim_{x\to a} (x - a) = 0$$

t.j. za $x = a$ $\ln y = 0$. Antilogaritmirajući dobijemo da je za $x = a$ $y = e^0 = 1$.

Često je kod oblika $\frac{0}{0}$ zgodnije brojnik i nazivnik zaista razviti u Taylorov red, osobito onda, kad se radi o jednostavnim funkcijama, gdje taj red znamo odmah napisati.

17. Jednadžba tangente i normale

Jednadžba pravca kroz točku (x_0 , y_0) s koeficijentom smjera a glasi

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Tangenta na krivulju $y = f(x)$ je pravac, koji prolazi diralištem $[x_0 , y_0 = f(x_0)]$, s koeficijentom smjera $a = f'(x_0) = y_0'$, t.j. koeficijent smjera je jednak derivaciji $f'(x)$. Jednadžba tangente dakle glasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad (84)$$

Normala krivulje je pravac kroz diralište, okomit na tangentu. Koeficijent smjera je dakle negativno recipročan koeficijentu smjera tangente i jednadžba normale glasi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) \tag{85}$$

Kako te jednadžbe glase, ako je funkcija zadana u implicitnom obliku $F(x,y) = 0$, vidjet će se kasnije. Ako je krivulja zadana u parametarskom obliku

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

bit će

$$dx = \varphi'(t)dt$$
$$dy = \psi'(t)dt,$$

dakle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Ako diralište odgovara vrijednosti t_0 parametra, dobijemo kao jednadžbu tangente

$$y - \psi(t_0) = +\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\cdot\left[x - \varphi(t_0)\right] \tag{86}$$

~~ili~~ odnosno normale:

$$\left[x - \varphi(t_0)\right]\cdot\varphi'(t_0) + \left[y - \psi(t_0)\right]\cdot\psi'(t_0) = 0$$

Primjeri :

a) parabola $y = x^2$ jednadžba tangente u točki (x_0, x_0^2)

$y' = 2x$ glasi

$$y - x_0^2 = 2\cdot x_0(x - x_0) \quad ,$$

jednadžba normale

$$y - x_0^2 = -\frac{1}{2\cdot x_0}(x - x_0)$$

b) kružnica $x = \cos t$ $\quad dx = -\sin t\cdot dt$

$y = \sin t$ $\quad dy = \cos t\cdot dt$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t$

Jednadžba tangente :

$$y - \sin t_0 = -\operatorname{ctg} t_0(x - \cos t_0),$$

Jednadžba normale

$$y - \sin t_0 = \operatorname{tg} t_0(x - \cos t_0)$$

Eliminacija parametra (kvadriranjem i zbrajanjem jednadžbi $x = \cos t$, $y = \sin t$) daje

$$x^2 + y^2 = 1$$

dakle jednadžbu kružnice s polumjerom 1.

Uvrštenje $x_o = \cos t_o$, $y_o = \sin t_o$ u jednadžbu tangente daje

$$y - y_o = -\frac{x_o}{y_o}(x - x_o)$$

ili

$$y \cdot y_o - y_o^2 = -x_o x + x^2 ,$$

$$x \cdot x_o + y \cdot y_o = x_o^2 + y_o^2 ,$$

a jer je

$$x_o^2 + y_o^2 = \cos^2 t_o + \sin^2 t_o = 1, \quad \text{izlazi}$$

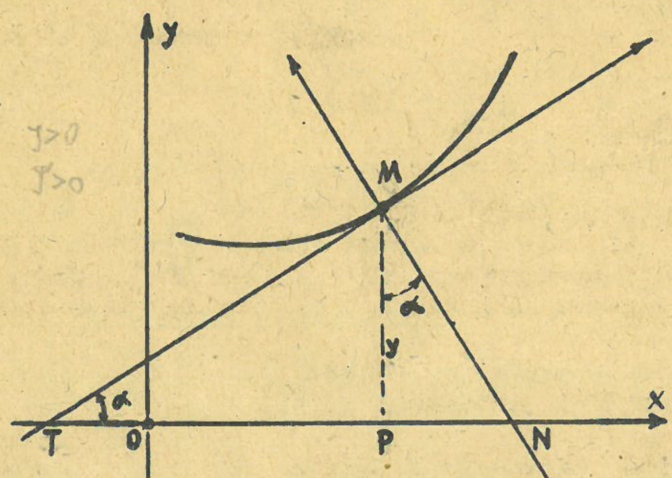
$$x \cdot x_o + y \cdot y_o = 1 ,$$

što je poznata jednadžba tangente na tu kružnicu.

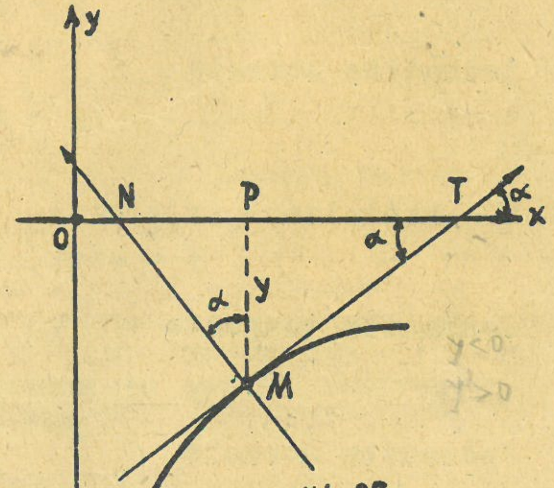
Tangenta, normala, suptangenta, subnormala

Tangenti krivulje pridat ćemo smjer, kojim se miče točka na tangenti, kad apscisa te točke raste. (Na slikama je taj smjer označen strelicom). Normala dobiva smjer, koji izlazi vrtnjom tangente za 90° u pozitivnom smislu vrtnje (obrnuto od kazaljke na satu).

Prema tome, da li u točki koju promatramo, $y \gtrless 0$, $y' \gtrless 0$ razlikujemo četiri slučaja, prikazana u slikama 87, 88, 89, 90. Pod "duljinom tangente" T_d misli se duljina dužine $\boxed{MT}$, koju računamo pozitivno, ako se smjer od M prema T podudara sa smjerom tangente, inače negativno.



SLIKA 87



SLIKA 88

Iz trokuta TPM (slika 87) izlazi

$$MT = \frac{y}{\sin\alpha} = y \cdot \frac{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}{tg\alpha}$$

$$= y \cdot \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'}$$

dakle obzirom na predznak duljine tangente

$$T_d = - \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

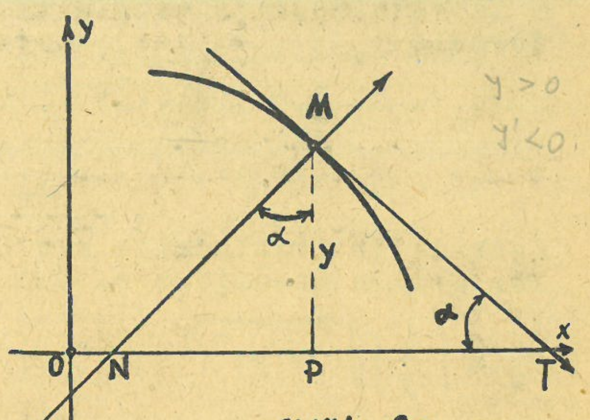
Predznak izlazi ispravno u sva četiri slučaja, kako se lako uvjerimo.

Analogno je "duljina normale" N_d duljina dužine $\boxed{MN}$, s pozitivnim predznakom, ako se smjer od M prema N podudara sa smjerom normale, inače s negativnim.

Iz trokuta MPN (slika 87) izlazi

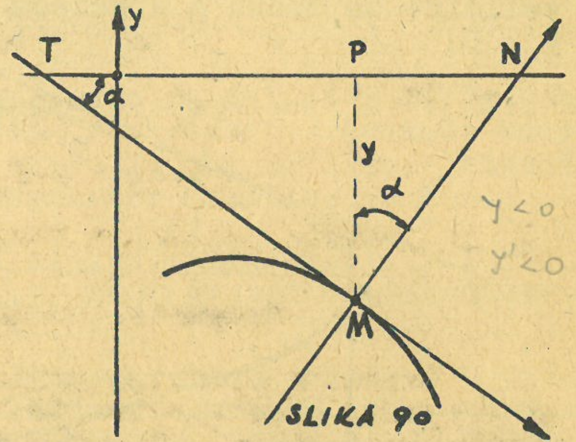
$$MN = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1 + tg^2\alpha}$$

$$= y\sqrt{1 + y'^2}, \quad \text{dakle} \quad N_d = - y\sqrt{1 + y'^2}$$



SLIKA 89

y > 0
y' < 0



SLIKA 90

y < 0
y' < 0

gdje opet predznak u sva 4 slučaja izlazi u skladu s gornjim propisom.

Suptangenta S_t je duljina dužine PT (slika 87), koju računamo pozitivno, ako je smjer od P prema T pozitivni smjer osi X , inače negativno. Iz trokuta TPM izlazi

$$PT = y \cdot ctg\alpha = \frac{y}{y'}$$, dakle, uzevši u obzir

traženi predznak

$$S_t = - \frac{y}{y'}$$

koji opet u sva četiri slučaja izlazi ispravno.

Subnormala S_n je duljina dužine PN (slika 87), koju računamo pozitivno, ako se smjer od P prema N podudara s pozitivnim smjerom osi x.

Iz trokuta PNM (slika 87) izlazi

$$PN = y \cdot tg\alpha = y \cdot y'$$, dakle

$$S_n = y \cdot y'$$,

s ispravnim predznakom u sva četiri slučaja. Dobili smo dakle formule

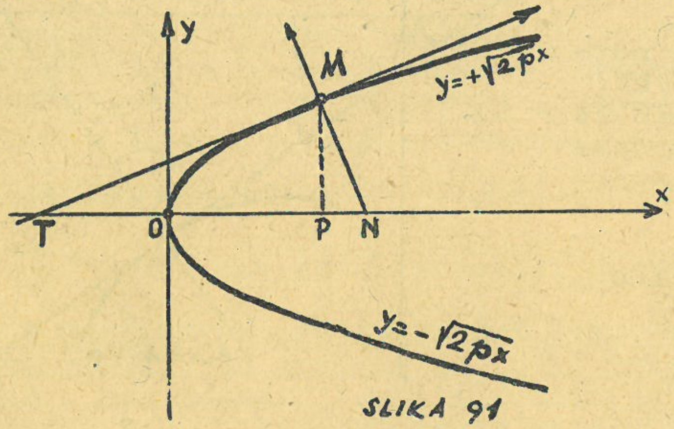
$$T_d = -\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\quad,\quad N_d = -y\sqrt{1+y'^2}\quad,\quad S_t = -\frac{y}{y'}\quad,$$

$$S_n = y\cdot y' \tag{87}$$

Katkada je prikladnije sve te veličine računati kao pozitivne, bez obzira na smjerove. Onda se stavlja

$$T_d = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}\ ,\quad N_d = |y|\sqrt{1+y'^2},\quad S_t = \left|\frac{y}{y'}\right|\ ,\quad S_n = |y\cdot y'|$$

Primjer : za parabolu $y^2 = 2px$ (slika 91) neka se odrede sve 4 veličine za točku s apscisom x_0 i pozitivnom ordinatom ($y > 0$, $y' > 0$)



SLIKA 91

$$y^2 = +2px$$

$$y' = +\sqrt{\frac{p}{2x}} \qquad \text{dakle}$$

$$T_d = -\sqrt{2px_0 + 4x_0^2}$$

$$N_d = -\sqrt{2px_0 + p^2}$$

$$S_t = -\ 2\cdot x_0$$

$$S_n = p$$

Vidi se, da je subnormala ovako postavljene parabole konstantna i jednaka parametru.

18. Asimptote krivulja

Ako krivulja ima neku svoju granu, koja seže u neizmjernost, i ako slijedimo točku, koja po toj grani odmiče, onda se "asimptota" zove onaj pravac, kojemu se ta točka neograničeno približava, ukoliko dakako takav pravac postoji (na pr. kod hiperbole postoji, kod parabole ne postoji). Udaljenost te točke od toga pravca treba dakle da postane po volji malena, ako je točka dovoljno daleko odmakla.

Asimptota može, ali ne mora biti tangenta na neizmjerno daleku točku krivulje.

Uvjet za to je taj, da ne samo udaljenost točke od asimptote konvergira prema nuli, kada točka odmiče u neizmjernost, nego da osim toga derivacija u toj točki (tangens smjera tangente) konvergira prema tangensu smjera asimptote.

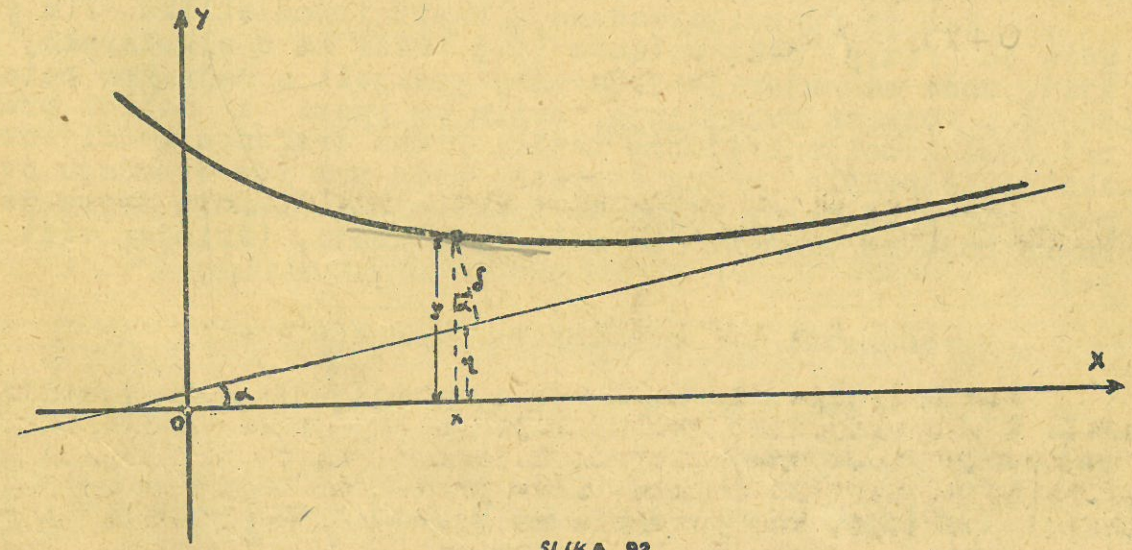
Kod algebarskih funkcija asimptota je uvijek i tangenta, što kod mnogih transcedentnih , na pr. $y = \frac{1}{x}\cdot\sin x^2$ nije tako.

Lako se uvjerimo, da je u tom primjeru os x asimptota krivulje, jer ordinata funkcije postaje neizmjerno malena, kada x postaje sve veći. Derivacija funkcije jest $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin x^2 + 2 \cdot \cos x^2$, te vidimo da derivacija oscilira otprilike između -2 i $+2$ kad $x \to \infty$ tako da prema tome ova asimptota nije tangenta krivulje.

Ako je asimptota paralelna s osi y, onda je jasno, da sa sve većim ordinatama točka na krivulji dolazi sve bliže asimptoti, da će dakle funkcija za samu apscisu te asimptote postati neizmjerna. Te se asimptote stoga nađu tako, da se traže točke, u kojima funkcija $y = f(x)$ postane neizmjerna. Ako je ona zadana kao razlomak $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, stavit će se nazivnik jednak nuli i potražit će se pripadna rješenja. Pri tome treba utvrditi, da se uvrste i brojnik ne poništava za dotične nultočke nazivnika. U protivnom treba ispitati neodređeni oblik 0/0

Neka općenito jednadžba asimptote funkcije $y = f(x)$ bude pravac $\eta = ax + b$, gdje smo sa η označili ordinate asimptote dok sa y mislimo ordinate krivulje. Da dobijemo jednadžbu asimptote, treba odrediti dvije nepoznate veličine a i b.

Ako je $a = \operatorname{tg}\alpha$ tangens smjera asimptote (slika 92), onda je udaljenost neke točke (x,y) na krivulji od asimptote



SLIKA 92

jednaka $\delta = (y - \eta)\cos\alpha$. Budući da je $\cos\alpha$ konstanta, to je dakle uvjet, da δ ide prema nuli, kada $x \to \infty$ (i prema tome točka odlazi u neizmjernost) istovjetan s uvjetom

$$\lim_{x \to \infty} (y - \eta) = 0, \quad \text{a iz} \quad y = f(x) \quad \text{i} \quad \eta = ax + b$$

slijedi dalje :

$$\lim_{x \to \infty} (y - \eta) = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$$

Ako je taj limes jednak nuli, tada je očito pogotovo jednak nuli i limes istog izraza podijeljenog sa x :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \left(a + \frac{b}{x}\right)\right] = 0,$$

a jer je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$ za svaki konačni b, slijedi dalje :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0 \quad \text{i odatle}$$

$$\boxed{a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}} \tag{88}$$

Time smo odredili nepoznatu veličinu a, koeficijent smjera eventualne asimptote.

Ako $f(x)$ ostaje konačan, kada $x\to\infty$, onda je dakako $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ i asimptota je paralelna s osi x. Ako i $f(x)$ postaje neizmjerno velik, onda - ukoliko se sa x ne da kratiti - dobijemo neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, koji treba izračunati prema prije izloženim metodama.

Kad je funkcija zadana u implicitnom obliku $F(x,y) = 0$ gdje je $F(x,y)$ neki polinom (t.j. radi se o algebarskoj krivulji), onda se najprije jednadžba podijeli s najvišom potencijom od x , koja se pojavljuje. Zatim se pusti x težiti prema ∞ pri čemu kvocijent $\frac{y}{x}$ mora težiti prema traženom kvocijentu a. Ako je jednadžba n-tog stepena, onda pri tom otpadaju svi članovi nižeg od n-tog stepena, a preostali članovi tvore jednadžbu iz koje se traženi "a" može izračunati. (Primjer vidi kasnije).

Izračunavši "a" vratimo se jednadžbi

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$, iz koje slijedi prema pravilima za računanje s limesima

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax - b\right] = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right] - b = 0 \quad \text{i}$$

konačno

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right]} \tag{89}$$

Ovo će općenito biti neodređeni oblik $\infty - \infty$, koji opet treba izračunati prema već izloženim metodama.

Našavši vrijednost a i b možemo napisati jednadžbe asimptota.

Primjeri :

1) $y = \dfrac{1}{x-3}$

* Jednadžba horizontalne asimptote glasi $y = 0$.

Funkcija ima oblik razlomka. Kada $x - 3$ teži k nuli, y teži neizmjerno. Dakle $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$. Jednadžba vertikalne asimptote glasi $x = 3$. *

2) Odrediti asimptote hiperbole $\frac{(x-4)^2}{2^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$

Premda bismo, poznavajući svojstva hiperbole, lako izravno napisali jednadžbe asimptota, odredit ćemo ih za vježbu prema gore izloženoj metodi.

Jednadžbu najprije dovodimo u oblik $F(x,y) = 0$, gdje je $F(x,y)$ polinom. Izlazi

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 104 = 0$$

Dijelimo sa x^2 (najvišom potencijom od x, koja se pojavljuje) i dobijemo

$$9 - 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{72}{x} + 8\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{104}{x^2} = 0$$

Pustimo li x težiti prema neizmjernom, $\frac{y}{x}$ teži prema traženom koeficijentu smjera a asimptote, a zadnja tri člana lijeve strane očito teže prema nuli. Ostaje dakle

$$9 - 4\cdot a^2 = 0$$

ili

$$a = \pm\frac{3}{2}, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{3}{2}.$$

t.j. dobili smo dva rješenja za a.

Jednadžba hiperbole riješena po y daje

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{9}{4}x^2 - 18x + 26} = 1 \pm \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 18x + 27}$$

dakle

$$b = \lim_{x \to \infty}(y - ax) = \lim\left(1 \pm \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 18x + 27} \mp \frac{3}{2}x\right)$$

$$= 1 \pm \lim\left(\sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 18x + 27} - \frac{3}{2}x\right)$$

Pri tom smo predznake tako odabrali, da dobijemo neodređeni oblik $\infty - \infty$ ili $-\infty + \infty$ t.j. korijen i član $\frac{3}{2}x$ moraju s različitim predznacima težiti prema neizmjerno, inače ne može izaći konačna granična vrijednost.

Taj neodređeni oblik $\infty - \infty$ odredit ćemo izravnim razvijanjem u red potencija. No kod takvog razvijanja se mogu zanemariti članovi s višim potencijama varijable, kad varijabla teži k nuli, dok ona ovdje teži k ∞.

Stavljamo stoga prethodno $x = \frac{1}{\varepsilon}$, gdje $\varepsilon \to 0$ kada $x \to \infty$. Dobijemo tako

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 18x + 27} - \frac{3}{2}x\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\frac{9}{4\varepsilon^2} - \frac{18}{\varepsilon} + 27} - \frac{3}{2\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{9}{4} - 18\varepsilon + 27\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\right)$$

Drugi korijen razvijamo u Maclaurinov red :

$$\varphi(\varepsilon) = \sqrt{\frac{9}{4} - 18\varepsilon + 27\varepsilon^2} \quad ; \quad \varphi(0) = \frac{3}{2}$$

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{-18 + 54\varepsilon}{2\sqrt{\frac{9}{4} - 18\varepsilon + 27\varepsilon^2}} \quad ; \quad \varphi'(0) = \frac{-18}{2\cdot\frac{3}{2}} = -6$$

i t.d.

dakle

$$\varphi(\varepsilon) = \sqrt{\frac{9}{4} - 18\varepsilon + 27\varepsilon^2} = \frac{3}{2} - 6\varepsilon + \dots\dots\dots,$$

gdje točkice znače članove sa ε^2 , ε^3 , i t.d.

Dakle :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{9}{4} - 18\varepsilon + 27\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\varepsilon}(-6\varepsilon + \dots) = -6 + \dots$$

gdje na kraju točkice znače članove sa ε , ε^2 i t.d. koji otpadaju kada $\varepsilon \to 0$. Izlazi dakle -6 kao traženi limes i stoga

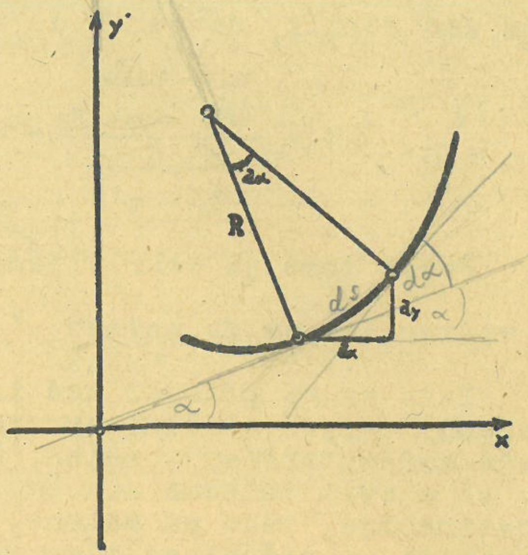
$$b = 1 \mp 6 \quad ; \quad b_1 = -5 \quad ; \quad b_2 = 7$$

jednadžbe asimptota prema tome glase

$$y = \frac{3}{2}x - 5 \quad ; \quad y = -\frac{3}{2}x + 7$$

19. Polumjer zakrivljenosti

Povučemo li u dvije točke neke krivulje normale na tu krivulju, one će se sjeći u jednoj točki (slika 93). Pustimo li sada jednu točku na krivulji konvergirati prema drugoj, i to sjecište će se pomicati, i približavati se nekom graničnom mjestu. Kažemo da je ta granična točka središte zakrivljenosti krivulje u zadanoj točki. Udaljenost od središta zakrivljenosti do sjecišta normale na krivulji nazivamo polumjerom zakrivljenosti. Polumjer zakrivljenosti identičan je s polumjerom kružnice, koja se u zadanoj točki priljubljuje uz krivulju. Takva se kružnica dobije, ako kroz zadanu točku na krivulji i kroz još dvije druge točke na krivulji položimo kružnicu i zatim te druge dvije točke pustimo konvergirati prema zadanoj. Granični položaj kružnice kroz te tri točke je tražena "kružnica oskulacije". Običava se kazati, da ta kružnica ima s krivuljom tri "neizmjerno blize" zajedničke točke (dok su kod običnog diranja samo dvije neizmjerno blize točke zajedničke). Središte kružnice oskulacije identično je sa središtem kružnice zakrivljenosti, koje je definirano kao granični položaj sjecišta dviju normala. (Za dokaz vidi Marković I, str.351, 527, 528.



SLIKA 93

Recipročnu vrijednost polumjera zakrivljenosti R nazivamo zakrivljenost k.

$$\frac{1}{R} = k \qquad (90)$$

Čim je veći polumjer zakrivljenosti, tim je manja zakrivljenost i obratno. Kod pravca je u svakoj točki $R = \infty$ te prema tome $k = 0$.

Prema slici 93 vidimo da je linijski element krivulje ds

$$ds = R\cdot d\alpha = \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}\cdot dx^2} = \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx$$

Znamo da je $tg\,\alpha = y'$, gdje je kut α jednak kutu, što ga zatvaraju normale i os y, jer su mu kraci okomiti na kutu tangente i osi x. Diferencirajući $tg\,\alpha = y'$ slijedi

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = y''dx \qquad \text{i dalje} \qquad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$$

$$y''dx = d\alpha\cdot(1 + tg^2\alpha)$$

$$= d\alpha\cdot(1 + y'^2)$$

Odatle je

$$d\alpha = \frac{y''\,dx}{(1 + y'^2)}$$

Prije smo dobili, da je $R \cdot d\alpha = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, a odatle je

$$R = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\frac{y''dx}{1 + y'^2}} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \qquad (91)$$

Prema tome je zakrivljenost $\frac{1}{R} = k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ i odakle vidimo, da je za maleno y', $k \doteq y''$.

Tako se na primjer kod izračunavanja elastične linije opterećenja uvijek služimo aproksimacijom $k = y''$, jer je progib nosača kod opterećenja malen, pa je malen i gradijent tangente, t.j. y' u svim točkama nosača. Greške, koje su posljedica takve aproksimacije, tako su malene, da se u praktičkim zadacima mogu zanemariti, a računi se time jako pojednostavnjuju.

Vidimo, da predznak izraza $\frac{1}{R} = k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ ovisi isključivo o drugoj derivaciji y'', jer je y'^2 pozitivan za sve vrijednosti od y'. Za $R > 0$, t.j. za $y'' > 0$, krivulja je konkavna prema gore, a za $R < 0$, t.j. $y'' < 0$, prema dolje. [orijentacija na normali]

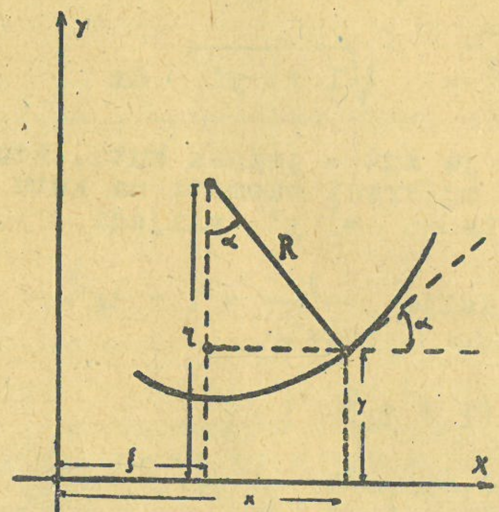
$y''<0$ $y''>0$

Geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti svih točaka neke krivulje tvori krivulju, koju nazivamo evolutom zadane krivulje. Obrnuto se prvotna krivulja zove evolventa dobivene krivulje. Zadanom krivuljom je evoluta jednoznačno određena, no mnogo krivulja ima istu evolutu, tako da zadana krivulja ima neizmjerno mnogo evolvenata.

Lako je odrediti koordinate ξ, η (slika 94) središta zakrivljenosti za točku x, y. Vidi se, da je

$$\xi = x - R \cdot \sin\alpha \quad ,$$

$$\eta = y + R \cdot \cos\alpha \quad .$$



SLIKA 94

Budući da je $\mathrm{tg}\,\alpha = y'$,

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

te uvrštenjem izraza za R dobijemo

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \qquad (92)$$

$* \quad \xi = \varphi - \frac{\dot\psi(\dot\varphi^2+\dot\psi^2)}{\dot\varphi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\varphi} \; ; \quad \eta = \frac{\dot\varphi(\dot\varphi^2+\dot\psi^2)}{\dot\varphi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\varphi} + \psi$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \tag{93}$$

Ako je krivulja zadana u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, treba preračunati (transformirati) derivacije :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$dy' = d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot dt$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} ;$$

dakle

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left[1+\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\varphi'\cdot\psi''-\psi'\cdot\varphi''}{\varphi'^3}} = \frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''} \tag{94}$$

Pomoću tih izraza lako je dobiti i za ovaj slučaj koordinate središta zakrivljenosti. $*$

Ako je funkcija zadana, onda te dvije jednadžbe daju ξ i η u funkciji od x ili od t, kada se sve derivacije izračunaju i uvrste. Time je određena jednadžba evolute, gdje su ξ , η tekuće koordinate na toj krivulji, a x odnosno t znači parametar. Dade li se taj parametar eliminirati, to dopiremo do jednadžbe evolute u običnom obliku. Obrnuti problem, t.j. određivanje evolvente, vodi na rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Primjer : jednadžbe $x = a\cdot\cos t \; = \varphi(t)$

$y = b\cdot\sin t \; = \psi(t)$

predočuju elipsu u parametarskom obliku. Podijele li se sa a odnosno b, kvadriraju i zbroje, otpada parametar i izlazi poznata jednadžba elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Određujemo polumjer zakrivljenosti R.

$\varphi'(t) = -a\cdot\sin t \qquad \varphi''(t) = -a\cdot\cos t$

$\psi'(t) = b\cdot\cos t \qquad \psi''(t) = -b\cdot\sin t$

$$R = \frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab\cdot\sin^2 t + ab\cdot\cos^2 t} = \frac{1}{ab}\cdot(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$$

Za $t = 0$ dobijemo jedan kraj velike osi, za koji je dakle $R = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$; za $t = \frac{\pi}{2}$ dobijemo jedan kraj male osi sa

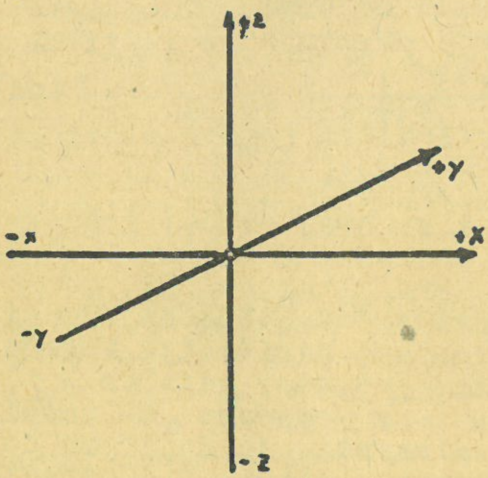
$R = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}$. Na tim formulama se temelji poznata konstrukcija središta zakrivljenosti za vrhove elipse.

* jedn. evolute elipse.

20. Analitička geometrija prostora

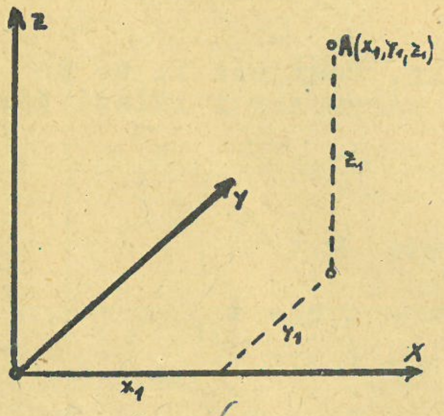
Analitička geometrija prostora proučava analitičkim t.j. računskim metodama geometrijske tvorevine prostora.

U prostoru uvodimo koordinatni sustav, koji se sastoji od tri međusobno okomite osi x, y i z, koje se sijeku u ishodištu (slika 95). Taj sistem dobijemo, ako koordinatnom sustavu ravnine dodamo treću os z , koja je okomita na ravninu x,y i koja siječe osi x i y u ishodištu. Koordinatni sustav prikazujemo kao na slici 95.



SLIKA 95

Svaka točka prostora određena je sa 3 koordinate: apscisom (slika 96) ordinatom i visinom (aplikatom). Visina (aplikata) je udaljenost točke od ravnine xy, dok su apscisa i ordinata koordinate projekcije točke na ravninu xy.



SLIKA 96

Jednadžbom sa tri varijable, koju u općem obliku pišemo ili eksplicitno sa $z = f(x,y)$ (funkcija dviju nezavisnih varijabla y i x) ili implicitno sa $F(x.y.z) = 0$, određujemo u prostoru sve one točke, čije koordinate x,y,z udovoljavaju tu jednadžbu.

Svakoj točki ravnine x y, t.j. nekom paru vrijednosti x i y u jednadžbi odgovara određena vrijednost z, t.j., određena visina točke u prostoru sa koordinatama (x,y,z).

Kažemo, da je jednadžba $z = f(x,y)$ odnosno $F(x,y,z)$ jednadžba te plohe.

Sa dvije jednadžbe određena je prostorna krivulja - presječnica dviju ploha zadanih tim jednadžbama. Koordinate točaka na presječnici su sve one trojke vrijednosti x,y,z, koje zadovoljavaju obje jednadžbe, pa stoga te točke leže na obim plohama.

Vidi se dakle, da je krivulja u prostoru određena dvjema jednadžbama.

Eliminacijom jedne varijable iz takvog sustava od dvije jednadžbe, na pr. kod linearnih jednadžbi metodom jednakih koeficijenata, dobijemo jednadžbu projekcije presječnice na ravninu ostalih dviju varijabla, jer time dobijemo relaciju između te dvije varijable, koja vrijedi u točkama presječnice, bez obzira na vrijednosti treće varijable, dakle i onda, ako treću varijablu stavimo nula t.j. u točkama projekcije presječnice.

Takva jednadžba projekcije je u prostoru ujedno i jednadžba svih točaka, koje leže na okomicama kroz točku presječnice, paralelnim sa osi eliminirane varijable. Tu plohu nazivamo valjkom kroz presječnicu s izvodnicama paralelnim s osi eliminirane varijable.

Tri jednadžbe s tri varijable određuju točke, u kojima se sijeku te tri zadane plohe.

Ako su zadane dvije točke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$, njihova je udaljenost

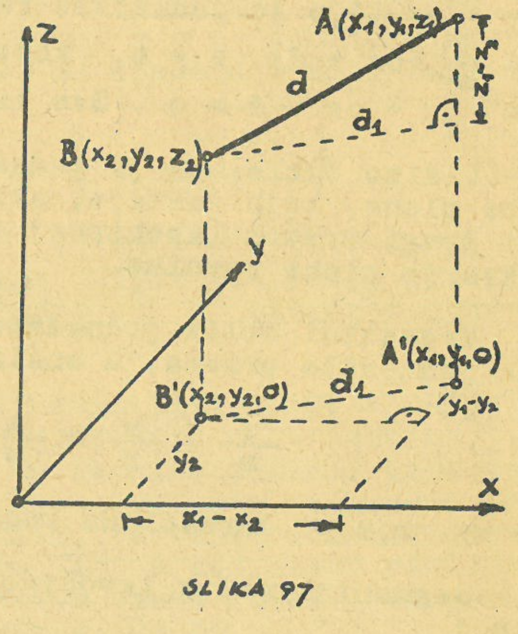
$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

što se jasno vidi iz slike 97.

Udaljenost d_1 projekcije A' i B' točaka A i B iznosi

$$d_1 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Udaljenost točaka A i B jest $d = \sqrt{d_1^2+(z_1-z_2)^2} =$
$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$



SLIKA 97

Udaljenost neke točke $A(x_1, y_1, z_1)$ od ishodišta $O(0,0,0)$ iznosi dakle $d = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

J e d n a d ž b a   r a v n i n e

Linearna jednadžba s tri varijable određuje u prostornom koordinatnom sustavu ravninu. To pokazujemo na slijedeći način :

Sve izohipse, t.j. krivulje iste visine jednadžbe $ax + by + cz + d = o$ međusobno su paralelni pravci. Izohipse dobijemo, ako plohu $ax + by + cz + d = o$ presiječemo ravninom $z = n$, koja je paralelna s ravninom x, y, t.j. ako mjesto visine z uvrstimo neku određenu vrijednost n. Jednadžba projekcije izohipse bila bi $ax + by + cn + d = o$ ili u eksplicitnom obliku po y : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{cn + d}{b}$. Vidimo, da su sve izohipse međusobno paralelne, jer se smjer, t.j. gradijent njihovih projekcija, ne mijenja za sve n.

Drugi trag, t.j. presjek plohe $ax + by + cz + d = o$ s ravninom xz, dobijemo, ako u jednadžbu $ax + by + cz + d = o$ uvrstimo $y = o$ (što je jednadžba ravnine xz).

Jednadžba drugog traga glasi :

$$ax + cz + d = o$$

Vidimo, da je i drugi trag pravac.

Svaka izohipsa siječe ravninu xz u točki, koju dobijemo ako u jednadžbama izohipse $z = n$, $ax + by + cn + d = o$ stavimo $y = o$ (što je jednadžba ravnine xz). Izlaze koordinate $x = -\frac{1}{a}(cn + d)$, $z = n$, koje zadovoljavaju jednadžbu drugog traga $ax + cz + d = o$. Sve izohipse dakle sijeku drugi trag.

Vidimo dakle, da je jednadžba $ax + by + cz + d = o$ jednadžba plohe, koja nastaje, ako po jednom pravcu (drugom tragu) klizi drugi pravac (izohipsa) ostajući paralelan sam sa sobom, a takva je ploha ravnina.

Segmentni oblik jednadžbe ravnine, analogno kao segmentni oblik jednadžbe pravca, u analitičkoj geometriji ravnine glasi:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \tag{96}$$

gdje su m,n,p odresci na koordinatnim osima x,y,z.

Segmentni oblik izvodimo iz implicitnog oblika na ovaj način :

$$ax + by + cz + d = o$$

$$ax + by + cz = -d \qquad :-d$$

$$\frac{x}{\frac{-d}{a}} + \frac{y}{-\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{-d}{c}} = 1$$

Lako dokazujemo, da su nazivnici lijeve strane jednadžbe odsječci na odnosnim koordinatnim osima.

Nazovemo li odsječak na osi x neke ravnine sa m; tada će koordinate točke, u kojoj ravnina siječe os x, biti (m,o,o).

Te koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu ravnine $ax + by + cz + d = o$, t.j. mora biti :

$$am + b\cdot o + c\cdot o + d = o$$

odakle slijedi :

$$am = - d \qquad m = - \frac{d}{a}$$

Analogno dokazujemo i za ostale odsječke.

Ako u linearnoj jednadžbi t.j. jednadžbi ravnine, nema jedne varijable, tada je ravnina paralelna s osi varijable, koje nema. Takva ravnina okomita je na ravnini dviju njenih varijabla i siječe je u pravcu, što ga u koordinatnom sustavu tih dviju varijabla određuje zadana jednadžba. Budući da jedne varijable nema, odnos ostalih dviju o njoj ne ovisi te ostaje nepromijenjen za sve vrijednosti te varijable, koje nema.

Ako u jednadžbi ravnine nema dviju varijabla, takva je ravnina paralelna sa ravninom varijabla, kojih nema i okomita na varijable te jednadžbe. Tako jednadžba $z = n$ znači ravninu paralelnu sa ravninom xy koja os z sječe u visini n.

Pramen i svežanj ravnine

Dvije jednadžbe ravnine $R_1 = 0$ i $R_2 = 0$ (gdje R_1 i R_2 znače linearne izraze s varijablama x,y,z) određuju pravac. Ako je $R_2 = 0$ tada je i $\lambda R_2 = 0$ (gdje sa λ označujemo neki realni broj, koji možemo odabrati po volji).

Ako je i $R_1 = 0$ i $\lambda R_2 = 0$, mora biti i $R_1 + \lambda R_2 = 0$. Ovo je, uz stalno odabrani λ, opet jednadžba neke ravnine, jer je izraz na lijevoj strani linearan. Ta ravnina prolazi kroz presječnicu ravnina $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, jer koordinate točaka te presječnice zadovoljavaju obje te jednadžbe, pa stoga i jednadžbu $R_1 + \lambda\cdot R_2 = 0$, tako da ta presječnica leži u toj novoj ravnini. Za različite vrijednosti od λ dobivamo razne ravnine, koje sve idu kroz tu presječnicu. Velimo stoga, da je

$$R_1 + \lambda R_2 = 0 \tag{97}$$

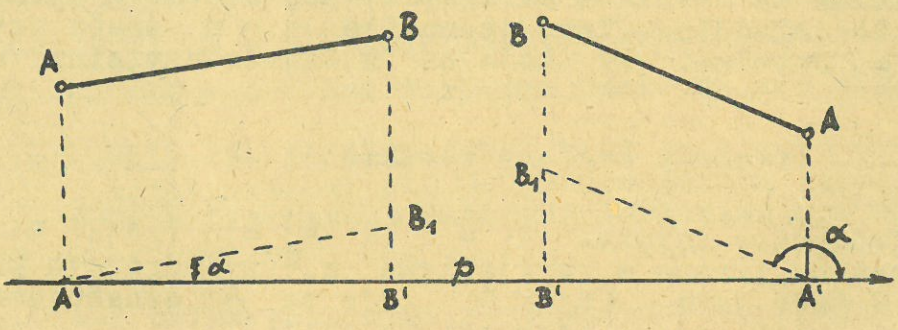
jednadžba pramena ravnina, kojemu je nosilac presječnica ravnina $R_1 = 0$ $R_2 = 0$. Za $\lambda = 0$ dobijemo samu ravninu $R_1 = 0$. Ako pustimo λ konvergirati prema ∞ podijelivši prethodno jednadžbu sa , t.j. ako tvorimo $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left(\frac{R_1}{\lambda} + R_2\right)$ onda vidimo, da ostaje sam $R_2 = 0$, pa velimo, da je $R_2 = 0$ ona ravnina pramena, koja odgovara vrijednosti $\lambda = \infty$. Ako λ prima sve vrijednosti realnih brojeva, dobivamo sve ostale ravnine pramena.

Analogno tri jednadžbe ravnina $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ određuju točku. Pišemo li $R_1 + \lambda_1 \cdot R_2 + \lambda_2 R_3 = 0$, tada je to jednadžba svežnja ravnina kroz točku određenu zadanim jednadžbama. Koordinate te točke zadovoljavaju sve tri jednadžbe, pa prema tome i jednadžbu svake ravnine svežnja. Tom točkom možemo povući neizmjerno mnogo ravnina mijenjajući u jednadžbi svežnja koeficijente λ_1 i λ_2 .

Kut između dva pravca

Pod ortogonalnom projekcijom (slika 98) neke dužine AB na pravac p, kojemu je pridan smjer (strelica), razumijevamo dužinu A'B', koja se dobije tako, da se kroz točke A i B polože ravnine okomito na p i traže probodišta A' i B' pravca p s tim ravninama. Računamo projekciju pozitivno, ako se smjer od A' prema B' podudara sa smjerom pravca, inače negativno. Ako je α kut, što ga čine dužina AB i pravac p, onda je

$$A'B' = AB \cos\alpha$$

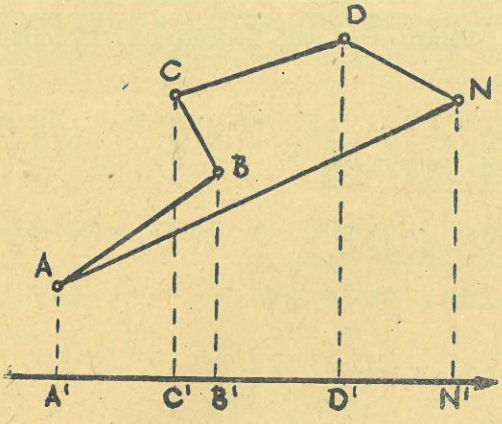


SLIKA 98

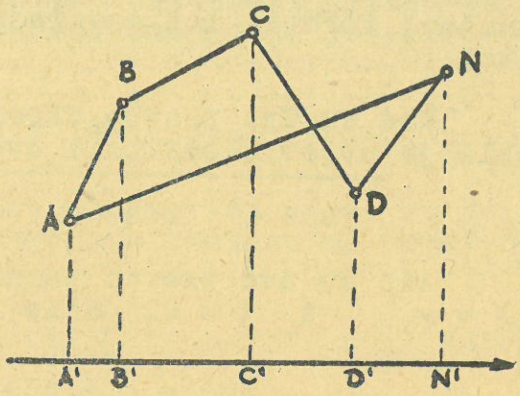
s ispravnim predznakom, jer je $\cos\alpha$ negativan, kada je α između 90^0 i 180^0 . (U slici je pravac p u ravnini slike, dok dužina AB to ne mora biti, nego može biti mimosmjerna s pravcem p. $A'B_1$ je paralelno s AB, pa ni B_1 ne mora biti u ravnini slike i α se ne mora vidjeti u pravoj veličini.) Očito je, da se veličina projekcije ne mijenja, kada se dužina AB miče bilo kuda paralelno samoj sebi.

Ako dužina AN spaja krajnje točke slomljene crte, na pr. ABCDN (slike 99, 99a) vrijedi, da je projekcija od AN jednaka sumi projekcija od AB, BC, CD, DN, pri čemu treba dakako te projekcije uzimati s ispravnim predznacima.

Neka su sad zadana dva pravca p_1 i p_2 , koji s pozitivnim smjerovima osi zatvaraju kutove $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ odnosno $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Zamislimo te pravce povučene kroz ishodište O (slika 100) i na pravcu p_1 neku točku N. Dužinu ON možemo nadomjestiti slomljenom crtom OABN, gdje su očito dužine



SLIKA 99



SLIKA 99a

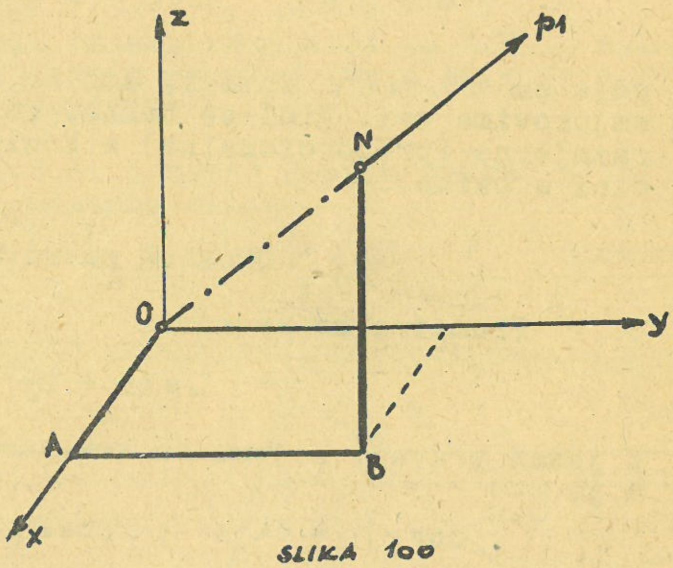
OA, AB, BN jednake projekcijama dužine ON na os x,y i z, t.j. $OA = ON \cdot \cos\alpha_1$; $AB = ON \cdot \cos\beta_1$; $BN = ON \cdot \cos\gamma_1$

Projekcija dužine ON na pravac p_2 jednaka je $ON \cdot \cos\varphi$, ako je φ kut između ta dva pravca. Projiciramo li umjesto ON slomljenu crtu OA BN na pravac p_2 , to su projekcije pojedinih dužina OA, AB, BN jednake $OA \cdot \cos\alpha_2$, $AB \cdot \cos\beta_2$, $BN \cdot \cos\gamma_2$, jer pravac p_2 zatvara s osima x,y,z, dakle i s dužinama OA, AB, BN kutove $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.-

$ON \cdot \cos\varphi = OA \cdot \cos\alpha_2 +$

$+ AB \cdot \cos\beta_2 + BN \cdot \cos\gamma_2$

ili po uvrštenju izraza za OA, AB, BN.



SLIKA 100

$ON \cdot \cos\varphi = ON\,(\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2)$ t.j. kosinus kuta između dva pravca dan je formulom

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2 \quad (99)$$

Doduše, ako je koja koordinata točke N negativna, na pr. x-koordinata, onda je A na negativnoj poluzraci osi x , pa je kut između OA i p_2 jednak suplementu kuta α_2 između p_2 i pozitivnog smjera osi x . Stoga bi $\cos\alpha_2$ trebalo nadomjestiti sa $\cos(180^0 - \alpha_2) = -\cos\alpha_2$ No u tom slučaju je i $\cos\alpha_1$ negativan, tako da je pozitivna duljina dužina OA zapravo jednaka $-ON \cdot \cos\alpha$. Ova se dva predznaka u konačnoj formuli kompenziraju, tako da ta formula vrijedi općenito.

Kad su dva pravca okomita, onda je $\varphi = 90^0$, $\cos\varphi = 0$, dakle je uvjet okomitosti dvaju pravaca

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2 = 0 \quad (100)$$

Ako su dva pravca paralelna, onda je $\alpha_1 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_2$; $\gamma_1 = \gamma_2$ i $\varphi = 0$, dakle

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 \quad (101)$$

Tu relaciju dakle zadovoljavaju kozinusi smjera svakog pravca.

Ako neka dužina d ima projekcije d' d'' i d''' na osi x,y,z, onda je

$$d' = d\cdot\cos\alpha_1 \quad ; \quad d'' = d\cdot\cos\alpha_2 \quad ; \quad d''' = d\cdot\cos\alpha_3$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kutovi, što ih ta dužina tvori s pozitivnim smjerovima osi. Vidi se dakle, da su projekcije dužine na osi razmjerne (proporcionalne) s kozinusima kutova, što ga dužina čini s osima.

Okomica na ravninu.

Promatrajmo ravninu

$$L \equiv Ax + By + Cz + D = o$$

i jedan pravac, kojemu su kosinusi smjera razmjerni sa A, B, C, t.j.

$$\cos\alpha_1 = \lambda\cdot A \quad ; \quad \cos\alpha_2 = \lambda\cdot B \quad ; \quad \cos\alpha_3 = \lambda\cdot C,$$

gdje je λ faktor razmjernosti. Zbrajanjem kvadrata dobijemo

$$\lambda^2\cdot A^2 + \lambda^2\cdot B^2 + \lambda^2 C^2 = 1$$

ili

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (102)$$

Predznak korijena ovisi o orijentaciji pravca (gdje smo mu stavili strelicu).

Uzmimo sada dužinu AB, gdje su $A(x_1, y_1\ z_1)$. $B(x_2, y_2, z_2)$ dvije točke u ravnini L = o.

Koordinate obih točaka moraju zadovoljavati jednadžbu ravnine. Uvrstimo ih dakle i odbijemo dobivene dvije jednadžbe. Izlazi

$$A\cdot(x_2 - x_1) + B\cdot(y_2 - y_1) + C\cdot(z_2 - z_1) = 0$$

Razlike koordinata $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ su projekcije dužine AB i prema tome razmjerno s kosinusima smjera te dužine, t.j.

$$x_2 - x_1 = \mu\cos\alpha_2 \;;\; y_2 - y_1 = \mu\cos\beta_2 \;;\; z_2 - z_1 = \mu\cos\gamma_2$$

Kvadriranjem i zbrajanjem izlazi za faktor

$$\mu = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \overline{AB}$$

Uvrštenje u gornju jednadžbu daje

$$\frac{\mu}{\lambda}\,(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2) = 0$$

t.j. pravac, kojemu su cosinusi smjera razmjerni sa A,B,C, okomit je na svakoj dužini, koja leži u ravnini $Ax + By + Cz + D = 0$, dakle je okomit na toj ravnini.

Možemo do tog rezultata doći i nešto drugim putom. Neka je jednadžba ravnine zadana u segmentnom obliku $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ (slika 101) i neka je $ON = \delta$ okomica spuštena iz ishodišta na ravninu. Prema slici je onda iz pravokutnih trokuta OPN, OQN i ORN (pravi kut kod N)

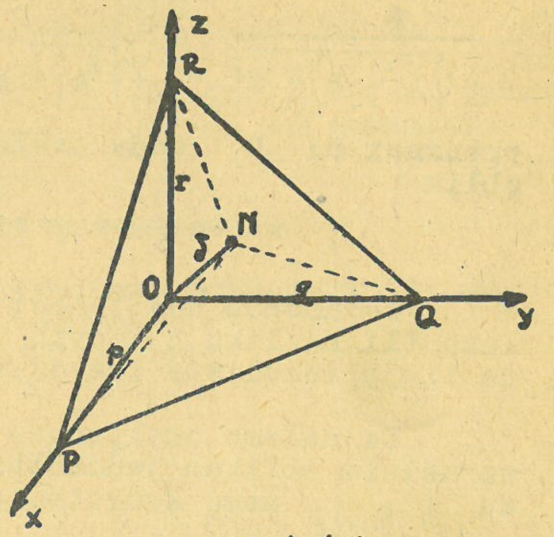
$$\delta = p\cdot\cos\alpha = q\cdot\cos\beta = r\cdot\cos\gamma$$

ako su α, β, γ kutovi kod O, t.j. kutovi, što ih okomica ON zatvara s osima. Budući da je

$$p = -\frac{D}{A} \;;\; q = -\frac{D}{B} \;;\; r = -\frac{D}{C}$$

to izlazi $\cos\alpha = -\frac{A\delta}{D}$;

$$\cos\beta = -\frac{B\delta}{D} \;;\; \cos\gamma = -\frac{C\delta}{D}$$



SLIKA 101

ili $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C}$, što znači, da su kosinusi smjera okomice razmjerni sa A, B, C, kako smo i prije vidjeli.

Jednadžbe pravca kroz neku točku (x_0, y_0, z_0) okomito na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$ moraju glasiti

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad , \qquad (103)$$

jer su $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ projekcije jedne dužine na pravcu i stoga razmjerne s kosinusima kutova toga pravca, dakle i sa A, B, C .

Udaljenost točke od ravnine .

Zbrajanjem i kvadriranjem izlazi iz $\cos\alpha = -\frac{A\delta}{D}$ i t.d. za udaljenost δ ishodišta od ravnine

$$\delta = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + D^2}} \qquad (104)$$

gdje predznak korijena odabiremo tako, da δ bude pozitivan, t.j. + ili - prema tome, da li je D pozitivan ili negativan.

Vidimo, da je

$$\cos\alpha = -\frac{A\delta}{D} = -\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{i t.d.}$$

Ako dakle jednadžbu $Ax + By + Cz + D = 0$ podijelimo sa

$$-\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ (t.j. korijen ima obrnuti predznak od D) onda prelazi u t.zv. "normalni" ili "Hesseov" oblik

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - \delta = 0 \qquad (105)$$

Međusobnu udaljenost dviju paralelnih ravnina dobijemo kao sumu ili razliku njihovih udaljenosti od ishodišta, prema tome, da li je ishodište između njih ili nije.

Da nađemo udaljenost točke $M(x_1\ y_1\ z_1)$ od ravnine dane normalnim oblikom jednadžbe, pomaknemo ishodište u tu točku. Ako su ξ, η, ζ nove koordinate, onda vrijedi

$$x = x_1 + \xi \quad , \quad y = y_1 + \eta \quad ; \quad z = z_1 = \zeta \qquad (106)$$

što uvršteno u jednadžbu daje

$$\xi \cdot \cos\alpha + \eta \cdot \cos\beta + \zeta \cdot \cos\gamma + \left[x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - \delta\right] = 0.$$

Tražena udaljenost je dakle izraz u uglastoj zagradi (i to s negativnim podznakom, ako se točka M i ishodište nalaze s različitih strana ravnine, kako nije teško uvidjeti).

Vidi se, da se udaljenost točke od ravnine dobije tako, da se koordinate točke uvrste u lijevu stranu normalnog oblika jednadžbe ravnine.

Simetralne ravnine

Ako su zadane dvije ravnine u normalnom obliku

$$L_1 \equiv x \cdot \cos\alpha_1 + y \cdot \cos\beta_1 + z \cdot \cos\gamma_1 - \delta_1 = 0,$$

i

$$L_2 \equiv x \cdot \cos\alpha_2 + y \cdot \cos\beta_2 + z \cdot \cos\gamma_2 - \delta_2 = 0,$$

onda njihove simetralne ravnine imaju jednadžbe

$$L_1 + L_2 = 0 \quad \text{i} \quad L_1 - L_2 = 0$$

Naime, točke simetralne ravnine moraju biti jednako udaljene od obih zadanih ravnina. Ako takva točka ima koordinate X, Y, Z, onda su te dvije udaljenosti jednake

$$\Delta_1 = X \cdot \cos\alpha_1 + Y \cdot \cos\beta_1 + Z \cdot \cos\gamma_1 - \delta_1$$

$$\Delta_2 = X \cdot \cos\alpha_2 + Y \cdot \cos\beta_2 + Z \cdot \cos\gamma_2 - \delta_2$$

Prema predznaku tih udaljenosti (t.j. prema položaju ishodišta spram ravnina) može dakle biti $\Delta_1 = \Delta_2$ ili $\Delta_1 = -\Delta_2$, što daje gornje dvije jednadžbe simetralnih ravnina, koje su dakako specijalne ravnine pramena $L_1 + \lambda L_2 = 0$, za vrijednosti $\lambda = \pm 1$ parametra.

Kut između dviju ravnina.

Kut dviju ravnina jednak je kutu njihovih normala. Ako su te ravnine

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

onda su kosinusi smjera

$$\cos\alpha_1 = \lambda_1 A_1 \;;\quad \cos\beta_1 = \lambda_1 B_1 \;;\quad \cos\gamma_1 = \lambda_1 C_1 \;,$$

$$\cos\alpha_2 = \lambda_2 A_2 \;;\quad \cos\beta_2 = \lambda_2 B_2 \;;\quad \cos\gamma_2 = \lambda_2 C_2 \;,$$

što uvršteno u izraz za $\cos\varphi$ daje

$$\cos\varphi = \lambda_1 \cdot \lambda_2 (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Napose je uvjet okomitosti dviju ravnina

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (107)$$

Umetak: Jednadžba uspravnog valjka.

Jednadžba kosog valjka .

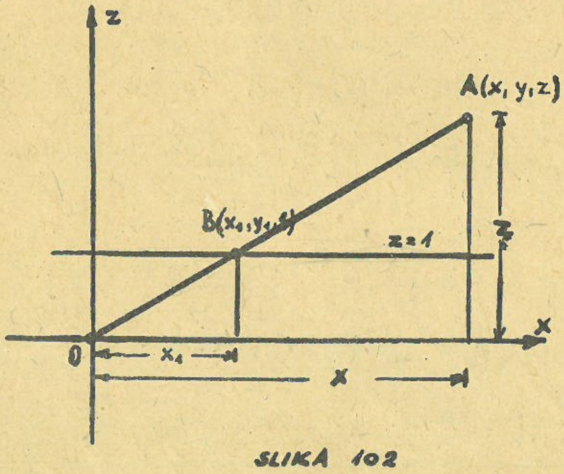
U ravnini xy zadana je krivulja $f(x,y) = 0$. Tražimo jednadžbu kosog valjka kroz tu krivulju, t.j. jednadžbu plohe, koja nastaje paralelnim pomicanjem pravca po toj krivulji. Smjer izvodnice određujemo pravcem kroz ishodište, čija je projekcija na ravninu xz $x = az$ a na ravninu yz $y = bz$. Izvodnice su paralelne s tim pravcem. Ako neka točka u prostoru s koordinatama (x,y,z) leži na jednoj izvodnici takvog kosog valjka, tada će koordinate odgovarajuće točke (t.j. točke na istoj izvodnici) krivulje $f(x,y) = 0$ biti $(x - az, y - bz)$. Koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu zadane krivulje, t.j. mora vrijediti $f(x - az, y - bz) = 0$. To je relacija između koordinata točaka u prostoru na izvodnicama kosog valjka, pa prema tome predstavlja jednadžbu kosog valjka. Veličine a i b određuju izvodnice kosog valjka.

Jednadžba čunja s vrhom u ishodištu kroz krivulju u ravnini $z = C$

Čunjem nazivamo plohu, koja nastaje, kad pravac klizi po nekoj krivulji prolazeći pri tom jednom stalnom točkom, vrhom čunja.

Neka je u ravnini $z = 1$ (slika 102) (t.j. ravnina koja je paralelna sa ravninom xy i udaljena od nje za 1) zadana krivulja, čija je projekcija na ravninu xy $\phi(x,y) = 0$. Tražimo jednadžbu čunja kroz tu krivulju sa vrhom u ishodištu. Ako se točka $A(x,y,z)$ u prostoru nalazi na izvodnici takvog čunja, koji prolazi kroz točku $B(x_1,y_1,z_1)$ krivulje u ravnini $z = 1$ tada po sličnosti trokuta vrijedi relacija

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x}{z} \quad \text{i analogno} \quad \frac{y_1}{1} = \frac{y}{z}$$



SLIKA 102

Među koordinatama x_1, y_1 vrijedi $\phi(x_1,y_1) = 0$, pa je prema tome

$$\frac{x_1}{C} = \frac{x}{z}, \quad \frac{y_1}{C} = \frac{y}{z}$$

$\phi(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$. To nije više relacija među koordinatama točaka u ravnini $z = 1$ nego među koordinatama x,y,z bilo koje točke na nekoj izvodnici čunja, koja dakle vrijedi za sve točke čunja. To je dakle jednadžba čunja kroz ishodište :

$$\phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \qquad \phi\left(c\frac{x}{z}, c\frac{y}{z}\right) = 0 \tag{108}$$

Jednadžba čunja sa vrhom u a,b,c kroz krivulju u jednoj od ravnina xy, xz, yz .

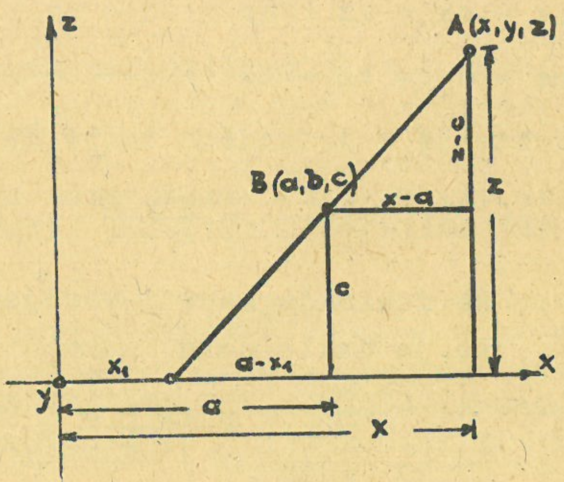
Zadana je krivulja $f(x,y) = 0$ u ravnini xy te vrh čunja (a,b,c). Neka je $A(x,y,z)$ točka na izvodnici čunja koji prolazi kroz $B(a,b,c)$ i točkom krivulje $C(x_1, y_1, 0)$. Na slici 103 prikazani su odnosi u projekciji na ravninu xz. Zbog sličnosti trokuta postoji relacija

$$\frac{a - x_1}{c} = \frac{x - a}{z - c}$$

odatle slijedi :

$$x_1 = a - \frac{c(x - a)}{z - c}$$

$$x_1 = \frac{az - xc}{z - c}$$



SLIKA 103

Analogno iz projekcije na ravninu yz dobivamo relaciju .

$$y_1 = \frac{bz - yc}{z - c}$$

Među koordinatama x_1, y_1 točke $C(x_1,y_1,0)$ postoji relacija $f(x_1,y_1) = 0$. Prema tome vrijedi i

$$f\left(\frac{az - xc}{z - c}, \frac{bz - yc}{z - c}\right) = 0$$

Ta je relacija među prostornim koordinatama svih točaka ($c \neq 0$) na izvodnicama čunja kroz krivulju $f(x,y)$ sa točkom u $A(a,b,c)$, t.j. jednadžba tog čunja. Pišemo li varijable bez oznake indeksa jednadžba glasi

$$f\left(\frac{az - cx}{z-c}, \frac{bz - cy}{z-c}\right) = 0 \tag{109}$$

Analogno izvodimo jednadžbu čunja zadanog krivuljom $\varphi(x,z) = 0$ u ravnini xz i vrhom u $A(a,b,c)$: $b \neq 0$

$$\varphi\left(\frac{ay - bx}{y-b}, \frac{cy - bz}{y-b}\right) = 0 \tag{110}$$

te jednadžu čunja zadanog krivuljom $\phi(y,z) = 0$ u ravnini yz i vrhom u $A(a,b,c)$: $a \neq 0$

$$\phi\left(\frac{bx - ay}{x - a}, \frac{cx - az}{x - a} \right) = 0 \qquad (111)$$

Primjer :

Traži se jednadžba čunja sa vrhom u $V(a,b,c)$ i bazom $x^2 + y^2 = r^2$.

Uvrštavajući mjesto x i y izraz $\frac{az - cx}{z-c}$ i $\frac{bz - cy}{z-c}$ izlazi kao jednadžba čunja.

$$f(x,y,z) = \left(\frac{az - cx}{z-c} \right)^2 + \left(\frac{bz - cy}{z-c} \right)^2 = r^2$$

Jednadžba čunja se može dovesti još u nešto jednostavniji oblik, koji je lakše pamtiti. Pišemo li

$$\left.\begin{aligned} az - cx &= az - ac + ac - cx = a(z - c) - c(x - a), \\ bz - cy &= bz - bc + bc - cy = b(z - c) - c(y - b), \end{aligned}\right\} \text{pođe se od (109)}$$

to uvrštenje u jednadžbu čunja daje

$$f\left(a - c\cdot\frac{x - a}{z - c}, \; b - c\cdot\frac{y - b}{z - c}\right) = 0$$

Vidimo, da funkcija sadrži varijable samo u kombinacijama $\frac{x - a}{z - c}$, $\frac{y - b}{z - c}$, to je dakle neka funkcija F tih kombinacija, t.j.

$$F\left(\frac{x - a}{z - c}, \frac{y - b}{z - c}\right) = 0$$

$F\left(a - c\frac{\xi}{\zeta}, b - c\frac{\eta}{\zeta}\right)$

Taj oblik smo mogli dobiti i tako, da smo najprije pomakli ishodište koordinatnog sustava u vrh (a,b,c). U tim novim koordinatama bila bi jednadžba čunja
$F\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) = 0$, a uvrštavanjem jednadžbi transformacije koordinatnog sustava

$$\xi = x-a, \qquad \eta = y-b, \qquad \zeta = z-c$$

(koje su sasvim analogno kao za pomak koordinatnog sustava u ravnini) izlazi prije dobivena jednadžba.

Nešto je teže iz ovoga oblika jednadžbe čunja doprijeti do jednadžbe čunja, kojemu je zadan presjek (baza) s nekom koordinatnom ravninom, na pr. ravninom xy. Neka je dakle zadana jednadžba te baze čunja u obliku

$$f(x,y) = 0 ,$$

gdje je dakle f zadana, t.j. poznata funkcija. Jednadžba čunja prema gornjem glasi

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0,$$

gdje je F tražena, dakle nepoznata funkcija. Stavimo li $z = 0$, dobijemo jednadžbu presjeka čunja s ravninom xy u obliku

$$F\left(\frac{x-a}{-c}, \frac{y-b}{-c}\right) = 0,$$

što dakle treba da bude istovjetno sa $f(x,y) = 0$. Da iz ovoga zahtjeva nađemo funkciju F, označimo

$$\frac{x-a}{-c} = \xi \quad ; \quad \frac{y-b}{-c} = \eta \quad ,$$

ili, riješeno po x,y :

$$x = a - c\xi \quad ; \quad y = b - c\eta$$ uvrstimo u

Jednadžba baze dakle u novim varijablama ξ, η glasi

$$F(\xi, \eta) = 0$$

U drugu ruku, ona u starim varijablama x,y treba da glasi $f(x,y) = 0$, gdje je f poznata funkcija. Uvrstimo ovdje izraze za x i y, izlazi

$$f(a - c\xi, \; b - c\eta) = 0.$$

Lijeva strana je sada neka poznata funkcija novih varijabla ξ, η, dakle upravo funkcija $F(\xi, \eta)$ koju tražimo. Treba ovdje samo još mjesto ξ, η staviti $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$ i jednadžba je dobivena. Ona dakle glasi:

$$f\left(a - c\,\frac{x-a}{z-c}, \; b - c\,\frac{y-b}{z-c}\right) = 0,$$

što sređeno daje

$$f\left(\frac{az - cx}{z-c}, \frac{bz - cy}{z-c}\right) = 0,$$

u skladu s jednadžbom, koju smo prije dobili izravnim izvodom.

Gore spomenuti primjer izradio bi se ovako :
U jednadžbu baze

$$x^2 + y^2 = r^2$$

uvrštava se

$$x = a - c\xi \quad ; \quad y = b - c\eta$$

što daje

$$(a - c\cdot\xi)^2 + (b - c\cdot\eta)^2 = r^2,$$

zatim se ξ, η nadomjeste sa $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$, što dovodi do istog rezultata kao prije.

Analogno bi se postupalo, da je na pr. zadan presjek s ravninom yz . U jednadžbi

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

stavi se $x = 0$ i zatim označi

$$\frac{-a}{z-c} = \xi \qquad \frac{y-b}{z-c} = \eta$$

ili

$$z = c - \frac{a}{\xi}, \qquad y = b - \frac{a\eta}{\xi}$$

Ovi se izrazi uvrste u jednadžbu baze $\phi(y,z) = 0$ i zatim ξ, η nadomjeste izrazima $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$. Ako, recimo, dana kružnica

$$y^2 + z^2 = r^2 ,$$

izlazi najprije

$$\left(b - \frac{a\eta}{\xi}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{\xi}\right)^2 = r^2$$

i zatim

$$\left(b - a\,\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \left(c - a\,\frac{z-c}{x-a}\right)^2 = r^2$$

ili

$$\left(\frac{bx-ay}{x-a}\right)^2 + \left(\frac{cx-az}{x-a}\right)^2 = r^2$$

u skladu s prije izvedenom jednadžbom

$$\phi\left(\frac{bx-ay}{x-a}, \frac{cx-az}{x-a}\right) = 0$$

Još ćemo raspraviti najopćenitiji oblik jednadžbi valjka i čunja.

Neka radi kraćeg pisanja L_1 i L_2 znače dva linearna izraza u varijablama x, y, z, t.j.

$$L_1 \equiv p_1x + q_1y + r_1z + s_1$$

$$L_2 \equiv p_2x + q_2y + r_2z + s_2$$

Tvrdimo, da je onda

$$F(L_1, L_2) = 0$$

jednadžba valjka. Pri tom treba pretpostaviti, da $L_1 = 0$ i $L_2 = 0$ znače dvije ravnine, koje se sijeku (koje dakle nisu paralelne). Da je ta jednadžba zaista valjak, može se uvidjeti time, što se ta jednadžba dade svesti na naš prijašnji, specijalniji oblik. Pokušajmo u tu svrhu izraze L_1, L_2 linearno izraziti pomoću izraza $x - az$, $y - bz$, koji su sadržani u prijašnjem obliku jednadžbe. Stavimo dakle

$$L_1 = p_1x + q_1y + r_1z + s_1 = A_1(x - az) + B_1(y - bz) + C_1$$

$$L_2 = p_2x + q_2y + r_2z + s_2 = A_2(x - az) + B_2(y - bz) + C_2$$

zahtijevajući, da to budu identiteti, t.j. da te jednadžbe vrijede da sve vrijednosti x,y,z. Stavimo li $x = y = z$, dobijemo $C_1 = s_1$, $C_2 = s_2$. Dalje za $y = z = 0$ izlazi iz prve jednadžbe $A_1 = p_1$, iz druge jednadžbe $A_2 = p_2$; analogno dobijemo za $x = z = 0$ $B_1 = q_1$, $B_2 = q_2$. Konačno za $x = y = 0$ izlaze jednadžbe

$$p_1a + q_1b = - r_1$$

$$p_2a + q_2b = - r_2$$

ili

$$a = \frac{r_2q_1 - r_1q_2}{p_1q_2 - p_2q_1} \quad ; \quad b = \frac{p_2r_1 - p_1r_2}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

Uvrštenje u jednadžbu daje

$$F\left[p_1(x - az) + q_1(y_1 - bz) + s_1 \; , \; p_2(x - az) + q_2(y - bz) + s_2\right] = 0.$$

str. 130
j. kosog
valjka

Lijeva je strana dakle sada neka funkcija od $x - az$ i $y - bz$ i jednadžba stoga zaista znači valjak. Veličine a i b, kako znamo, znače koeficijente smjera pravaca, koji su projekcije izvodnica na ravnine xz, odnosno yz (i to tangense kutova, što ih zatvaraju sa osi z). Računamo li jednadžbe projekcija presječnice ravnina $L_1 = 0$ i $L_2 = 0$ na ravnine xz odnosno yz, dobijemo eliminacijom varijable y odnosno x:

$$(p_1q_2 - p_2q_1)x + (r_1q_2 - r_2q_1)z + s_1q_2 - s_2q_1 = 0$$

odnosno

$$(q_1p_2 - q_2p_1)\, y + (r_1p_2 - r_2p_1)z + s_1p_2 - s_2p_1 = 0$$

Koeficijenti smjera s obzirom na os z jesu

$$- \frac{r_1q_2 - r_2q_1}{p_1q_2 - p_2q_1} \quad \text{odnosno} \quad - \frac{r_1p_2 - r_2p_1}{q_1p_2 - q_2p_1}$$

a to su upravo veličine a, b. Iz toga se vidi, da su izvodnice valjka paralelne s presječnicom ravnina $L_1 = 0$, $L_2 = 0$.

~ o ~

Neka su sada $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ tri jednadžbe ravnina, koje se sijeku u jednoj točki. Tvrdimo, da je

$$F\left(\frac{L_1}{L_3}, \frac{L_2}{L_3}\right) = 0$$

jednadžba čunja s vrhom u toj točki. Da to pokažemo, pokušajmo L_1, L_2, L_3 izraziti linearno i homogeno (t.j. bez konstantnog člana) pomoću $x - a$, $y - b$, $z - c$. Stavimo dakle

$$L_1 = p_1x + q_1y + r_1z + s_1 = A_1(x - a) + B_1(y - b) + C_1(z - c)$$

$$L_2 = p_2x + q_2y + r_2z + s_2 = A_2(x - a) + B_2(y - b) + C_2(z - c)$$

$$L_3 = p_3x + q_3y + r_3z + s_3 = A_3(x - a) + B_3(y - b) + C_3(z - c)$$

što treba da vrijedi za sve vrijednosti varijabla x, y, z.

Za $x = y = z = 0$ dobijemo

$$s_1 = - A_1a - B_1b - C_1c$$

i analogno za ostale dvije jednadžbe. Odbijemo te jednadžbe od prvotnih, ostaje

$$p_1x + q_1y + r_1z = A_1x + B_1y + C_1z$$

i t.d.

Za $y = z = 0$ izlazi $A_1 = p_1$

" $x = z = 0$ " $B_1 = q_1$

" $x = y = 0$ " $C_1 = r_1$

i analogno za drugu i treću jednadžbu.

Mjesto

$$s_1 = - A_1a - B_1b - C_1c$$

možemo dakle pisati

$$p_1a + q_1b + r_1c + s_1 = 0$$

i analogno

$$p_2a + q_2b + r_2c + s_2 = 0$$

$$p_3a + q_3b + r_3c + s_3 = 0 .$$

Iz toga se vidi, da su a, b, c rješenja triju jednadžbi $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, dakle je točka (a, b, c) sjecište tih ravnina.

Uvrštenje u jednadžbu $F\left(\frac{L_1}{L_3}, \frac{L_2}{L_3}\right) = 0$ daje

$$F\left(\frac{p_1(x-a) + q_1(y-b) + r_1(z-c)}{p_3(x-a) + q_3(y-b) + r_3(z-c)}, \frac{p_2(x-a) + q_2(y-b) + r_2(z-c)}{p_3(x-a) + q_3(y-b) + r_3(z-c)}\right) = 0$$

ili

$$F\left(\frac{p_1\frac{x-a}{z-c}+q_1\frac{y-b}{z-c}+r_1}{p_3\frac{x-a}{z-c}+q_3\frac{y-b}{z-c}+r_3}\ ,\ \frac{p_2\frac{x-a}{z-c}+q_2\frac{y-b}{z-c}+r_2}{p_3\frac{x-a}{z-c}+q_3\frac{y-b}{z-c}+r_3}\right)=0$$

Lijeva strana je dakle funkcija kvocijenata $\frac{x-a}{z-c}$ i $\frac{y-b}{z-c}$ i stoga zaista predstavlja čunj s vrhom (a,b,c). Taj je vrh, kako smo vidjeli, sjecište ravnina $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$.

Da dobijemo sasvim simetrični oblik jednadžbe čunja, trebamo pojam homogenih funkcija. Neka funkcija od jedne ili više varijabla, recimo funkcija $f(x,y,z)$ od tri varijable, zove se homogena n-toga stupnja, ako vrijedi

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$$

To znači dakle, ako sve varijable pomnožimo s nekim brojem λ, onda se može izlučiti n-ta potencija od λ, pa da ostane kao faktor prvotna funkcija. Tako je na pr.

$x^3 + y^2 z$	homogena funkcija	3. stupnja .
$\frac{\sqrt{x^3 + xyz}}{3y^2 - zx}$	" "	stupnja $-\frac{1}{2}$.
$\frac{x}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$	" "	0-toga stupnja i t.d.

Stavimo li $\lambda = \frac{1}{z}$, to iz $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x,y,z)$ izlazi

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = \frac{1}{z^n} f(x,y,z)$$

ili

$$f(x,y,z) = z^n f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right).$$

Podijelimo li dakle jednadžbu

$$f(x,y,z) = 0 ,$$

gdje je f homogena funkcija n-toga stupnja, sa z^n , dobijemo neku funkciju $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = \varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, koja ovisi samo o kvocijentima $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ i jednadžba dobiva oblik

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 ,$$

t.j. znači čunj s vrhom u ishodištu. Obrnuto svaka funkcija kvocijenata $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ homogena je 0-toga stupnja u varijablama x,y,z.

Možemo zbog toga jednadžbu čunja s vrhom u ishodištu staviti u oblik

$$f\,(x,y,z) = 0$$

gdje je f homogena funkcija varijabla. Ako je vrh u točki a, b,c, jednadžba će glasiti

$$f(\,x - a,\;\; y - b,\;\; z - c) = 0$$

ili sasvim općenito

$$f\,(L_1,\; L_2,\; L_3) = 0$$

gdje je opet f homogena funkcija od L_1, L_2, L_3, a vrh je sjecište ravnina $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$.

Dakle :

$$F(L_1,\; L_2) = 0$$

je valjak, ako je F bilo kakva funkcija, a L_1 i L_2 linearne funkcije varijabla x,y,z.

$$f(L_1,\; L_2,\; L_3) = 0$$

je čunj, ako je f homogena funkcija, a L_1, L_2, L_3 linearne funkcije varijabla x,y,z,

Umetak: Postupak kada je krivulja dana kao presječnica ploha

J e d n a d ž b a ~~k u g l e~~ sfere . (kugline plohe)

Kugla je geometrijsko mjesto svih točaka prostora jednako udaljenih od jedne čvrste točke. Ako je središte kugle u ishodištu koordinatnog sustava, tada će za sve točke na kugli vrijediti uvjet

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

t.j. udaljenost od ishodišta svih točaka na kugli jednaka je r. Prema tome je ta relacija jednadžba kugle sa središtem u ishodištu. Obično jednadžbu pišemo u obliku

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{112}$$

Analogno jednadžbu kugle sa središtem u $S(a,b,c)$ izvodimo pomoću formule za udaljenost dviju točaka. Ako je točka $A(x,y,z)$ na površini kugle polumjera r sa središtem u $S\,(a,b,c)$, tada postoji relacija

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r$$

t.j. udaljenost tih dviju točaka jednaka je r. Budući da tu relaciju zadovoljavaju koordinate svih točaka na kugli, to je time dobivena jednadžba kugle. Pišemo je obično

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Ta se jednadžba može dobiti i iz prijašnje pomakom koordinatnog sustava.

Rotacioni i troosni elipsoid

Ako na kugli $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ koordinate svih točaka u smjeru jedne od koordinatnih osi povećamo ili smanjimo pomnoživši dotičnu koordinatu nekim koeficijentom λ onda dobijemo rotacioni elipsoid.

$$\lambda^2 x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Jednadžbu te plohe drugog reda obično pišemo u obliku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 ,$$

gdje su a i b veličine poluosi u smjeru koordinatnih osi. Tu vidimo da je poluos u smjeru osi x jednaka a, dok su dvije druge osi jednake.

Ako je $a > b$, rotacioni se elipsoid zove produljeni i nastaje rotacijom elipse oko velike osi. On je geometrijsko mjesto točaka u prostoru, za koje je zbroj udaljenosti od dviju točaka (žarišta ili fokusa) konstantan. Te su točke žarišta meridijanske elipse. (Krivulja, čijom rotacijom nastaje rotaciono tijelo, zove se meridijanska krivulja. Presjeci okomito na os rotacije su kružnice i zovu se paralele).

Meridijanska elipsa u ravnini xy ima jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ako je $a < b$ rotacioni se elipsoid zove spljošteni. Nastaje rotacijom elipse oko male osi.

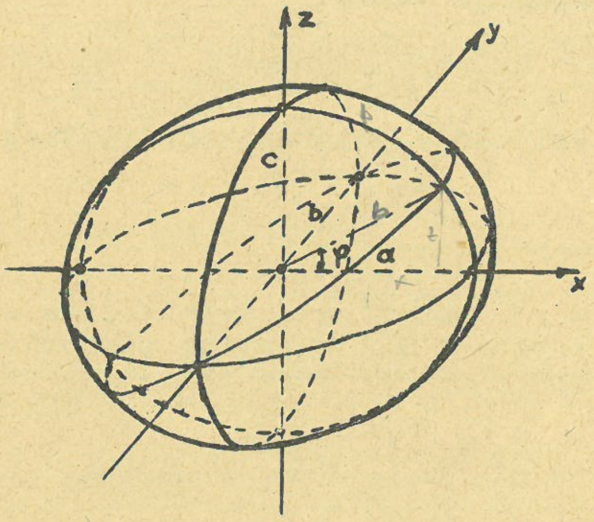
Ako rotacionom elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ pomnožimo sve z-koordinate nekim faktorom, dobijemo troosni elipsoid.

Jednadžbu mu pišemo u obliku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(slika 104) (113)}$$

pretpostavljajući ponajviše, da je $a > b > c$.

Svi ravni presjeci te plohe drugog reda su elipse ili u graničnom slučaju, kada su osi te elipse jednake, kružnice.



SLIKA 104

Na slici 104 prikazan je presjek elipsoida s ravninom xz, $y = 0$. U ishodištu 0 zamišljamo si okomito na ravninu slike os y u kojoj leži os $2b$ elipsoida.

Ako elipsoid presiječemo ravninom okomitom na ravninu xz, čiji trag p sa osi x zatvara kut φ tako, da odsječak između ishodišta i presjecišta p i elipse bude jednak b, ravnina će sjeći elipsoid u kružnici.

Kut φ lako nalazimo:

1) Presjecište pravca $P(x,y)$ leži na elipsi te zadovoljava jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

2) Udaljenost $\overline{OP}$ mora biti jednaka b, t.j. $x^2 + z^2 = b^2$

3) Iz gornjih jednadžbi izračunamo vrijednost nepoznanica x i z te je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{x} = \frac{c}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$ (114)

Elipsoid sijeku u kružnicama i sve ravnine paralelne s našom presječnom ravninom, te ravnine simetrične s njom s obzirom na ravninu yz. Mi smo pri tom pretpostavili $a > b > c$, t.j. kružni presjeci su paralelni sa srednjom osi elipsoida.

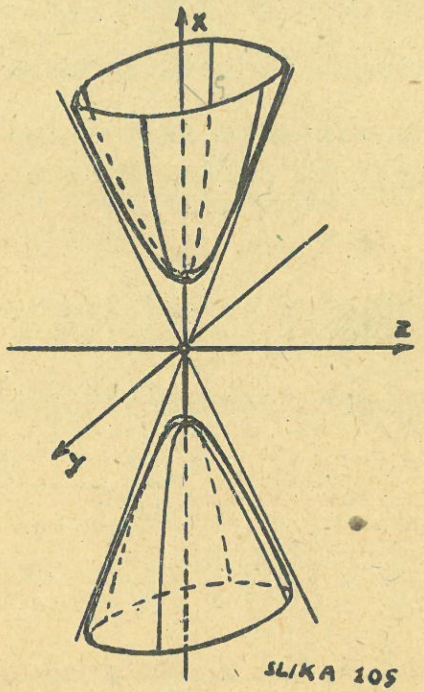
Dvokrilni i jednokrilni hiperboloid

Rotacijom hiperbole oko njene realne osi nastaje rotacioni dvokrilni ili dvoplošni hiperboloid. Uzmimo hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ na ravnini xy. Na slici 105 prikazan je presjek rotacionog dvokrilnog hiperboloida u nekoj ravnini $x = n$. Svaka ravnina, u kojoj leži os x, siječe rotacioni dvokrilni hiperboloid u jednakoj hiperboli. Jednadžba hiperbole u jednoj od tih ravnina bila bi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{b^2} = 1$, gdje je ρ ordinata točaka hiperbole u toj ravnini, te je jednak ordinati y odgovarajuće točke na hiperboli u ravnini xy. U prostornim koordinatama x,y,z za svaki ρ vrijedi $\rho^2 = y^2 + z^2$, te prema tome jednadžbu rotacionog dvokrilnog hiperboloida dobijemo, ako mjesto ρ^2 pišemo $y^2 + z^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (115)$$

(slika 105)

Analognim postupkom izvodimo sve rotacione plohe, koje nastaju rotacijom oko jedne od koordinatnih osi.



SLIKA 105

Ako u jednadžbi rotacionog dvokrilnog hiperboloida z-koordinate pomnožimo nekim koeficijentom λ dobijemo opći dvokrilni hiperboloid :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (116)$$

gdje smo mjesto $\frac{\lambda}{b}$ pisali $\frac{1}{c}$.

Presjeci okomiti na $|x|>a$ os x ovog dvokrilnog hiperboloida su elipse. Rotacioni dvokrilni hiperboloid je posebni slučaj dvokrilnog hiperboloida, kad su ti presjeci kružnice.

Rotacijom hiperbole oko njene imaginarne osi nastaje rotacioni jednokrilni (jednoplošni) hiperboloid. Uzmimo hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Njena imaginarna os nalazi se u osi y. Ponovimo postupak traženja jednadžbe rotacione plohe :

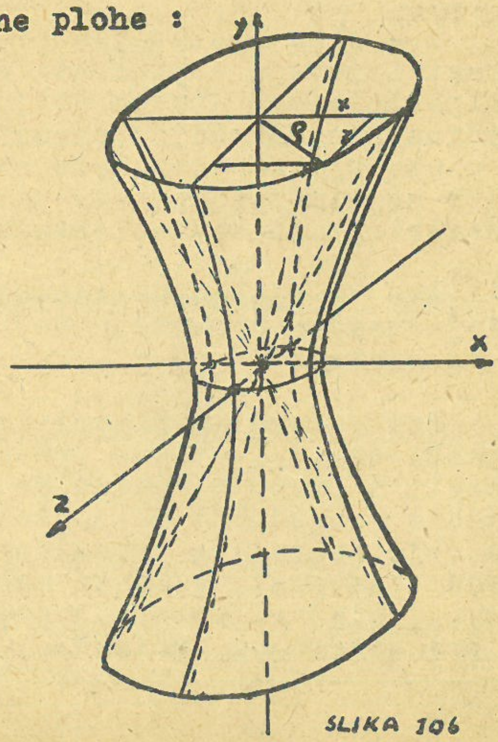
U nekoj ravnini kroz os y vrijedit će :

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Za ρ vrijedi $\rho^2 = z^2 + x^2$. Jednadžba hiperboloida bit će dakle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (117)$$

(slika 106)



SLIKA 106

Množenjem z-koordinata s nekim koeficijentom dobijemo opću jednadžbu jednokrilnog hiperboloida ($\frac{\lambda^2}{a^2}$ označimo sa $\frac{1}{c^2}$) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (118)$$

Analogno bi rotacijom hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ oko njene imaginarne osi koja leži u osi z dobili rotacioni jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Množenjem y-koordinata koeficijentom λ dobijemo jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Tom hiperboloidu su svi presjeci paralelni sa ravninom xy, elipse (ili u slučaju rotacionog, kada je $a = b$, kružnice).

Jednadžbu jednokrilnog hiperboloida možemo pisati i :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) \;/\cdot\lambda$$

$$\lambda\cdot\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\cdot\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Jednadžbu jednokrilnog hiperboloida u ovom obliku možemo rastaviti na dva sustava od po dvije linearne jednadžbe :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{x}{a}\right), & \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \lambda\cdot\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ \lambda\cdot\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{x}{a}\,; & \lambda\cdot\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{x}{a} \end{array}\right\}$$

U svakom sustavu su produkti lijevih strana obih jednadžbi jednaki lijevoj, a produkti desnih strana desnoj strani jednadžbe hiperboloida. Sistem dviju linearnih jednadžbi u prostornim koordinatama određuje pravac. Mijenjajući neodređeni koeficijent λ u oba sistema dobijemo neizmjerno mnogo pravaca. Koordinate točaka na tim pravcima su simultana (istodobno) rješenja tih jednadžbi, t.j. zadovoljavaju obje jednadžbe.

Ako ta rješenja zadovoljavaju obje jednadžbe, zadovoljit će i jednadžbu hiperboloida, koja je produkt jednadžbi prvog ili drugog sistema.

Prema tome ti pravci imaju sve svoje točke zajedničke s hiperboloidom, t.j. ti se pravci nalaze na hiperboloidu. Može se pokazati i obrnuto, naime da svakoj točki na hiperboloidu pripada jedna vrijednost od λ tako, da koordinate te točke zadovoljavaju obje jednadžbe prvog sustava, t.j. da točka leži na nekom pravcu toga sustava, a za neku drugu vrijednost od λ zadovoljen je drugi sustav linearnih jednadžbi, t.j. kroz tu točku ide i jedan pravac drugog sustava.

Kažemo, da je jednokrilni hiperboloid pravčasta ploha, te da na jednokrilnom hiperboloidu postoje dvije familije pravaca.

Hiperbolni paraboloid

Ako tjeme parabole $z^2 = -2\cdot p_1 x$ u ravnini xz klizi po paraboli $y^2 = 2\cdot p_2 x$ u ravnini xy, tako da parabola $z^2 = -2\cdot p_1 x$ ostaje stalno paralelna s ravninom xz, ona će opisati plohu drugog reda, koja se zove hiperbolni paraboloid.

Da dobijemo njenu jednadžbu, zamislimo parabolu $z^2 = -2\, p_1 x$ pomaknutu paralelno u položaj, gdje njeno tjeme ima koordinate x_o, y_o i $z_o = 0$. Tjeme se nalazi na paraboli $y^2 = 2\cdot p_2 x$, dakle vrijedi $y_o^2 = 2\cdot p_2 x_o$. Ta pomaknuta hiperbola nalazi se dakle u ravnini $y = y_o$, a budući da tjeme ima apscisu $x = x_o$, to je jednadžba sada $z^2 = -2\cdot p_1 (x - x_o)$.

Ta jednadžba vrijedi za svaku njenu točku (i dakako i za točke njene projekcije na xz - ravninu, jer jednadžba ne sadrži varijablu y). Osim toga je za svaku njenu točku $y = y_o$ ili $y^2 = y_o^2 = 2\cdot p_2 x_o$ iz čega je $x_o = \frac{y^2}{2\cdot p_2}$. Ovo uvršteno daje

$$z^2 = -2p_1\left(x - \frac{y^2}{2\cdot p_2}\right) \quad \text{ili} \quad p_1 y^2 - p_2 z^2 = 2\cdot p_1 p_2 x .$$

Ta relacija dakle vrijedi za bilo koju točku parabole $z^2 = -2\cdot p_1 x$, koja je klizeći po paraboli $y^2 = 2\cdot p_2 x$ došla u bilo koji svoj pomaknuti položaj. To znači, relacija vrijedi za svaku točku plohe i predstavlja dakle jednadžbu te plohe.

S nešto drugim oznakama pišemo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = c\cdot x \qquad \text{(slika 107)} \qquad (119)$$

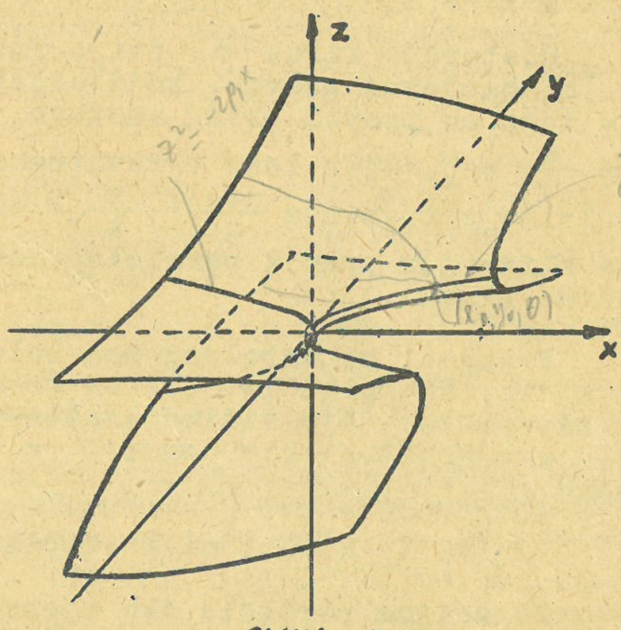
Ta ploha nastaje i onda, kada pravac klizi po dva mimosmjerna pravca ostajući pri tom paralelan s nekom ravninom.

I jednadžbu hiperbolnog paraboloida možemo rastaviti na dva sistema linearnih jednadžbi :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = c\cdot x$$

$$\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{z}{b}\right) = cx \quad /\cdot\lambda$$

$$\lambda\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{z}{b}\right) = \lambda\cdot cx$$



SLIKA 107

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = \lambda \quad , \qquad \frac{y}{a} - \frac{z}{b} = \lambda$$

$$\lambda\left(\frac{y}{a} - \frac{z}{b}\right) = c\cdot x \quad ; \qquad \lambda\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right) = c\cdot x \quad ;$$

Čime smo dokazali da je hiperbolni paraboloid pravčasta ploha, na kojoj postoje dvije familije pravaca. Kroz neku točku na hiperbolnom paraboloidu možemo opet povući 2 pravca, čije su sve točke na toj plohi.

Uzmimo sada primjerice pravce predočene prvim sustavom jednadžbi i tražimo, kakvu krivulju čine njihova probodišta s ravninom $\frac{y}{a} - \frac{z}{b} = K$, gdje je K neka konstanta. Probodište takvog pravca dobijemo, ako rješimo jednadžbe

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = \lambda \quad ; \quad \lambda\left(\frac{y}{a} - \frac{z}{b}\right) = c\cdot x \quad ; \quad \frac{y}{a} - \frac{z}{b} = K$$

Rezultat glasi :

$$x = \frac{\lambda K}{c} \; ; \quad y = \frac{a}{2}(\lambda + K) \; ; \quad z = \frac{b}{2}(\lambda - c)$$

Ako λ smatramo promjenljivim. dobijemo niz tih probodišta. No ove tri jednadžbe predočuju x,y,z kao linearne funkcije parametra λ , a takve tri jednadžbe znače pravac u parametarskom obliku. Eliminacijom parametra λ između, recimo, prve i druge, pa prve i treće jednadžbe dobijemo

$$acx - 2Ky + a\cdot K^2 = 0 \quad ; \quad bcx - 2\cdot K\cdot z + b\cdot K^2 = 0 \, ,$$

a to su dvije linearne jednadžbe, koje znače pravac.

Odaberemo li za K dvije različite vrijednosti, dobijemo dva (mimosmjerna pravca, koji sijeku sve pravce prvog sustava. Osim toga su pravci prvog sustava svi paralelni s ravninom $\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0$, jer leže u ravninama $\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = \lambda$, koje su sve paralelne s ravninom $\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0$. Ti pravci dakle nastaju zaista klizanjem pravca paralelno nekom ravninom uzduž dva mimosmjerna pravca.

Presjeci hiperbolnog paraboloida paralelni sa ravninom xy i xz su parabole, dok su presjeci paralelni sa ravninom yz hiperbole (što vidimo uvrštavajući jednadžbe tih ravnina t.j. $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ u jednadžbu paraboloida).

Rotacioni i eliptični paraboloid.

Rotacijom parabole oko njene osi nastaje ploha drugog reda, koja se zove rotacioni paraboloid. Jednadžbu rotacionog paraboloida, koji nastaje rotacijom parabole $y^2 = 2\cdot px$ oko osi x

izvodimo na poznati način zamijenivši y^2 sa ρ^2, gdje je $\rho^2 = y^2 + z^2$.

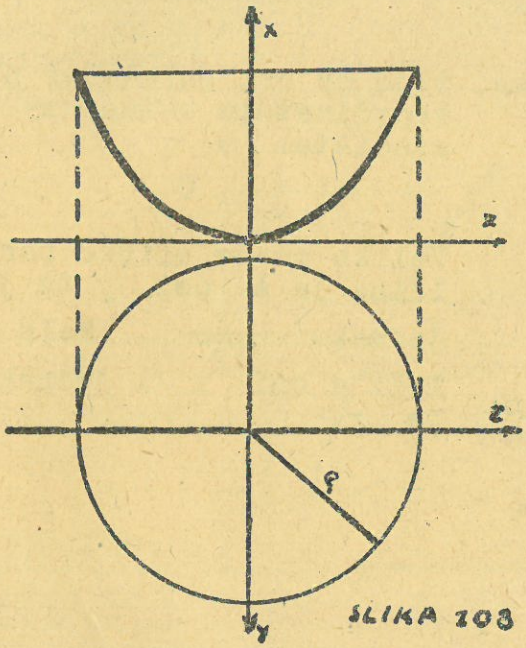
Jednadžba dakle glasi :

$$y^2 + z^2 = 2 \cdot px \quad \text{(slika 108)} \tag{120}$$

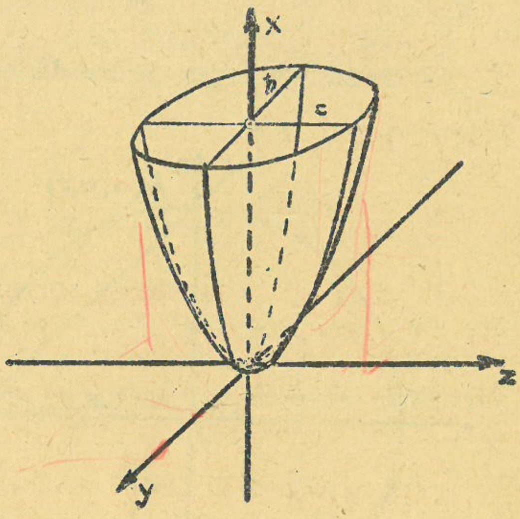
Množenjem z-koordinata s nekim koeficijentom dobijemo eliptični paraboloid, čiju jednadžbu možemo pisati :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = c \cdot x \quad \text{(slika 109)} \tag{121}$$

Presjeci eliptičnog paraboloida s ravninama $x = \text{const.}$ su elipse.



SLIKA 108



SLIKA 109

Primjer :

Zadana je kugla $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ i ravnina okomita na ravninu xz koja siječe kuglu u točkama $A(0,0,r)$ (slika 110) i $B(r,0,0)$. Tražimo jednadžbu projekcije presječnice na ravninu xy .

Jednadžba zadane ravnine bit će $\frac{x}{r} + \frac{z}{r} = 1$. Ravnina je paralelna s osi y te prema tome ne sadrži varijablu y . Jednadžbe $\frac{x}{r} + \frac{z}{r} = 1$ i $x^2 + y^2 + z^2 = r$ određuju krivulju presječnicu u prostoru. Ta krivulja je sigurno kružnica, jer ravnina siječe kuglu samo u kružnici. Jednadžbu projekcije na ravninu xy naći ćemo eliminacijom varijable z . Iz jednadžbe ravnine izračunamo : $z = r - x$.

Uvrštavanjem u jednadžbu kugle izlazi

$$x^2 + y^2 + (r - x)^2 = r^2$$

i dalje

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2\,rx + x^2 = r^2$$

$$2\cdot x^2 - 2\cdot rx + y^2 = 0 \quad /:2$$

$$x^2 - rx + \frac{y^2}{2} = 0$$

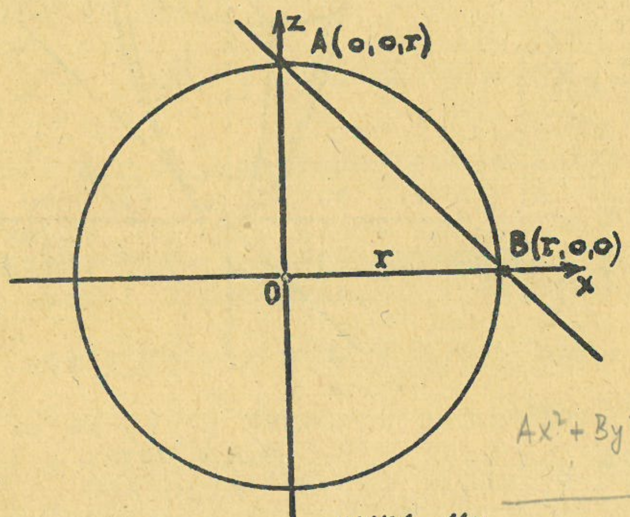
$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad /:\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\frac{\left(x - \frac{r}{2}\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Rezultat je jednadžba elipse, čije su osi paralelne na koordinatnim osima xy sa središtem u

$$\left(\frac{r}{2}\,,\,0\right).$$

Velika os te elipse paralelna je sa osi y te je jednaka $\frac{2r}{\sqrt{2}}$. Mala os leži u osi x i jednaka je r.



SLIKA 110

$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+$
$+2Iz+K=0.$

21. Parcijalne derivacije

U prirodnim naukama se često susrećemo s promjenjivim veličinama, koje ovise o dvije neovisne varijable. Tako na pr. volumen valjka ovisi o polumjeru baze i o visini. Općenito takav funkcionalni odnos označujemo sa $z = f(x,y)$, gdje su x i y neovisne varijable a z ovisna varijabla ili funkcija. Funkcije dviju varijabla prikazujemo u prostornom koordinatnom sustavu. Nekom jednadžbom $z = f(x,y)$ zadana je u tom koordinatnom sistemu jedna ploha sastavljena iz točaka, koje dobijemo, ako u svakoj točki ravnine x,y, nanesemo pripadnu visinu (aplikatu) z.

Neprekinutost

Funkciju $z = f(x,y)$ možemo derivirati po jednoj od nezavisnih varijabla, smatrajući drugu kod deriviranja konstantom. Takva derivacija zove se parcijalna derivacija, te razlikujemo parcijalnu derivaciju po x i parcijalnu derivaciju po y. Parcijalnu derivaciju po x označujemo

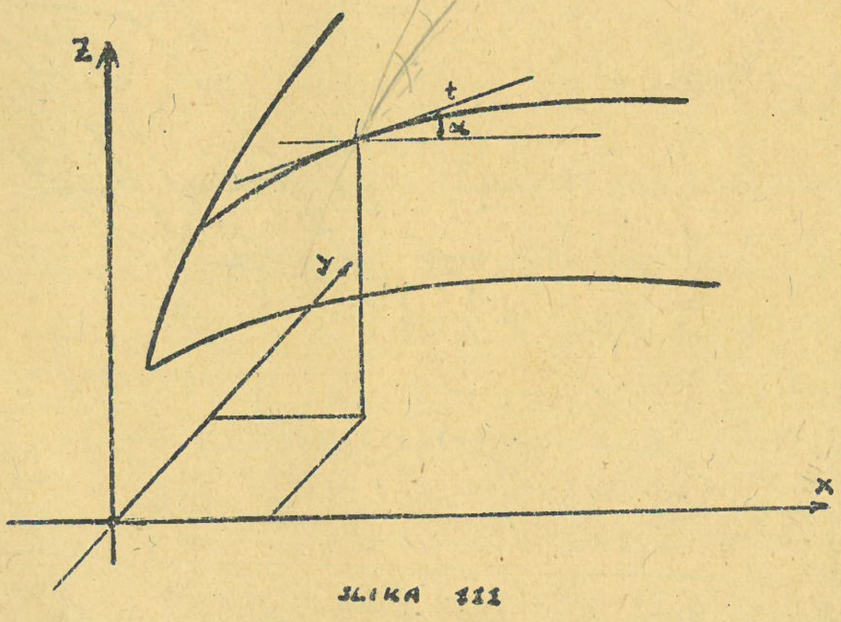
$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (122)$$

Analogno je parcijalna derivacija po y funkcije $z = f(x,y)$

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (123)$$

gdje $f(x,y+\Delta y) - f(x,y)$ znači prirast funkcije $z = f(x,y)$, kad varijabla y dobije prirast Δy, a varijabla x ostane nepromijenjena.

Geometrijski takva parcijalna derivacija znači gradijent tangente na krivulju presječnicu plohe zadane sa $z = f(x,y)$ i ravnine paralelne s ravninom xz, ako smo derivirali po x odnosno ravnine yz, ako smo derivirali po y. Na slici 111 je $tg\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$.



SLIKA 111

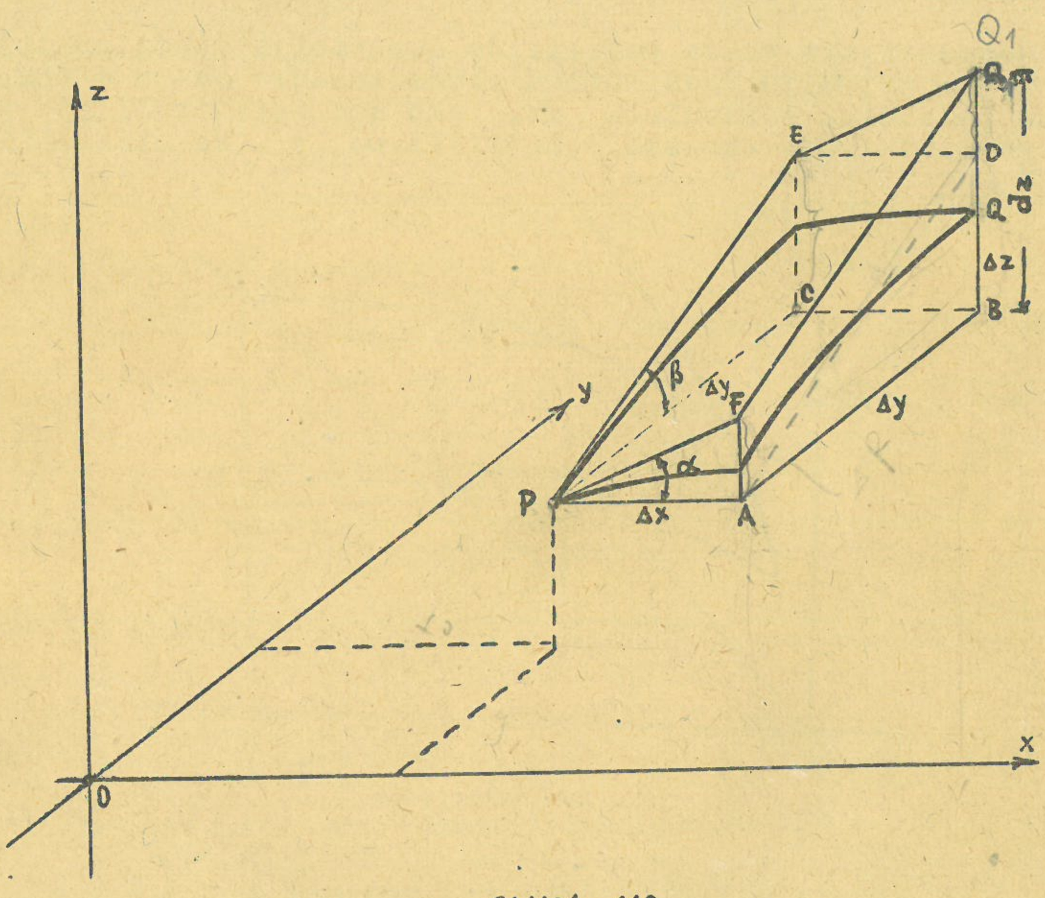
T o t a l n i   d i f e r e n c i j a l

Neka je $z = f(x,y)$ derivabilna funkcija, t.j. neka postoje obje parcijalne derivacije. Položimo li kroz neku točku na plohi, koja je predočena tom funkcijom, razne ravnine, dobit ćemo niz presječnih krivulja. Tangente tih krivulja u toj točki leže u jednoj ravnini, koja se zove tangencijalna (ili tangentna) ravnina. Da je tomu tako, kaže nam zorna predodžba, a može se to i strogo dokazati.

Pođemo li od točke $P(x,y,z)$ na plohi i povećamo koordinata x,y za Δx, Δy, doći ćemo na plohi do neke točke Q s koordinatama $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, gdje je dakle Δz

promjena z-koordinate. Pomiče li se točka na tangencijalnoj ravnini, z koordinata će se promijeniti za neku drugu vrijednost, koju zovemo dz ili totalni diferencijal te funkcije. Taj se diferencijal može izraziti pomoću parcijalnih derivacija (slika 112). Prema slici 112 je PA = Δx, PC = AB = Δy, BQ = Δz, BQ_1 = dz. Paralelogram PFQ_1E leži u tangencijalnoj ravnini, a PF i PE su tangente na krivulje položene kroz točku P paralelno s koordinatnim ravninama xz odnosno yz. Stoga je tangens kuta FPA= α jednak $\frac{\partial f}{\partial x}$, a tangens kuta EPC = β jednak $\frac{\partial f}{\partial y}$. Vidi se dalje, da je AF = DQ_1 i CE = BD, pa možemo staviti

$$dz = BQ_1 = BD + DQ_1 = AF + CE$$



SLIKA 112

No iz trokuta PAF i PCE izlazi

$$AF = \Delta x \cdot tg\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x \quad ; \quad CE = \Delta y \cdot tg\beta = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y ,$$

dakle

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y .$$

$\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ zovu se djelomični ili parcijalni diferencijali.

Umjesto diferencija Δx i Δy neovisnih varijabla možemo pisati dx i dy iz analognih razloga kao kod funkcija jedne varijable. Naime, ako je funkcija $f(x,y) \equiv x$, dakle $z = x$, bit će

$$dz = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x$$

No z i x je ovdje isto, dakle $dz = dx$ i stoga $\Delta x = dx$. Isto tako dobijemo $\Delta y = dy$. Pišemo stoga za totalni diferencijal

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy \qquad (124)$$

već prema tome, da li nam je zgodnije parcijalne derivacije označiti sa $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ili sa $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Budući da se za vrlo malene diferencije Δx, Δy tangencijalna ravnina gotovo podudara s dotičnim dijelom plohe, to je za male diferencije i diferencijale $\Delta z \doteq dz$, t.j.

$$\Delta z \doteq \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$$

(Na slici to dakako nije, jer su diferencije uzete dosta velike.)

Kod funkcija od više nego dvije varijable, na pr. $u = f(x,y,z)$, definiramo totalni diferencijal analogno:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz \qquad (125)$$

Geometrijska interpretacija moguća je u prostoru od 4 dimenzije, u što ovdje ne ulazimo.

I ovdje vrijedi za malene diferencije približna relacija

$$\Delta u \doteq \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z$$

Vidi se, da će i za funkcije od više varijabla vrijediti pravilo, da pronalaženjem približnih relacija za vrlo malene diferencije dobivamo točne relacije između diferencijala.

22. Određivanje pogrešaka neizravno mjerenih veličina

Mjerimo li neku veličinu neizravno, t.j. tako, da odredimo neke druge veličine, o kojima tražena veličina ovisi na poznat način, htjet ćemo znati, koji je upliv netočnosti mjerenja. Ako znamo, da su počinjene pogreške kod izravnog mjerenja veličina x,y,z jednake Δx, Δy, Δz, onda je pogreška Δu veličine $u = f(x,y,z)$ približno jednaka

$$\Delta u \doteq \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z$$

Na pr. volumen paralelepipeda je

$$V = abc\ ,$$

gdje su a,b,c bridovi. Počinimo li mjereći bridove pogreške Δa, Δb, Δc, bit će pogreška ΔV volumena

$$\Delta V \doteq bc \cdot \Delta a + ac \cdot \Delta b + ab \cdot \Delta c$$

Ove pogreške zovemo apsolutnim pogreškama. Relativne pogreške se dobiju, ako se apsolutne pogreške razdijele sa samom veličinom. Relativne su dakle pogreške $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$, $\frac{\Delta V}{V}$ Pomnoži li se relativna pogreška sa 100, dobije se procentualna pogreška.

Vidi se da je

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{abc} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \qquad (126)$$

Relativna pogreška volumena paralelepipeda je dakle zbroj relativnih pogrešaka bridova.

Za volumen rotacionog valjka će biti

$$V = r^2 \pi v$$

dakle

$$\Delta V = 2 \cdot r\pi \cdot v \cdot \Delta r \quad + \quad r^2 \pi \cdot \Delta v$$

za apsolutne pogreške, a

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{r^2 \pi v} \doteq 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta v}{v}$$

za relativne vidi se, da ovdje relativna pogreška polumjera jače utječe od relativne pogreške visine. Za volumen kocke će biti

$$V = a^3$$

$$\Delta V \doteq 3\ a^2\ \Delta a$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

Ako ne znamo, kojega su predznaka pogreške pojedinih veličina, ali znamo, koju najveću apsolutnu vrijednost mogu imati, onda ćemo najveću moguću apsolutnu vrijednost pogreške tražene veličine dobiti zbrajanjem apsolutnih vrijednosti pojedinih članova, t.j.

$$|\Delta u| \doteq \left|\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z\right| \qquad (127)$$

Taj se slučaj često pojavljuje, jer nam je obično poznato, za koliko možemo kod pojedinog mjerenja najviše pogrešiti, ali ne znamo, jesmo li izmjerili previše ili premalo.

pro mille

Primjer : Ako je mjerenje duljina moguće točno na 1‰ ,to znači na 0,1%,onda je dakle relativna pogreška za duljine 0,001. Mjereći ovako promjer i visina rotacionog čunja bit će

$$V = \frac{r^2 \pi v}{3} = \frac{D^2 \pi v}{12} \qquad (D = \text{promjer baze})$$

$$\Delta V \doteq \frac{\pi \cancel{V}}{6} \cdot DV \cdot \Delta D + \frac{D^2 \pi}{\cancel{6}\ 12} \Delta V \quad = \frac{\pi v D}{6} \Delta D + \frac{\pi D^2}{12} \Delta V$$

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \doteq \left| 2 \frac{\Delta D}{D} \right| + \left| \frac{\Delta V}{V} \right|$$

Dakle

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \doteq 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001 = 0{,}003$$

Relativna pogreška volumena je dakle najviše 0,003 ili procentualna je 0,3% ili 3‰ . pro mille

1. $f(x,y)$ ima neprekinute parc. derivacije f'_x, f'_y
2. $\varphi(t), \psi(t)$ neka su derivabilne

23. Složene funkcije

Neka je zadana neka funkcija $z = f(x,y)$, gdje x i y nisu neovisne varijable, nego su sa svoje strane funkcije neke neovisne varijable t , dakle $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Time je z postao složena funkcija od t, dakle

$$z = f(x,y) = f\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right] = F(t)$$

Promijeni li se t za Δt, promijenit će se x za Δx, y za Δy i z za Δz , tako da je

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y) =$$

$$= f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

1

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta \cancel{z}\ t}$$

U prvom razlomku desno smatramo drugu varijablu fiksiranu na vrijednosti $y + \Delta y$, pa možemo smatrati f kao funkciju samo od x . Derivacija te funkcije po x je onda $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ i to $f'_x(x, y + \Delta y)$, t.j. druga varijabla ima vrijednost $y + \Delta y$. Teorem o srednjoj vrijednosti za funkcije od jedne varijable nam onda daje, da je

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x + \vartheta_1 \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

$$0 < \vartheta_1 < 1$$

Analogno je

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f'_y(x,y+\vartheta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y$$

$$0<\vartheta_2<1$$

Dobijemo dakle

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x+\vartheta_1\cdot\Delta x,y+\Delta y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x,y+\vartheta_2\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Kada teži $\Delta t\to 0$ teži i $\Delta x\to 0$ i $\Delta y\to 0$ (jer pretpostavljamo, da su φ i ψ derivabilne, dakle i neprekinute funkcije), a $f'_x(x+\vartheta_1\Delta x,y+\Delta y)\to f'_x(x,y)$ i $f'_y(x,y+\vartheta_2\Delta y)\to f'_y(x,y)$, jer pretpostavljamo, da funkcija $f(x,y)$ ima neprekinute prve parcijalne derivacije. Pri tom je neprekinutost funkcije od dvije (ili više) varijabla definirana tako, da mora biti

Neprekinutost

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,y)$$

ili, što je isto $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$, $\left[\text{jer je } \Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\right]$

ako Δx i Δy teže prema nuli, bilo to istodobno na bilo koji način, ili jedan za drugim u bilo kojem poredaju. To se može izraziti i ovako : Za svaki bilo kako maleni pozitivni ε mora postojati neki (dovoljno maleni) pozitivni δ tako, da za svaki Δx i Δy, za koji je $|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$ bude i $|\Delta z|<\varepsilon$

Vidimo dakle, da će granični prijelaz $\Delta t\to 0$ dati

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x\frac{dx}{dt}+f'_y\frac{dy}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}} = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi' + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' \qquad (128)$$

Diferencijal funkcije $F(t)$ je dakle

$$dz=\frac{dF}{dt}\,dt=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot dt=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

$z=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$
$x_1=\varphi_1(t)$
$x_2=\varphi_2(t)$
$x_n=\varphi_n(t)$

i identičan je dakle s formulom za totalni diferencijal, kada su x i y neovisne varijable.

Ako su x i y funkcije od više, recimo od 2 varijable t, u, dakle

$$dz=\sum^n\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}dt=\sum^n\frac{\partial z}{\partial x_i}dx_i$$

$$x = \varphi(t,u) \;;\quad y = \psi(t,u)\,,$$

onda postaje $f(x,y)$ složena funkcija od t, u, t.j.

$$z = f(x,y) = f\left[\varphi(t,u),\, \psi(t,u)\right] = F(t,u)$$

Da dobijemo parcijalnu derivaciju po t, jednostavno smatramo <u>u</u> konstantom, čime smo problem sveli na predašnji slučaj, i deriviramo po t. Derivacije od φ i ψ po t zvat će se sada parcijalne derivacije, dakle :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Analogno je

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \tag{129}$$

Ako x i y ovise još i o nekoj trećoj varijabli v, bit će dalje $z = f(x,y)$ $x = \varphi(t,u,v)$ $y = \psi(t,u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Totalni diferencijal po varijablama t, u, v glasi

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot dt +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cdot dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\,dt + \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv\right) +$$

$$+ \cancel{\frac{\partial z}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)} = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy + \cancel{\frac{\partial z}{\partial z}\cdot dz}$$

Dakle : formula za totalni diferencijal vrijedi bez obzira na to, da li su varijable x,y neovisne varijable ili ovise sa svoje strane još o nekim drugim varijablama.

Primjeri:

Deriviranje složenih funkcija može se na pr. primijeniti na deriviranje funkcije

$$y = \left[\varphi(x)\right]^{\psi(x)}$$

Umjesto da se služimo logaritamskim deriviranjem smatrat ćemo $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ varijablama u, v, dakle

$$y = u^{v} \;;\quad u = \varphi(x),\quad v = \psi(x)$$

Dobijemo :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \cdot u^{v-1} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u^{v} \cdot \ln u$$

$$\frac{du}{dx} = \varphi' \qquad \frac{dv}{dy} = \psi'$$ dakle

$$\frac{dy}{d\cancel{x}} = v \cdot u^{v-1} \cdot \varphi' + u^{v} \cdot \ln u \cdot \psi' =$$

$$= u^{v} \left(\frac{v}{u} \varphi' + \psi' \ln u \right) =$$

$$= \varphi^{\psi} \left(\frac{\psi}{\varphi} \varphi' + \psi' \ln \varphi \right) \qquad (130)$$

Isti rezultat izlazi logaritamskim deriviranjem :

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^{v} \cdot \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = \varphi^{\psi} \left(\psi' \ln \varphi + \psi \frac{\varphi'}{\varphi} \right)$$

24. Implicitne funkcije

TEOREM Jednadžba

$$F(x,y,z) = 0$$

definira implicitno funkciju $z = f(x,y)$,ako postoje neprekinute derivacije F'_x , F'_y , F'_z i ako je $F'_z \neq 0$. (U dokaz toga stavka ne ulazimo.)

Da nađemo parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, postupamo ovako:

Deriviramo jednadžbu parcijalno po x , držeći y konstantnim i smatrajući z funkcijom od x,y . Derivacija desne strane je dakako nula, a lijeva strana je složena funkcija od x,y, pa izlazi

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ili

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

dakle

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (131)$$

Analogno se dobije

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{132}$$

Možemo se poslužiti i totalnim diferencijalom. Totalni diferencijal lijeve strane je

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz$$

provedeno na str 153.

bez obzira na to, što smatramo z funkcijom od x,y. Totalni diferencijal desne strane je dakako nula. Dakle

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz = 0$$

ili

$$F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz = 0$$

što riješeno po dz daje

$$dz = - \frac{F'_x}{F'_z} \cdot dx \overset{-}{\cancel{+}} \frac{F'_y}{F'_z} \cdot dy$$

Usporedimo li to sa

$$dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

dobijemo iste formule za parcijalne derivacije kao gore. (Diferencijali dx i dy neovisnih varijabla su po volji odaberivi. Za $dy = 0$ izlazi formula za f'_x, a za $dx = 0$ formula f'_y.)

Kao specijalni slučaj određivanja parcijalnih derivacija implicitno zadanih funkcija može se shvatiti određivanje obične derivacije implicitno zadane funkcije jedne varijable. Ako je dakle funkcija $y = f(x)$ zadana u implicitnom obliku $F(x,y) = 0$, može se postupati ovako : shvatimo $F(x,y)$ kao složenu funkciju od x, smatrajući y kao funkciju od x i deriviramo po x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ili

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$$

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Ili : tvorimo totalni diferencijal obih strana

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy = 0$$

iz toga

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Oba postupka su primjenljiva i onda, ako nisu svi članovi jednadžbe preneseni na lijevu stranu. Treba onda samo svaku stranu derivirati kao složenu funkciju po x , odnosno tvoriti totalni diferencijal na obim stranama .

Na pr.
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$2x + 2\,y\,y' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

25. Teorem srednje vrijednosti.

U teoremu srednje vrijednosti

$t = f(x,y)$ ima neprekinute parc. der. $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$

$$F(a + h) - F(a) = h \cdot F'(a + \vartheta h)$$

stavimo $a = 0$, $h = 1$, pa dobijemo

$$F(1) - F(0) = F'(\vartheta) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Smatrajmo izraz

$$f(x + h\cdot\Delta x,\ y + h\,\Delta y) = F(h)$$

složenom funkcijom od h i primijenimo teorem o srednjoj vrijednosti.

$$F'(h) = f'_x(x + h\cdot\Delta x,\ y + h\cdot\Delta y)\ \frac{d(x + h\cdot\Delta x)}{dh} +$$

$$+ f'_y(x + h\,\Delta x,\ y + h\,\Delta\, y)\ \frac{d(y + h\cdot\Delta y)}{dh} =$$

$$= f'_x(x + h\cdot\Delta x,\ y + h\cdot\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x + h\cdot\Delta x,\ y + h\cdot\Delta y)\,\Delta y.$$

Teorem srednje vrijednosti za funkciju $F(h)$ dakle daje za $h = 1$

$F(1) - F(0) =$

$$= \Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y) = f'_x(x + \vartheta\Delta x,\ y + \vartheta\Delta y)\cdot\Delta x +$$
$$+ f'_y\,(x + \vartheta\Delta x,\ y + \vartheta\cdot\Delta y)\cdot\Delta y$$

Analogno vrijedi za funkcije od bilo koliko varijabla.

$\Delta x = h$, $\Delta y = k$

$f(x+h, y+k) = f(x,y) + f'_x(x+\vartheta h, y+\vartheta k)\cdot h + f'_y(x+\vartheta h, y+\vartheta k)\cdot k$

$u(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n) = u(x_1, \dots x_n) + h_1 u'_{x_1}(x_1+\vartheta h_1, \dots x_n+\vartheta h_n) + \dots + h_n u'_{x_n}(x_1+\vartheta h_1, \dots, x_n+\vartheta h_n)$.

26. Jednadžbe tangencijalne ravnine i normale

Vidjeli smo, da vrijedi

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

Ako je $z = f(x,y)$ promatrana ploha i ako koordinate točke P (vidi sliku 112.) označimo sa x_0, y_0, z_0, dok koordinate po volji odaberive pomične točke Q_1 na tangencijalnoj ravnini označimo sa x,y,z, onda je očito

$$dx = x - x_0 , \quad dy = y - y_0 , \quad dz = z - z_0$$

Vrijedi dakle

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot (y - y_0) , \qquad (133)$$

gdje indeks nula kod derivacija znači, da u izraze za derivacije treba uvrstiti koordinate dirališta P, jer su to derivacije na tom mjestu plohe. Dobivena jednadžba je linearna i zadovoljavaju je sve točke tangencijalne ravnine. To je dakle jednadžba te ravnine.

U slučaju implicitno zadane funkcije

$$F(x,y,z) = 0$$

vrijedi

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz = 0$$

dakle je jednadžba tangencijalne ravnine

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \cdot (z - z_0) = 0 \qquad (134)$$

ili

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_0\right] = 0$$

To je dakako jednadžba ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ s koeficijentima

$$A = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 , \quad B = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 , \quad C = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 , \quad D = -\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_0\right]$$

Jednadžbe normale na tu ravninu kroz diralište moraju glasiti

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \qquad (135)$$

ili

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0} \qquad (136)$$

Slučaj eksplicitno zadane funkcije $z = f(x,y)$ može se smatrati specijalnim slučajem implicitno zadane funkcije :

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$$

dakle

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

Iz toga se dobije već prije izvedena jednadžba tangencijalne ravnine, a jednadžne normale glase

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = -(z - z_0)$$

Primjer

Opća jednadžba 2.stupnja sa 3 varijable

$$F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

znači plohu 2. reda, koja je u nekom općem položaju. Odredit ćemo jednadžbu tangencijalne ravnine.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\cdot Ax + Dy + Fz + G \, ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\cdot By + Dx + Ez + H \, ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\cdot Cz + Ey + Fx + J \, ,$$

dakle je tražena jednadžba

$$(x - x_0)(2\cdot Ax_0 + Dy_0 + Fz_0 + G) + (y - y_0)(2\cdot By_0 + Dx_0 + Ez_0 + H) +$$
$$+ (z - z_0)(2\cdot Cz_0 + Ey_0 + Fx_0 + J) = 0$$

Budući da su x_0, y_0, z_0 koordinate dirališta, to one moraju zadovoljavati jednadžbu plohe, t.j. mora biti

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dx_0y_0 + Ey_0z_0 + Fx_0z_0 + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0$$

Zbrojimo li ovu jednadžbu i sa 2 podijeljenu jednadžbu tangencijalne ravnine, to izlazi poslije sređivanja spretniji oblik jednadžbe tangencijalne ravnine :

$$Axx_o + Byy_o + Czz_o + D\,\frac{xy_o + x_oy}{2} + E\,\frac{yz_o + y_oz}{2} + F\,\frac{x_oz + xz_o}{2} +$$

$$+ G\,\frac{x + x_o}{2} + H\,\frac{y + y_o}{2} + J\,\frac{z + z_o}{2} + K = 0$$

Iz toga razabiramo ovo pravilo, koje vrijedi <u>samo</u> za jednadžbe 2.stupnja (plohe 2.reda) !

Kvadrati x^2, y^2, z^2 nadomjeste se produktima xx_o, yy_o, zz_o

Produkti xy i t.d. nadomjeste se sa $\frac{x\cdot y_o + x_o y}{2}$ i t.d.

U linearnim članovima nadomjesti se x i t.d. sa $\frac{x + x_o}{2}$ i t.d.

Konstantni član ostaje netaknut.

Isto to pravilo vrijedi i za jednadžbe tangente krivulja 2.reda, što se može izvesti analogno. Pri tom treba uočiti, da jednadžba tangente na krivulju glasi

$$y - y_o = f'(x_o)\cdot(x - x_o) ,$$

ako je funkcija dana eksplicitno, a u slučaju, da je dan implicitno jednadžbom

$$F(x,y) = 0$$

znamo , da je

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} ,$$

što uvršteno u jednadžbu daje

$$(x - x_o)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_o + (y - y_o)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_o = 0 , \qquad (137)$$

dakle sasvim analogni oblik, kao za tangencijalnu ravninu. Slično se dobije za jednadžbu normale

$$y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}\cdot(x - x_o)$$

oblik

$$\frac{x - x_o}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_o} = \frac{y - y_o}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_o}$$

Primjeri : Elipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

jednadžba tangencijalne ravnine

$$\frac{x\cdot x_o}{a^2} + \frac{y\cdot y_o}{b^2} + \frac{z\cdot z_o}{c^2} = 1$$

Elipsa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

jednadžba tangente

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Paraboloid :

$$A . y^2 + B \cdot z^2 = C \cdot x ,$$

jednadžba tangencijalne ravnine

$$A \cdot y \cdot y_0 + B \cdot z \cdot z_0 = \frac{C}{2} (x + x_0)$$

Parabola :

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x ,$$

jednadžba tangente

$$y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0)$$

μe

Kut između dviju ploha .

Pod kutom između dviju ploha u nekoj točki razumijevamo kut između njihovih tangencijalnih ravnina (ili njihovih normala). Prema prije izvedenim formulama bit će dakle

za dvije plohe $F(x,y,z) = 0$ i $\phi(x,y,z) = 0$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}} \tag{138}$$

Napose uvjet, da se dvije plohe sijeku okomito u nekoj točki, glasi

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{139}$$

μe

27. Više parcijalne derivacije

Deriviranjem prvih parcijalnih derivacija dolazimo do viših parcijalnih derivacija, na pr.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

. Isto tako

daljim deriviranjem izlaze parcijalne derivacije trećega reda i t.d.

Vidimo, da treba pojmovno razlikovati f''_{xy} od f''_{yx}, jer su to derivacije dobivene deriviranjem po x i y u različitom poredaju. Međutim vrijedi, da je $f''_{xy} = f''_{yx}$, ako postoje derivacije f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} i ako su posljednje dvije neprekinute.

Da to uvidimo tvorimo

$$\Delta_1 f = f(x + \Delta x, y) - f(x,y) = \varphi(x,y)$$

i

$$\Delta_2 f = f(x, y + \Delta y) - f(x,y) = \psi(x,y)$$

Dalje je

$$\Delta_2\Delta_1 f = \Delta_2\varphi = \varphi(x,y+\Delta y) - \varphi(x,y) =$$

$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) +$$

$$+ f(x,y)$$

Očito dobijemo isto, ako tvorimo $\Delta_1\Delta_2 f$, dakle

$$\Delta_1\Delta_2 f = \Delta_1\psi = \psi(x+\Delta x, y) - \psi(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)$$

$$\Delta_2\Delta_1 f = \Delta_1\Delta_2 f$$

Po teoremu srednje vrijednosti s obzirom na varijablu y bit će

$$\Delta_2\Delta_1 f = \Delta_2\varphi = \varphi(x,y+\Delta y) - \varphi(x,y) = \varphi'_y(x, y + \vartheta_2\Delta y)\cdot\Delta y =$$

$$= \left[f'_y(x + \Delta x, y + \vartheta_2\Delta y) - f'_y(x, y + \vartheta_2\Delta y)\right]\cdot\Delta y$$

$$0 < \vartheta_2 < 1$$

Smatramo li $f'_y(x, y + \vartheta_2\Delta y)$ funkcijom $F(x)$ i primijenimo na nju teorem srednje vrijednosti

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x\, F'_x(x + \vartheta_1\Delta x)$$

to izlazi

$$f'_y(x + \Delta x, y + \vartheta_2\Delta y) - f'_y(x, y + \vartheta_2\Delta y) = f''_{yx}(x + \vartheta_1\Delta x, y + \vartheta_2\Delta y)\cdot\Delta x,$$

dakle

$$\Delta_2\Delta_1 f = f''_{yx}(x + \vartheta_1\Delta x, y + \vartheta_2\Delta y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y$$

Granični prijelaz $\Delta x \longrightarrow 0$, $\Delta y \longrightarrow 0$ daje, ako je f''_{yx} neprekinuta funkcija ,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_2 \Delta_1 f}{\Delta x \cdot \Delta y} = f''_{yx}(x,y)$$

*) Analogno bismo dobili, ako je i f''_{xy} neprekinuta funkcija,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_1 \Delta_2 f}{\Delta x \cdot \Delta y} = f''_{xy}(x,y)$$

No budući da je $\Delta_2\Delta_1 f = \Delta_1\Delta_2 f$, to ta dva limesa moraju biti ista, dakle

$$f''_{xy} = f''_{yx} \tag{140}$$

Pod slabijim uvjetima je to dokazao Schwarz, pa se taj stavak katkada zove Schwarzov teorem. (137) Općenitije možemo reći, da miješane više derivacije (t.j. derivacije po više raznih varijabla) ne ovise o poredaju derivacija, pod uvjetima, koji su u primjenama gotovo uvijek ispunjeni.

Često se za prve i druge parcijalne derivacije funkcije dviju varijabla upotrebljavaju oznake p, q, r, s, t, dakle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t .$$

1746. – 1818.

Te oznake je uveo G.Monge. Izraz za totalni diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ glasio bi s tim oznakama

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{141}$$

** Potpuni diferencijali višeg reda
Eulerov teorem o homog. f.

28. Ekstremi funkcija od više varijabla.

Def. Velimo, da neka funkcija $z = f(x,y)$ ima u nekoj točki maksimum (minimum), ako su vrijednosti funkcije za točke u okolici manje (veće) od vrijednosti u toj točki. Geometrijski to znači, da ploha ima na tom mjestu najnižu (najvišu) točku spram bliže okoline. Zorna predodžba kaže, da onda tangencijalna ravnina mora biti horizontalna (t.j. paralelna s ravninom xy), a to znači, da su obje parcijalne derivacije jednake nuli, dakle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{142}$$

Iz tih dviju jednadžbi se računaju vrijednosti x,y te točke, a uvrštenje u jednadžbu $z = f(x,y)$ daje pripadnu vrijednost od z.

$\Delta z = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \gtrless 0$ min. / maks. u nekoj okolini točke (x_0,y_0) za mali par (x,y) iz te okoline.

Ovi su uvjeti nužni, ali nisu dovoljni. Ploha primjerice može u okolici te točke izgledati kao sedlo, tako da je tangencijalna ravnina horizontalna, ali se ploha sa lijeve i desne strane spušta, a prema naprijed i natrag uzdiže. U tom slučaju to nije ni maksimum ni minimum, a tangencijalna ravnina siječe plohu u dvije krivulje.

Diskusija se provodi pomoću viših derivacija, u što ovdje ne ulazimo.

Analogno je za funkcije od više varijabla nuždan uvjet za maksimum i minimum, da sve parcijalne derivacije prvoga reda budu jednake nuli. To se strogo uviđa pomoću teorema srednje vrijednosti. Neka na pr. $u = f(x,y,z)$, onda vrijedi

$$\Delta u = f'_x(x+\vartheta\Delta x,\ y+\vartheta\Delta y,\ z+\vartheta\Delta z)\cdot\Delta x + f'_y(x+\vartheta\Delta x,\ y+\vartheta\Delta y, z +$$
$$+ \vartheta\Delta z)\cdot\Delta y + f'_z(x+\vartheta\Delta x, y+\vartheta\Delta y, z+\vartheta\Delta z)\cdot\Delta z$$
$$(0 < \vartheta < 1) .$$

Pretpostavljamo, da su parcijalne derivacije neprekinute funkcije. Ako je onda u točki x,y,z na pr. $f'_x > 0$, onda je zbog neprekinutosti u dovoljno malenoj okolini (dakle za dosta maleni Δx, Δy, Δz) još uvijek $f'_x > 0$. Dobili bismo onda za $\Delta x > 0$, $\Delta y = \Delta z = 0$ točke sa

$$\Delta u = f'_x(x+\vartheta\Delta x,\ y,\ z)\cdot\Delta x > 0 \quad ,$$

a za $\Delta x < 0$, $\Delta y = \Delta z = 0$ točke sa

$$\Delta u = f'_x\,(x+\vartheta\Delta x,\ y,z)\cdot\Delta x < 0 \ .$$

U nekim točkama okoline bila bi dakle vrijednost od $\underline{u}$ veća, a u nekim manja nego u točki (x,y,z). Ne bi to dakle bio ni maksimum ni minimum. Slično zaključujemo, ako je $f'_x < 0$ u toj točki. Ako se dakle radi o maksimumu ili minimumu, ne može biti niti $f'_x > 0$ niti $f'_x < 0$, dakle mora biti $f'_x = 0$. Analogno se zaključuje i za ostale derivacije.

Primjer :

Treba odrediti najvišu i najnižu točku plohe

$$\frac{(x+z)^2}{2\cdot a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x-z)^2}{2\cdot c^2} = 1$$

Ploha predstavlja troosni elipsoid s poluosima a,b,c, kojem je srednja os $2b$ u osi y , a osi $2a$ i $2c$ su u ravnini xz pod kutom od 45^o prema osi x. To nije teško razabrati vrtnjom koordinatnog sustava oko osi y za -45^o , koja ima iste jednadžbe transformacije kao vrtnja u ravnini xz, dakle

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi + \zeta) \qquad x+z = 2\frac{\xi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\xi)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi - \zeta) \qquad x-z = \frac{2}{\sqrt{2}}(\zeta) = \sqrt{2}(\zeta)$$

i k tomu

$$y = \eta$$

Uvrštenje daje jednadžbu elipsoida u osnom položaju

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

Da odredimo najvišu i najnižu točku, t.j. maksimum i minimum implicitno zadane funkcije $z = f(x,y)$ (koja je uostalom dvoznačna, kako se vidi rješavanjem jednadžbe po z), stavimo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x + z}{a^2} + \frac{x - z}{c^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2\cdot y}{b^2} = 0$$

Zadnja jednadžba daje $\underline{y = 0,}$ prva zajedno s jednadžbom elipsoida daje dva rješenja,

jedno je $$x = \frac{a\cdot c\cdot(a^2 - c^2)}{\sqrt{c^2(a^2 - c^2)^2 + a^2(a^2 + c^2)^2}}$$

$$z = \frac{a\cdot c\cdot(a^2 + c^2)}{\sqrt{c^2(a^2 - c^2)^2 + a^2(a^2 + c^2)^2}}$$

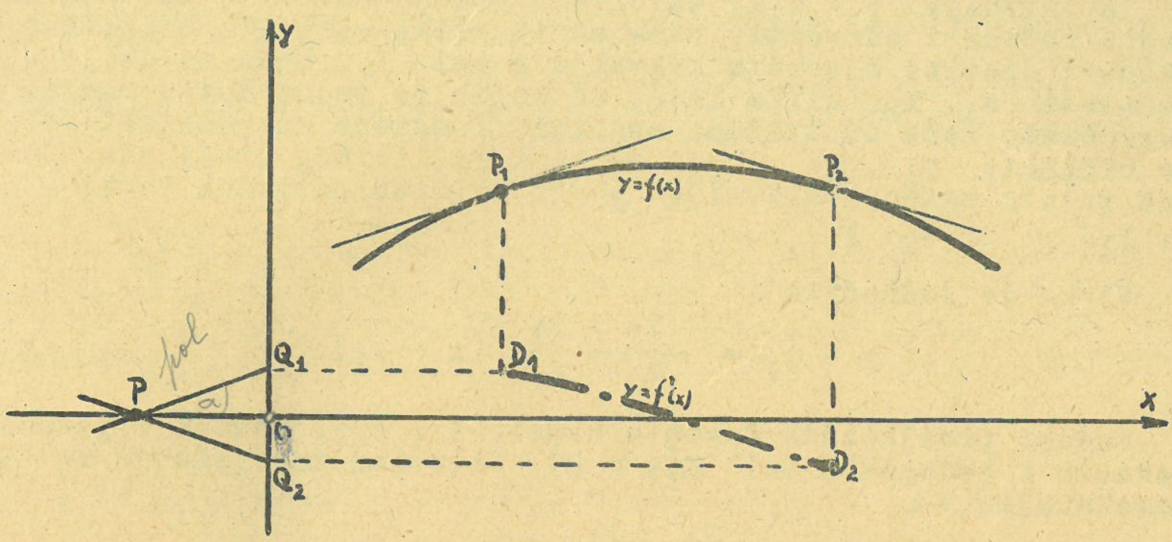
a drugo se dobije promjenom predznaka obih koordinata. (x i z)

Vezani ekstremi?

29 Grafičko deriviranje

Često je neka funkcija $y = f(x)$ zadana grafički, t.j. nacrtanom krivuljom. Može to biti i onda, ako od te krivulje poznajemo samo niz pojedinih točaka, koje su, recimo, rezultati mjerenja, pa te točke od oka spojimo krivuljom. Da se nađe derivirana funkcija, t.j. krivulja $y = f'(x)$, može se upotrebiti ova konstrukcija (slika 113).

Označi se točka $P(-1,0)$, koja se zove pol. U pojedinim točkama P_1, P_2, ... krivulje povuku se (od oka) tangente i polože kroz pol paralele s tim tangentama. Te paralele sijeku os y u točkama Q_1, Q_2, ..., koje su u istoj visini kao tražene točke D_1, D_2, ... krivulje $y = f'(x)$, pa ih treba samo horizontalno prenijeti do dotičnih ordinata. Tako se konstruira dovoljan broj točaka tražene krivulje.



SLIKA 113

Poteškoća je te konstrukcije u tome, da je teško od oka pogoditi točan smjer tangente na krivulju. Najbolje pomagalo kod toga je ravnalo sa zrcalnim bridom. To se ravnalo postavi u smjer normale, pa se u zrcalu na bridu vidi zrcalna slika jednoga dijela krivulje. Ravnalo se namjesti tako, da se zrcaljena krivulja glatko, t.j. bez loma, nastavlja na vidljivi dio nacrtane krivulje. Time se vrlo točno dobije smjer normale, a okomito na to se povuče pravac kroz pol, koji onda ima vrlo točno smjer tangente.

Dokaz konstrukcije je dakako vrlo jednostavan. Tangens kuta α , što ga zatvara pravac PQ_1 s osi x , jednak je derivaciji y_1' u točki P_1 , jer je PQ_1 paralelan s tangentom u toj točki, pa iz trokuta POQ_1 izlazi zbog $PO = 1$

$$OQ = OP \cdot tg\alpha = 1 \cdot y_1' = y_1'$$

što je dakle zaista ordinata tražene točke D_1 .

30 Metoda sekante i metoda tangente

Sjecišta neke krivulje $y = f(x)$ s osi X , t.j. apscise točaka te krivulje, čije su ordinate jednake nuli, nalazimo približno, no po volji točno metodom sekante i metodom tangente. Tim metodama rješavamo približno jednadžbe sa 1 nepoznanicom, jer jednadžbu s jednom nepoznanicom u općem obliku $f(x) = 0$ možemo shvatiti kao presjecište krivulje $y = f(x)$ i pravca $y = 0$.

Metoda sekante (regula falsi)

Pošto je krivulja $y = f(x)$ skicirana pomoću nekoliko točaka, koje treba računski odrediti, može se iz slike odrediti približna vrijednost apscise sjecišta krivulje s osi X. Uzmu se dvije vrijednosti x_1, x_2 (slika 114), od kojih je jedna nešto manja, a druga nešto veća od tražene apscise, i odrede se računski pripadne ordinate y_1, y_2, koje će biti različitog predznaka. Zatim se položi sekanta krivulje $y = f(x)$ kroz dobivene točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.

Njena je jednadžba :

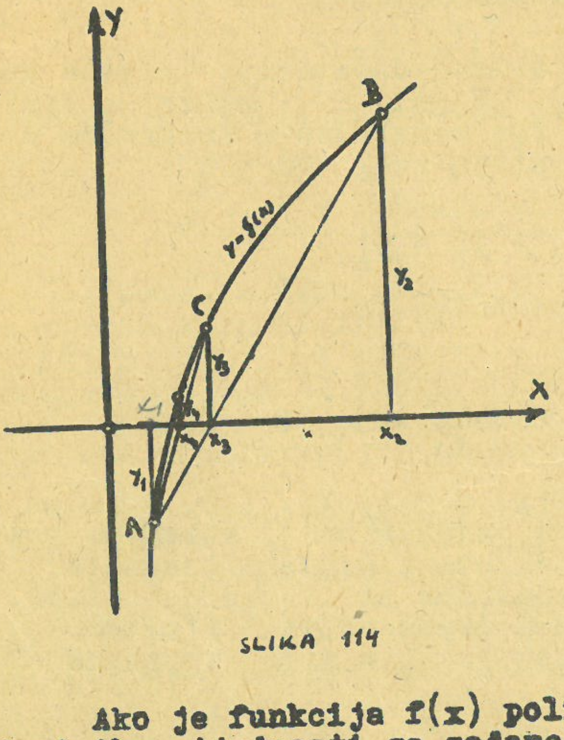
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Nađemo presjecište sekante s osi X, t.j. rješenje jednadžbe sekante i jednadžbe osi $X(y = 0)$. Nazovimo to rješenje x_3 te ga izračunajmo :

$$-y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1),$$

$$-y_1(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)x_3 - x_1(y_2 - y_1),$$

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$$



SLIKA 114

Nađemo zatim pripadnu ordinatu y_3 krivulje $y = f(x)$. Kroz točku $C(x_3, y_3)$ i onu od poznatih točaka A i B, čija je ordinata protivnog predznaka od y_3, povučemo novu sekantu, nađemo sjecište te sekante s osi X (u našem primjeru kroz točku A i C, te je

$$x_4 = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{y_3 - y_1}$$) i

pripadnu ordinatu y_4 i t.d.

Slijed vrijednosti x_3, x_4 .... sve se više približava točnom rješenju $x = x_0$ jednadžbe $f(x) = 0$ pa tako rješenje možemo naći željenom točnošću.

Ako je funkcija $f(x)$ polinom, možemo se za izračunavanje njezinih vrijednosti za zadane vrijednosti od x poslužiti Hornerovom shemom. (Vidi Marković I, str.136.)

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Nađemo jednadžbu tangente na krivulju $y = f(x)$ u nekoj točki $A(x_1, y_1)$ (slika 115), koja je blizu traženog sjecišta s osi X :

$$y - y_1 = y_1' (x - x_1)$$

U okolici nultočke, ~~mora~~ prva i druga derivacija ne smije mijenjati predznak.

Str. 104.

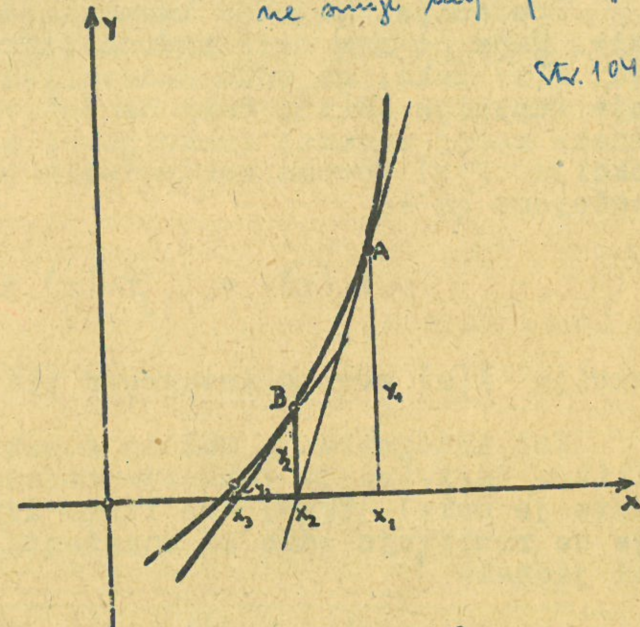
Presjecište tangente s osi X, t.j. rješenje jednadžbe tangente i jednadžbe $y = 0$ označimo sa x_2 te izračunamo

$$-y_1 = y_1' (x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{y_1'}$$

Nađemo tada pripadnu ordinatu y_2 funkcije $y=f(x)$ te u točki $B(x_2, y_2)$ povučemo novu tangentu na krivulji. Apscisa sjecišta te tangente i osi X je

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2}{y_2'} \quad \text{i t.d.}$$



SLIKA 115

Slijed vrijednosti x_1, x_2, x_3 ..... sve se više približava rješenju x_0 jednadžbe $f(x) = 0$.

Za primjere vidi Marković I, str. 322, 323.

II. D I O

I n t e g r a l n i   r a č u n

N e o d r e đ e n i   i n t e g r a l i

Operacija, koja je inverzna deriviranju, zove se integriranje. Sada će nam biti zadana funkcija $f(x)$ i tražit ćemo funkciju $F(x)$ tako, da bude zadovoljen uvjet $F'(x) = f(x)$. To traženje funkcije $F(x)$, tako da derivacija te funkcije $F'(x)$ bude jednaka našoj zadanoj funkciji $f(x)$, zovemo integriranje, a funkciju $F(x)$ zovemo neodređenim integralom funkcije $f(x)$ i označujemo ga sa

$$F(x) = \int f(x)\,dx .$$

Funkciju $f(x)$ zovemo integrand ili podintegralna funkcija.

Kod integriranja možemo dodati neku konstantu C, jer se prilikom deriviranja funkcije konstanta izgubi (derivacija konstante je nula). Tako, ako imamo dvije funkcije $F_1(x)$ i $F_2(x)$, koje se razlikuju samo za konstantu, njihove derivacije moraju biti jednake.

$$F_1'(x) = F_2'(x) \qquad \text{ili} \qquad F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

TEOREM:

Sada ćemo obrnutim postupkom dokazati : Ako je razlika derivacija dviju funkcija jednaka nuli, razlika tih funkcija jednaka je nekoj konstanti C, koju onda prilikom integriranja možemo po volji dodati.

Dokaz: Razliku tih dviju funkcija nazvat ćemo zasada $\phi(x)$, dakle

$$F_1(x) - F_2(x) = \phi(x)$$

Pretpostavljamo

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \phi'(x) = 0$$

Teoremom o srednjoj vrijednosti moći ćemo dokazati, da je funkcija $\phi(x)$ konstanta (slika 116).

Teorem o srednjoj vrijednosti glasi

$$\phi(x + h) - \phi(x) = h\cdot\phi'(x + \Theta h) \qquad 0 < \Theta < 1$$

a pošto je $\phi'(x) = 0$ za svaki x mora i $\phi'(x + \Theta h) = 0$ pa slijedi, da je

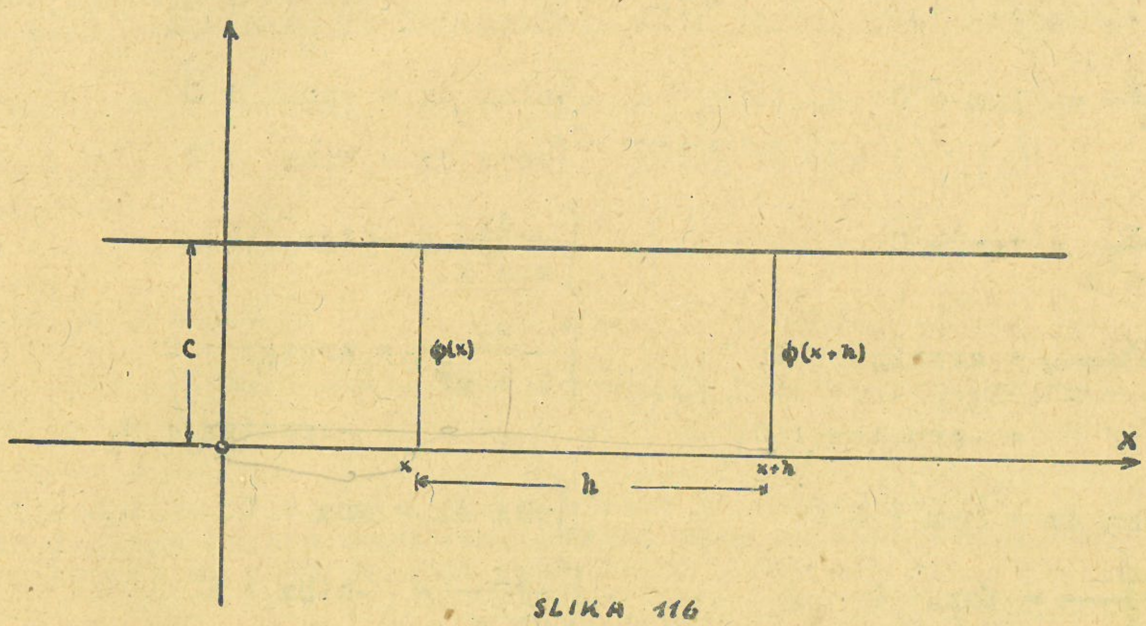
$$\phi(x + h) - \phi(x) = h \cdot \phi'(x + \Theta \cdot h) = 0$$

ili

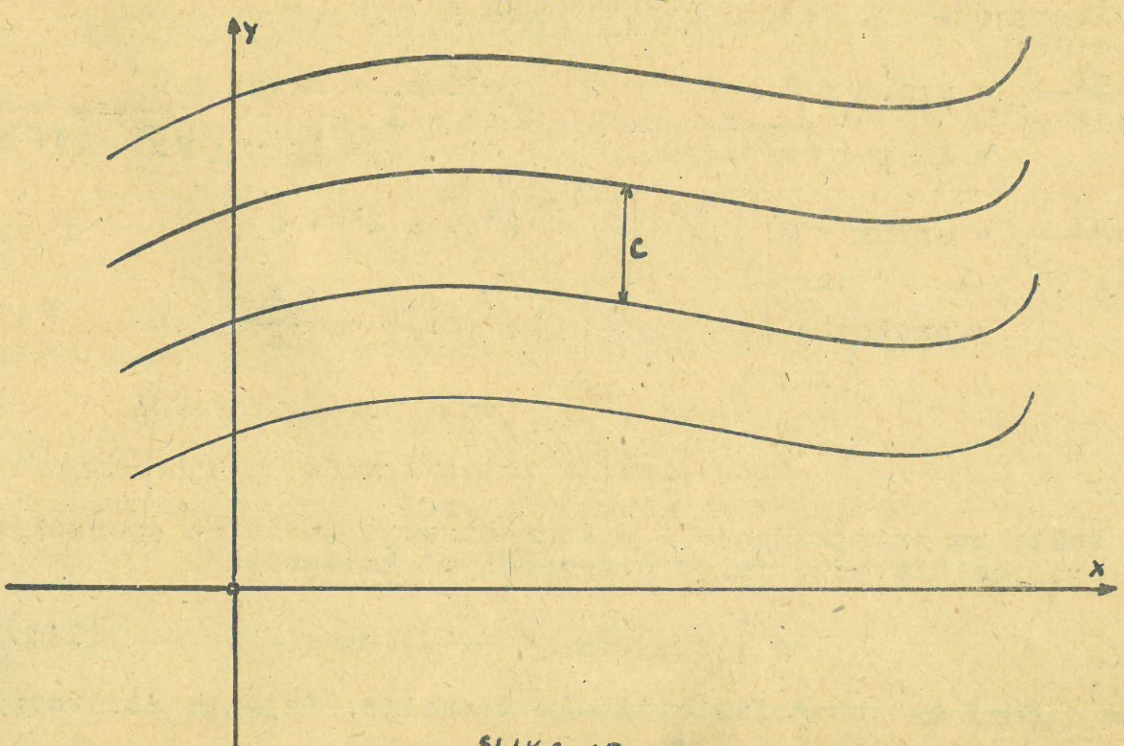
$$\phi(x + h) = \phi(x) ,$$

odakle vidimo, da za bilo koji h vrijednost $\phi(x)$ ostaje ista. To dakle znači, da je $\phi(x) = C$. Grafički je to pravac paralelan s osi x.

Prema tome je $F_1(x) - F_2(x) = \phi(x) = C$ ili $F_1(x) = F_2(x) + C$.



SLIKA 116



SLIKA 117

Iz ovoga svega slijedi, da nam integriranje funkcije f(x) daje samo oblik neke funkcije integrala F(x), dok njen položaj u koordinatnom sustavu nije točno određen. Krivulja se može paralelno pomicati u smjeru osi y (što računski znači dodavanje konstante), tako da dobijemo familiju krivulja (slika 117), od kojih svaka predstavlja jedan integral.

Prema definiciji neodređenog integrala možemo sada napisati i integrale nekih nama već poznatih funkcija, s kojima smo se često sreli prilikom deriviranja.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad \text{za } x>0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \text{za sve } x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\ &= -\arccos x + C_1\end{aligned}\right\} |x|<1$$

$$\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \mathrm{arsh}\, x + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-x^2} &= \mathrm{arth}\, x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \\ &\quad |x|<1 \\ &= \mathrm{arcth}\, x + C_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C \\ &\quad |x|>1\end{aligned}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x^2} &= \mathrm{arctg}\, x + C \\ &= -\mathrm{arcctg}\, x + C_1\end{aligned}$$

$$\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \mathrm{arch}\, x + C \\ &= \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C \qquad x>1\end{aligned}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad 0<a\neq 1$$

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \mathrm{th}\, x = \ln \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \mathrm{cth}\, x = \ln|\mathrm{sh}\, x| + C$$

Opća pravila integriranja

$$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

Pošto su integriranje i diferenciranje inverzne operacije, to se ove poništavaju, te je diferencijal integrala

$$d\int f(x)\, dx = f(x)\, dx\,, \tag{143}$$

jer je f(x) dx po definiciji ona funkcija, čija je derivacija

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + C & |x|<1 \\ \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C & |x|>1 \end{cases}$$

jednaka $f(x)$, dakle diferencijal jednak $f(x)\,dx$.

U obrnutom poredaju se znakovi d i $\int$ ne moraju potpuno ukidati, nego vrijedi

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C ,$$

gdje konstanta C može, ali ne mora biti jednaka nuli.

Lema

Integral sume jednak je sumi integrala.

Ako je integrand suma od dviju ili više funkcija na pr. $\int [f(x) + g(x)]\cdot dx$ onda je integral te sume jednak sumi integrala.

$$\int [f(x) + g(x)]\cdot dx = \int f(x)\cdot dx + \int g(x)\cdot dx \qquad (144)$$

Za dokaz diferencirajmo lijevu i desnu stranu :

$$d\int [f(x) + g(x)]\,dx = d\int f(x)\cdot dx + d\int g(x)\cdot dx ,$$

što je jednako

$$[f(x) + g(x)]\cdot dx = f(x)\cdot dx + g(x)\cdot dx$$

ili

$$f(x)\cdot dx + g(x)\cdot dx = f(x)\cdot dx + g(x)\cdot dx$$

Diferencijali lijeve i desne strane su dakle jednaki, pa se lijeva i desna strana mogu razlikovati samo za konstantu, koja se i onako uvijek može dodati.

Lema

Konstantan faktor se može izlučiti pred integral

Dokazujemo, da je $\int A\cdot f(x)dx = A\cdot\int f(x)dx$, gdje je A konstanta.
Diferencirajmo lijevu i desnu stranu :

$$d\int A\cdot f(x)dx = A\cdot d\int f(x)dx, \quad \text{a to je}$$

$$A\cdot f(x)dx = A\cdot f(x)dx$$

Diferencijali su dakle jednaki, pa se integrali mogu razlikovati samo za konstantu, koju obično ne bilježimo.

Metoda supstitucije

Ako u nekom integralu

$$\int f(x)dx = F(x)$$

smatramo x funkcijom neke druge varijable t , t.j.

$$x = \varphi(t)$$

tako da je $F(x)$ složena funkcija od t,

$$F(x) = F\left[\varphi(t)\right] = \phi(t)$$

onda znamo, da je

$$d\,\phi(t) = d\,F(x) = F'(x)dx = F'\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\cdot dt$$

No budući da je $F'(x) = f(x)$, to je dakle

$$d\,\phi(t) = f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\cdot dt$$

i
$$\phi(t) = \int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\cdot dt = F(x) = \int f(x)dx$$

To dakle znači, da se uvođenje (zamjena, supstitucija) nove varijable t provodi tako, da se mjesto x uvrsti $\varphi(t)$, a mjesto dx njegova vrijednost $\varphi'(t)dt$.

Često je dobiveni integral lakše rješiv od prvotnoga. Poslije izvršene integracije dobili smo funkciju $\phi(t)$, koja prelazi u traženu funkciju $F(x)$, ako mjesto t pišemo njegovu vrijednost iz jednadžbe $x = \varphi(t)$, dakle inverznu funkciju $t = \psi(x)$.

Metoda supstitucije je naročito prikladna, kada integral ima oblik (ili se lako dade svesti na oblik) $\int F\left[f(x)\right]\cdot f'(x)dx$, t.j. ako je integrand složena funkcija od x, pomnožena derivacijom nutrašnje funkcije. Stavljamo onda nutrašnju funkciju jednaku novoj varijabli:

$$f(x) = t \quad \text{ili inverzno} \quad x = \varphi(t)$$

Umjesto da tvorimo dx iz $x = \varphi(t)$, možemo diferencirati odmah jednadžbu $f(x) = t$ i dobijemo

$$f'(x)\cdot dx = dt\,;$$

što uvršteno u integral vodi na oblik

$$\int F(t)\cdot dt$$

koji je jednostavniji od prvotnoga.

Na pr.

1) $\int \sin x\cdot\cos x\,dx =$ $\qquad\qquad \sin x = t$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cos x\cdot dx = dt$

$$= \int t\cdot dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}$$

2) $\frac{1}{2}\cdot\int \sin 2x\,dx$ $\qquad\qquad 2x = t$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx = \frac{dt}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot\int \sin t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\cos t = -\frac{1}{4}\cdot\cos 2x$$

3) $\int \cos^6 x \cdot \sin x \cdot dx =$ $\qquad\qquad$ $\cos x = t$

$= -\int t^6 dt = -\frac{t^7}{7} = \frac{-\cos^7 x}{7}$ $\qquad\qquad$ $-\sin x \cdot dx = dt$

Ako različitim metodama integracije dobijemo naoko različite rezultate, onda znamo unaprijed, da su ti rezultati identični (i samo po obliku različiti) ili se razlikuju za neku konstantu.

Na pr. $\int \sin x \cdot \cos x \cdot dt$ možemo riješiti supstitucijom

$\sin x = t \qquad \cos x \cdot dx = dt$, dakle

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dt = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}$$

No može se i staviti $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, dakle

$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 2x \cdot dx$ $\qquad$ Supstitucija $2x = u$

daje $2dx = du \qquad dx = \frac{du}{2}$, dakle

$$\frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \sin u \cdot du = -\frac{1}{4} \cdot \cos u = -\frac{1}{4} \cdot \cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{4}(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}$$

Vidimo, da se rezultati razlikuju za konstantu $\frac{1}{4}$.

Parcijalna integracija

Ako deriviramo produkt

$y = u \cdot v$ $\qquad$ gdje je $u = \phi(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad v = \psi(x)$

dobijemo $\frac{dy}{dx} = uv' + vu'$ ili

$dy = uv'dx + vu'dx$

Ako to integriramo, dobijemo

$$\int dy = \int uv'dx + \int vu'dx ,$$

a pošto je $\int dy = y = uv$ možemo pisati

$$uv = \int uv'dx + \int vu'dx \quad \text{ili}$$

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \tag{145}$$

Time smo dobili formulu za parcijalnu integraciju, jer ako sada imamo integral $\int f(x)dx$, gdje je $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$, dakle produkt dviju funkcija, koje obje zavise od x, onda možemo staviti $f_1(x) = u$, a $f_2(x) = v'$ i prema tome $f_1'(x) = u'$, a $f_2(x)dx = dv$

Često se gornja formula piše u skraćenom obliku

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du , \tag{146}$$

jer je $\quad v'dx = dv \quad$ i $\quad u'dx = du$

Ako imamo produkt $\int f_1(x)\, f_2(x)\, dx$, može se dakle staviti

$$f_1(x) = u$$
$$f_2(x)dx = dv$$

Na pr.

1) $$\int x \cdot \sin x\, dx = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x)dx$$
$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x \cdot \cos x + \sin x$$

$x = u$

$\sin x\, dx = dv$

2) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x \cdot dx$$
$$= -\sin x \cdot \cos x - \int (-\cos x)\cos x \cdot dx$$
$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$
$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx$$
$$= -\sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \sin^2 x\, dx$$
$$2 \cdot \int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + x$$
$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2}$$

3) $$\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$\ln x = u$

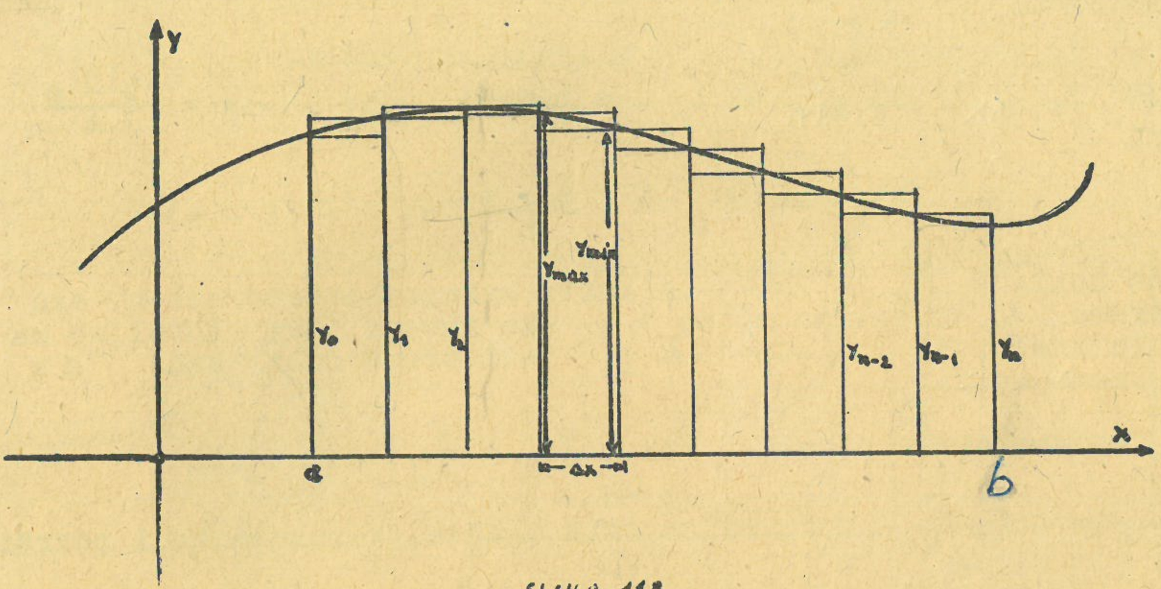
$dx = dv$

$x = v$

Jednolika neprekidnost funkcije

Određeni integral

Promatrat ćemo funkciju $f(x)$ u intervalu $[a,b]$ (slika 118) pod pretpostavkom, da je ta funkcija u tom zatvorenom intervalu neprekinuta. Razdijelimo cijeli interval u n jednakih dijelova duljine $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ i potražimo u svakom dionom intervalu najmanju ordinatu y_{min} i najveću ordinatu y_{max}.



SLIKA 118

Označimo sa Σ_1 sumu površina svih pravokutnika kojima je baza Δx, a ordinata y_{min} dotičnog intervala, koji dakle zatvaraju manju površinu od površine koju zatvara krivulja s osi x i krajnjim ordinatama y_0 i y_n ; a sa Σ_2 sumu površina svih pravokutnika s ordinatama y_{max}, koji zatvaraju veću površinu od površine, koju zatvara krivulja. Dakle je $\Sigma_2 > \Sigma_1$

$$\Sigma_1 = y_{1,min} \cdot \Delta x + y_{2,min} \cdot \Delta x + \ldots + y_{n,min} \cdot \Delta x$$

$$= \sum_{r=1}^{n} y_{r,min} \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{r=1}^{n} y_{r,min}$$

$$\Sigma_2 = y_{1,max} \cdot \Delta x + y_{2,max} \cdot \Delta x + \ldots + y_{n,max} \cdot \Delta x$$

$$= \sum_{r=1}^{n} y_{r,max} \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{r=1}^{n} y_{r,max}$$

Načinit ćemo razliku tih površina

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 = \Delta x \cdot \sum_{r=1}^{n} (y_{r,max} - y_{r,min}) ,$$

gdje nam sada $y_{r,max} - y_{r,min}$ znači razliku ekstremnih ordinata r-tog dionog intervala. Tu razliku ordinata zbog neprekinutosti funkcije možemo načiniti manju od ε , gdje nam ε

znači po volji uzet malen broj, ako samo Δx načinimo dosta malenim [1]. Ako dakle Δx načinimo dovoljno malenim, dobit ćemo

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 \leqq \Delta x \cdot n \cdot \varepsilon$$

jer je $y_{r,max} - y_{r,min} \leqq \varepsilon$, a budući da je $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ izlazi

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 \leqq \frac{b-a}{n} \cdot n\varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

Možemo dakle $\Sigma_2 - \Sigma_1$ načiniti kakogod hoćemo malen, ako odaberemo ε dovoljno malen t.j. ako uzmemo Δx dovoljno malen. To znači, da $\Sigma_2 - \Sigma_1$ teži prema nuli, kada Δx teži prema nuli.

Možemo dakle pisati $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Sigma_2 - \Sigma_1) = 0$ ili $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Sigma_2 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Sigma_1$. Površina svih manjih pravokutnika i površina svih većih pravokutnika teže dakle prema istom limesu, kada širinu tih pravokutnika neograničeno smanjujemo, a njihov broj neograničeno povećamo. Taj zajednički limes zovemo površinom, koju krivulja zatvara s osi x i krajnjim ordinatama, t.j. "u granicama a i b", jer su a i b apscise, koje pripadaju tim krajnjim ordinatama. Označujemo tu površinu sa

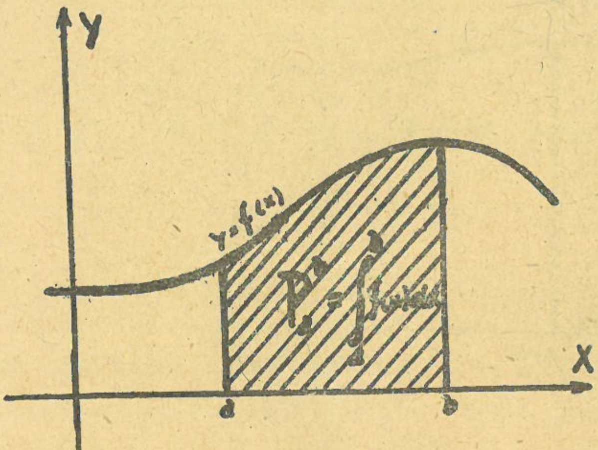
---

[1] Ovdje je zapravo upotrebljeno nešto više nego obična neprekinutost. Neprekinutost u svakoj točki intervala znači, da je uz odabrani ε za svaku točku krivulje moguće naći jedan δ tako, da bude $|\Delta y| < \varepsilon$, ako je $|\Delta x| < \delta$. No nije time rečeno, da je uz jednako odabrani ε taj δ za sve točke isti i nije rečeno, da se može naći tako maleni δ , da je za sve točke najedamput $|\Delta y|$ manji od istoga ε , ako je $|\Delta x| < \delta$ Ako je to ipak moguće, velimo, da je funkcija u tom intervalu jednoliko neprekinuta (ili uniformno kontinuirana). Dade se pokazati : ako je funkcija neprekinuta u svakoj točki zatvorenog intervala (t.j. intervala, koji uključuje svoje krajnje točke), onda je u tom intervalu i jednoliko neprekinuta. Naprotiv, ako je interval otvoren, to ne mora tako biti. Na pr. funkcija $y = \frac{1}{x}$ je neprekinuta u svim točkama intervala $(0,1]$ otvorenog s lijeve strane (okrugla zagrada znači otvoreni, uglasta znači zatvoreni interval), dakle s isključenjem točke $x = 0$, u kojoj je funkcija prekinuta (postaje neizmjerna). Funkcija nije jednoliko neprekinuta u tom intervalu. U takvom slučaju može određeni integral postojati ili ne postojati. Za funkciju $y = \frac{1}{x}$ ne postoji, jer je površina između osi y, osi x i ordinate $x = 1$ neizmjerna. Za funkciju $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, koja je također prekinuta u točki $x = 0$, taj integral ipak postoji, jer je površina konačna.

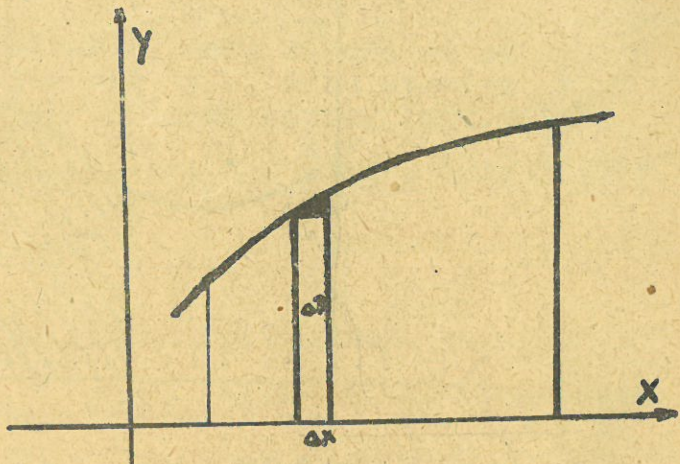
H. Lebesgue
A. Denjoy

$$P_a^b = \lim_{\Delta x \to 0} \sum y_{n-1} \cdot \Delta x = \int_a^b y \cdot dx = \int_a^b f(x)dx \quad (146)$$

i zovemo to <u>određenim integralom</u> od f(x) u granicama od a do b. (Slika 119.)



SLIKA 119



SLIKA 120

To možemo manje egzaktno shvatiti i ovako. Ako uzmemo, da je Δx jako malen, recimo "neizmjerno malen", pa ga označimo sa dx (slika 120.), onda je $y \cdot dx = dP$ površina "neizmjerno malog" pravokutnika, za koji možemo uzeti, da je istovremeno i dio površine, što ju zatvara ta krivulja sa osi X. Ako sumiramo sve ove "neizmjerno malene" dijelove kojih ima "neizmjerno mnogo", u intervalu $[a,b]$, dobijemo cijelu površinu, dakle

$$P = \int_a^b y \cdot dx$$

U tom smislu je dakle određeni integral "suma od neizmjerno mnogo neizmjerno malih dijelova". Razumije se, da se ovaj način izražavanja ne smije shvatiti doslovce, već se kod toga misli na granični prijelaz, kako je bio prije izložen. B. Riemann 1826 – 1866.

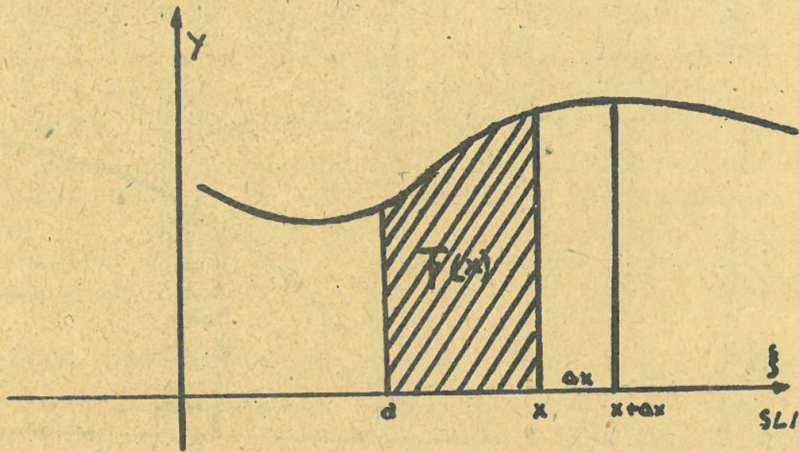
Teorem str. w. int. računa

34. Izračunavanje određenog integrala

Vrlo često, da se razlikuju pojedini simboli, uzimaju se za koordinate druge oznake. Mi ćemo sada odabrati oznake ξ i y i u tom koordinatnom sustavu jednu funkciju $y = f(\xi)$. Površinu, što zatvara ta krivulja od a do x sa osi ξ nazovimo $F(x)$. Ovdje x zasada nije varijabla, nego neka vrijednost na apscisi kojom smo odredili gornju granicu. Dakle :

$$F(x) = \int_a^{x} f(\xi)d\xi$$

Ako se gornjoj granici x daju razne vrijednosti, površina će imati raznu veličinu. Površinu dakle možemo shvatiti kao funkciju od x, t.j. shvaćamo određeni integral kao funkciju njegove gornje granice. Pokušajmo tu funkciju derivirati. Tvorimo kvocijent diferencija (slika 121.):



SLIKA 121

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi - \int_a^{x} f(\xi)d\xi}{\Delta x}$$, a jer nam je

$\int_a^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi$ površina u granicama a do $x + \Delta x$ a $\int_a^{x} f(\xi)d\xi$ površina od a do x, onda je razlika tih površina, površina od x do $x + \Delta x$:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi - \int_a^{x} f(\xi)d\xi = \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi$$, i prema

tome

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi}{\Delta x}$$

Da se provede granični prijelaz, treba nam "teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa.

Neprekinuta funkcija $f(x)$ mora u zatvorenom intervalu $[A,B]$ poprimiti svoj minimum i svoj maksimum (Marković I. str. 263.). Neka je x_1 apscisa minimuma, a x_2 apscisa maksimuma. Integral $\int_A^B f(x)dx$ svakako je manji od površine pravokutnika $(B - A)y_{max}$, a veći od površine pravokutnika $(B - A)y_{min}$ (slika 122). Bit će stoga jednaka nekom pravokutniku, kojemu je visina veća od y_{min} i manja od y_{max} , dakle

$$\int_A^B f(x)dx = (B - A)y_o \quad , \quad y_{min} < y_o < y_{max}$$

No krivulja, budući da je neprekinuta, mora dižući se od y_{min} do y_{max} negdje primiti i vrijednost y_o , neku apscisu x_o , koja je između x_1 i x_2 , dakle svakako unutar intervala $[A\ B]$. Bit će dakle $A < x_o < B$ ili $x_o = A + \Theta(B - A)$, gdje je $0 < \Theta < 1$. Prema tome je $y_o = f(x_o) = f[A + \Theta(B - A)]$ i

$$\int_A^B f(x)dx = (B - A)\cdot f\left[A + \Theta(B - A)\right]$$

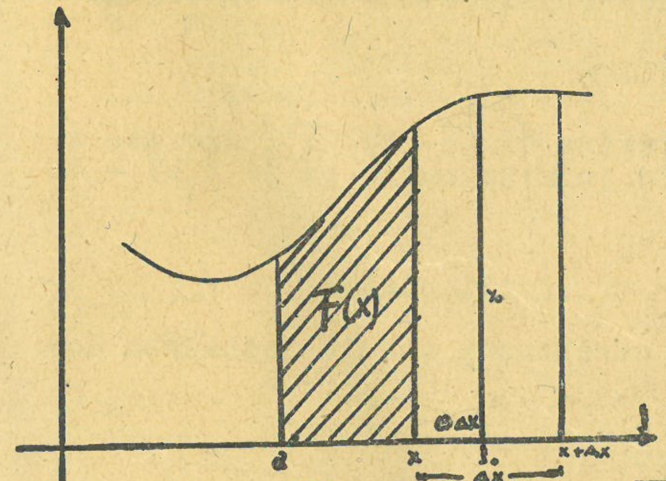
$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(a+\vartheta(b-a))$ $\quad 0<\vartheta<1$

Ova je relacija teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa. Bit će dakle u našem slučaju za $A = x$, $B = x + \Delta x$, $B - A = \Delta x$

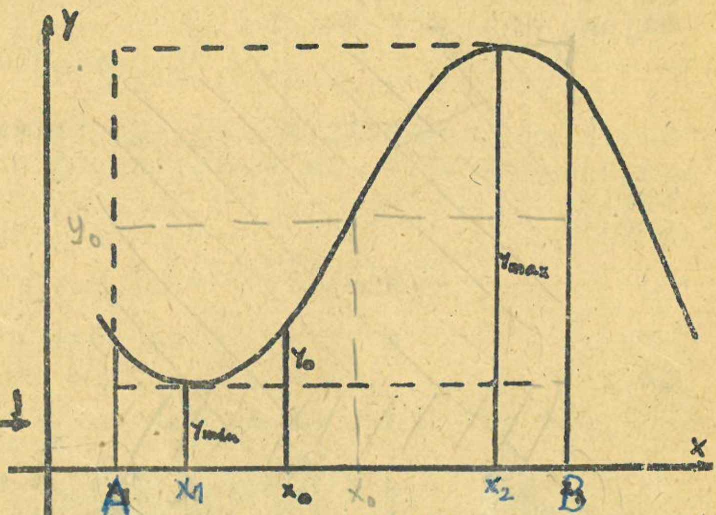
$$\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi = \Delta x\cdot y_o = \Delta x\cdot f(x + \Theta\Delta x) \quad \cdot \text{(slika 123)}$$

i dalje

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_o)\Delta x}{\Delta x} = f(x_o) = f(x + \Theta\Delta x)$$



SLIKA 123



SLIKA 122

Granični prijelaz da $\Delta x \to 0$ daje

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Theta \Delta x) = f(x)$$

To smo dobili ~~drugu~~ mogućnost drugačije definicije neodređenog integrala.

ili

$$F'(x) = f(x)$$

Od prije znamo, da je onda $\phi(x)$

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

gdje je $\int f(x)dx$ neodređeni integral funkcije $f(x)$.

No budući da je $F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$

to je dakle

$$\int_a^x f(\xi)d\xi = F(x) = \int f(x)dx + C$$

Umjesto $\int f(x)dx$ možemo pisati $\phi(x)$, pa je onda

$$\int_a^x f(\xi)d\xi = F(x) = \phi(x) + C$$

Da se odredi konstantu C, uzmemo vrijednost za $x = a$ i dobijemo

$$F(a) = \phi(a) + C$$

Sa $F(x)$ označili smo cijelu površinu od a do x. Ako se x smanji do a to je površina očito jednaka nuli, pa je $F(a) = 0$. Dakle

$$F(a) = \phi(a) + C = 0 \quad \text{ili odatle}$$

$$C = -\phi(a)$$ što uvršteno u gornju jednadžbu daje

$$\int_a^x f(\xi)d\xi = \phi(x) + C = \phi(x) - \phi(a)$$

Gornju granicu opet označimo sa b, a varijablu integracije sa x, pa imamo

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a). \qquad (147)$$

Dakle, ako uvrstimo u neodređeni integral granice i dobivene vrijednosti odbijemo, dobijemo vrijednost određenog integrala. Time smo stvorili vezu između određenog i neodređenog integrala. (Za stroži izvod vidi Marković I.str.388, 392, 396.) Tamo je upotrebljena nešto druga terminologija. Što se ovdje zove neodređeni integral, tamo se zove primitivna funkcija, dok neodređeni integral tamo odgovara našem određenom integralu,

$\int_a^x f(x)dx$ s promjenljivom gornjom granicom.)

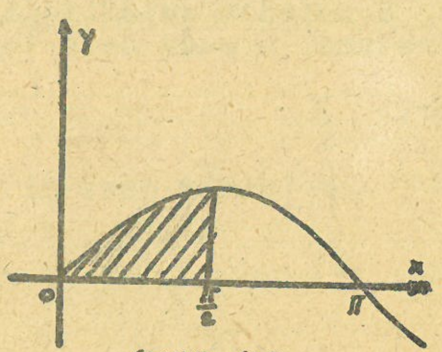
Na pr.

1) $y = \sin x \quad \left[0 \ \frac{\pi}{2}\right]$ (slika 124)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0^o)$$

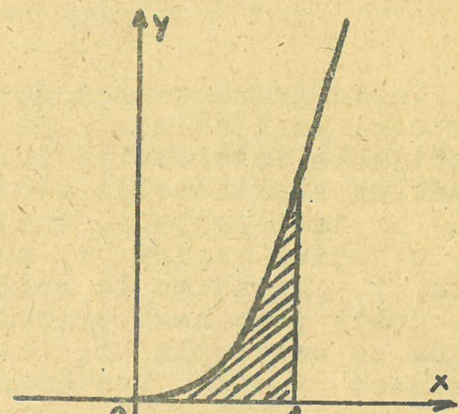
$$= 0 + 1 = 1$$



SLIKA 124

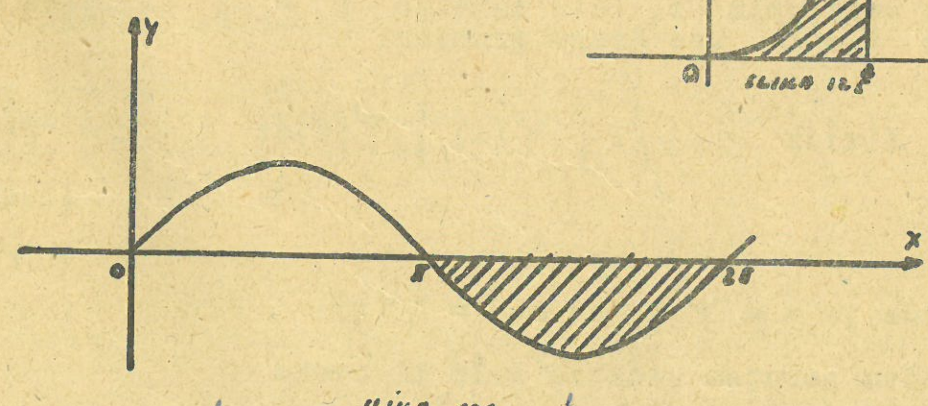
2) $y = x^2 \ [0,a]$ (slika 125)

$$\int_0^a y \cdot dx = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$



SLIKA 125

3) Ako se krivulja nalazi ispod osi X , dobijemo negativne vrijednosti, što je jasno iz definicije određenog integrala. Ordinate, koje se sumiraju, negativne su (slika 126).



SLIKA 126

4) $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\left[\phi(a) - \phi(b)\right] = \phi(b) - \phi(a)$

6) $\int_a^b \ldots \int^b f(x) \ldots \Rightarrow \int^b f(x)\,dx + \int^b g(x)\,dx = \int^b \left[f(x) + g(x)\right] dx$

Na pr. :

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cdot dx = \Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos\pi) =$$

$$= -1 + \cos\pi = -1 \ -1 = -2$$

35. Transformacija granica

S metodom supstitucije upoznali smo se u početku integralnog računa, a sada ćemo to proširiti na određeni integral.

Na pr.:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \qquad \begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \cdot dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{12}$$

Često je nespretno po izvršenoj integraciji povratiti se na prvotnu varijablu x, pa je zgodnije usporedo s uvođenjem nove varijable integracije transformirati i granice. Kako x i t jednadžbom supstitucije stoje u funkcionalnoj vezi, možemo za svaki x naći pripadnu vrijednost za t. Ako su a i b granice, u kojima varira x, možemo lako naći, u kojim granicama varira t. Uvrstimo li vrijednost $x = a$ u jednadžbu supstitucije, dobit ćemo neku pripadnu vrijednost $t = \alpha$, kao jednu granicu za varijablu t. Isto tako za $x = b$ dobijemo neku vrijednost $t = \beta$ kao drugu granicu.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \qquad x = \varphi(t) \text{ ili}$$

inverzno

$$t = \psi(x)$$

onda je $\alpha = \psi(a)$ a $\beta = \psi(b)$

U našem gornjem zadatku bilo bi ovako

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \qquad \begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \cdot dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \qquad\qquad \alpha = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{12} \qquad\qquad \beta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

derivabilna

Pretpostavlja se pri tom, da je $x = \varphi(t)$ u dotičnom intervalu monotona funkcija, t.j. da u cijelom intervalu raste ili u cijelom intervalu pada, što će biti, ako je u cijelom intervalu $\varphi'(t) \neq 0$, dakle svagdje istog predznaka (jer nigdje ne prolazi kroz nulu). Ako nije tako, onda se može interval integracije rastaviti u dijelove tako, da je u svakom dijelu ovaj zahtjev ispunjen, i integraciju provesti za svaki dio zasebno.

No može se pokazati, da je rezultat ispravan i onda, ako svakoj vrijednosti od x između a i b odgovara barem jedna vrijednost od t u intervalu $[\alpha, \beta]$. (Pitanje razlaganja vidi Marković str.421.)

treba spretno

Evo jedan primjer, u kojem ne smijemo transformirati granice :

$$\int_{-1}^{8} dx = \Big[x\Big]_{-1}^{8} = 8 + 1 = 9$$ (računato izravno bez supstitucije).

Ako isti integral računamo pomoću supstitucije $x = t^{\frac{3}{2}}$, $t = \sqrt[3]{x^2}$

$dx = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\, dt$ (što bi dakako bilo nespretno), dobijemo

$$\int_{1}^{4} \frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot dt = \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} = 8 - 1 = 7$$

$\alpha = 1$

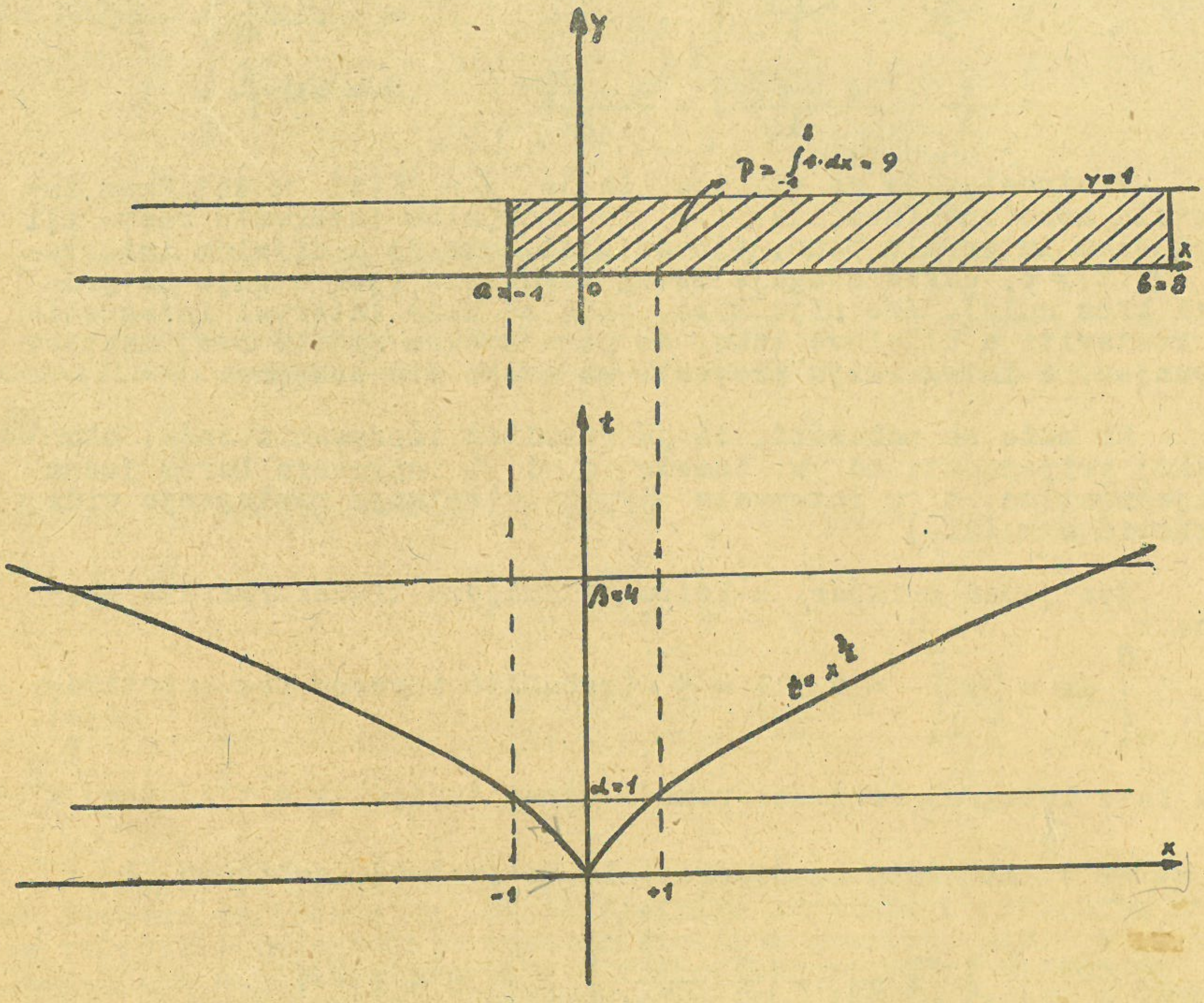
$\beta = \sqrt[3]{8^2} = 4$

dakle nesmisao.

Ako nacrtamo (slika 127) krivulju $x = t^{\frac{3}{2}}$, vidimo da nije bio zadovoljen gornji nužni uvjet. Za interval od -1 do 1 za x nema pripadnoga t, koji bi bio između 1 i 4, nego je za takav x t manji od 1.

Ali, $\int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt + \int_0^4 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = 1 + 8 = 9$

tj. s malo opreza može se vrijednost ispravno izračunati



SLIKA 127

36. Srodnost hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija

Potražit ćemo površinu, koju zatvara hiperbola $x^2-y^2 = 1$ s tetivom, koja ima apscisu x . Gornja polovica te površine jednaka je [1]

---

[1] Ovdje smo varijablu integracije i gornju granicu integrala označili istim slovom, što se radi jednostavnosti često čini. Jasnije bi bilo, da pišemo $\int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot d\xi$, jer se time ističe, da varijabla integracije i (promjenljiva) gornja granica nije isto.

$$\int_1^x y\,dx = \int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\cdot dx = \int \sqrt{ch^2 t - 1}\cdot sht\cdot dt \qquad \begin{aligned} x &= cht \\ dx &= sht\cdot dt \end{aligned}$$

$$= \int sht\cdot sht\cdot dt = \int sh^2 t\cdot dt$$

$$\int sh^2 t\, dt = sht\cdot cht - \int ch^2 t\cdot dt = sht\cdot cht - \int (1 + sh^2 t)dt =$$

$$= sht\cdot cht - t - \int sh^2 t\, dt$$

$$2\int sh^2 t\cdot dt = sht\cdot cht - t$$

$$\int sh^2 t\, dt = \frac{sht\cdot cht - t}{2}$$

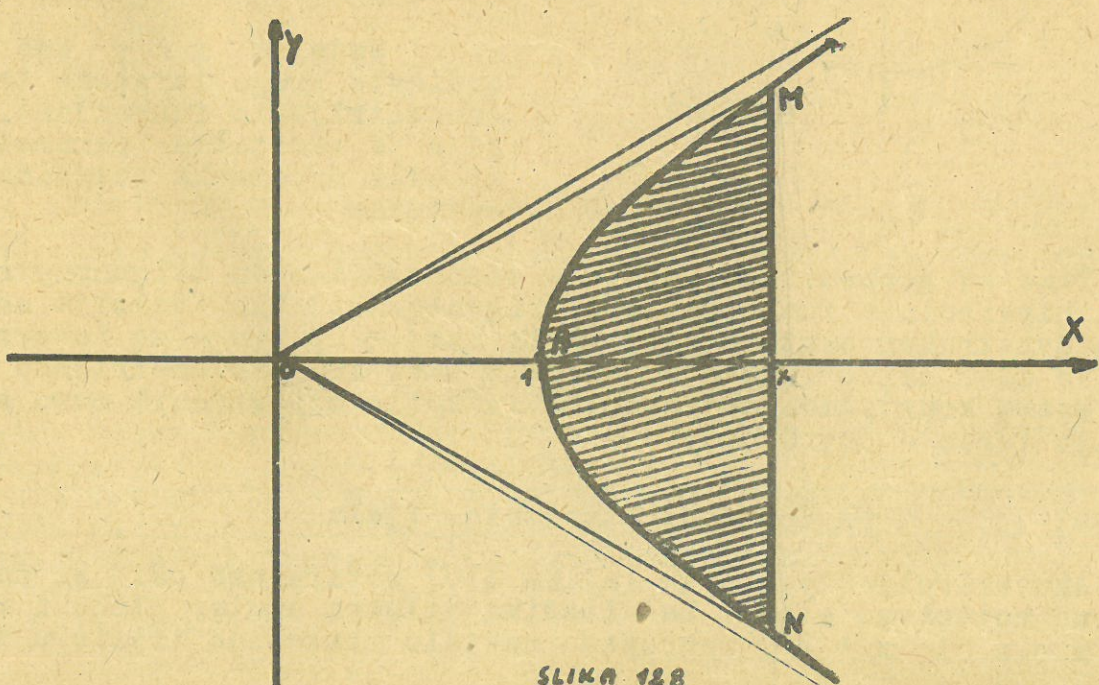
Vraćanje na stare varijable daje

$$\int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\cdot dx = \frac{sht\ cht - t}{2} = \left[\frac{x\sqrt{x^2 - 1} - archx}{2}\right]_1^x =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 1} - arshx}{2}$$

Uvrstimo li $\sqrt{x^2 - 1} = y$ izlazi $P_1^x = \frac{x\cdot y}{2} - \frac{archx}{2}$

Time smo dobili površinu A x M (slika 128). Izračunat ćemo sada površinu sektora OAM. Trokut OxM ima površinu $\frac{1}{2}\ x\cdot y$, pa ako odbijemo od tog trokuta našu izračunatu površinu, dobijemo površinu sektora



SLIKA 128

$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \left(\frac{x \cdot y}{2} - \frac{\operatorname{arch} x}{2}\right) = \frac{\operatorname{arch} x}{2}$$

Dvostruka površina sektora ONAM je dakle

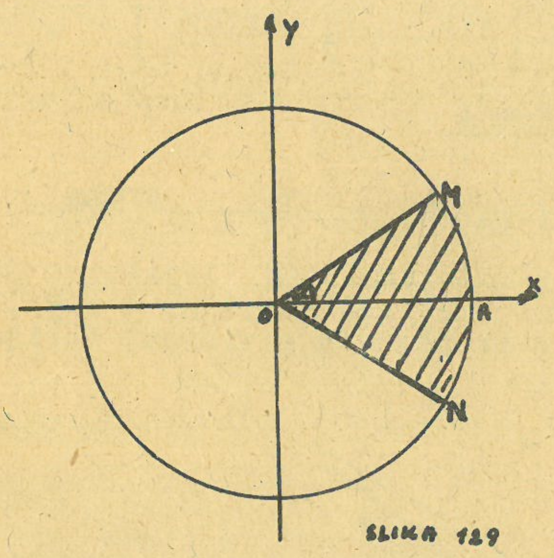
$2 \cdot S = \operatorname{arch} x$, a odatle je x

$$x = \operatorname{ch} 2S ,$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{sh} 2S ;$$

time smo dokazali, da se koordinate x i y kod hiperbole dadu izraziti u parametarskom obliku kao hiperbolne funkcije, gdje varijabla (parametar) 2 S ima geometrijsko značenje površine dvostrukoga sektora ONAM .

Analogno se može postupati kod kruga $x^2 + y^2 = 1$ (slika 129).



SLIKA 129

Znamo, da je kod jediničnog kruga $x = \cos\alpha$ a $y = \sin\alpha$, ali da je i površina sektora za neki kut α jednaka $P = \frac{\alpha}{2}$, gdje je α izražen u lučnoj mjeri. To znači, da površina sektora $OAM = S = \frac{\alpha}{2}$ ili površina dvostrukog sektora ONAM $2S = \alpha$, što ćemo uvrstiti u gornje jednadžbe:

$$x = \cos\alpha = \cos 2S,$$

$$y = \sin\alpha = \sin 2S.$$

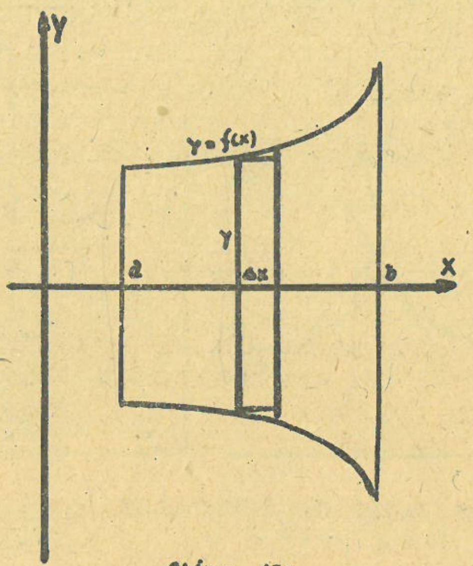
Sada su x i y kao koordinate kruga izražene trigonometrijskim funkcijama, gdje je varijabla (parametar) također dvostruka površina sektora.

Time se geometrijski očituje srodnost između trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija. Kod trigonometrijskih funkcija se mjesto dvostrukog sektora može uzeti luk α , stoga se inverzne funkcije zovu arkus-funkcije (arcus = luk) ili ciklometrijske (koje mjere krug), dok se inverzne funkcije hiperbolnih zovu area funkcije (area - površina).

*

37. Volumen rotacionih tijela

Ako krivulja $y = f(x)$ (slika 130) rotira oko osi x, dobit ćemo rotacionu plohu. Da odredimo volumen unutar plohe i ravnina $x = a$ i $x = b$, razrežemo nastalo rotaciono tijelo u tanke slojeve okomito na os rotacije. Svaki je sloj vrlo približno valjak s kružnom bazom $y^2 \cdot \pi$ i visinom Δx. Sumiramo li njihove volumene $y^2 \pi \cdot \Delta x$ i načinimo granični prijelaz $\Delta x \to 0$, dobit ćemo volumen tijela kao integral



SLIKA 130

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum y_n^2 \pi \cdot \Delta x =$$

$$= \int_a^b y^2 \cdot \pi dx = \pi \int_a^b y^2 dx =$$

$$= \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 \cdot dx \quad (148)$$

Izraz $dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx$ zovemo elementom volumena. Zamišljajući dV vrlo malen možemo ga približno smatrati volumenom vrlo tankoga sloja debljine dx.

Ako neka krivulja $x = \varphi(y)$ rotira oko osi y, doći ćemo na isti način do rezultata

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b \left[\varphi(y) \right]^2 \cdot dy \quad , \quad (149)$$

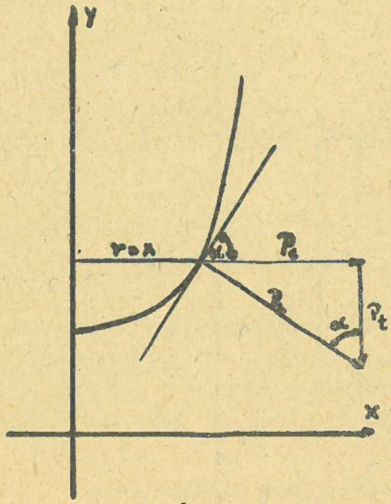
samo što ćemo sada dobiti valjke s bazama paralelnim s osi x, kojima će baza biti $F = x^2 \pi$ a visina Δy.

P a r a b o l o i d

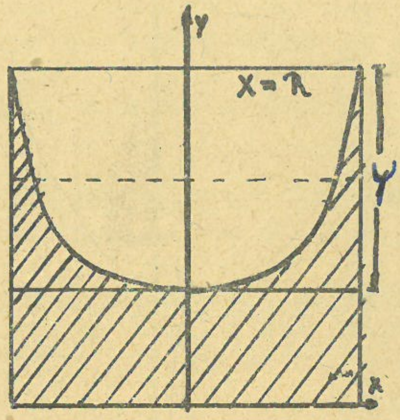
Rotira li valjkasta posuda s vodom oko osi y, vidjet ćemo, da se voda uz stijene digla, a u sredini spustila. Ako načinimo prerez kroz os y, dobit ćemo krivulju, kojoj ćemo naći jednadžbu.

Ako posuda rotira, onda će se vladati tako, kao da rotacije nema, ali da djeluje na svaku česticu vode osim sile teže centrifugalna sila $P_c = m \cdot w^2 r$, gdje je m masa te čestice, w kutna brzina a r njezina udaljenost od osi vrtnje. Prema dolje djeluje težina $P_t = m \cdot g$ a rezultanta tih dviju sila mora biti okomita na tangentu meridijanske krivulje površine vode, jer bi se inače čestica morala pomicati uzduž te krivulje.

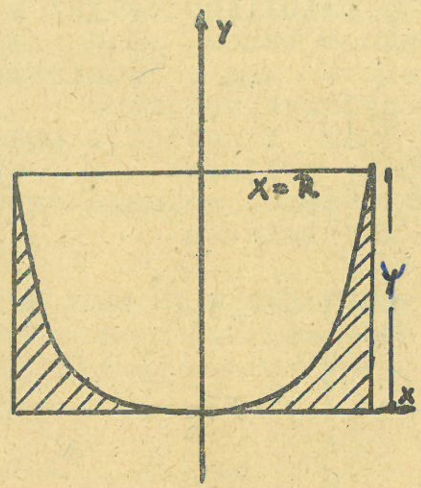
Bit će dakle $y' = \dfrac{P_c}{P_t} = \dfrac{m \cdot w^2 r}{m \cdot g} = \dfrac{w^2 r}{g}$



SLIKA 131a



SLIKA 131b



SLIKA 131c

Pošto to sve promatramo u ravnini (x,y), to je $r = x$, pa je $y' = \frac{w^2}{g}x$, dakle

$$dy = \frac{w^2}{g}\cdot x\cdot dx \qquad \text{i integrirano}$$

$$y = \frac{w^2}{2g}\cdot x^2 + C \quad .$$

Prema tome je ta krivulja parabola $y = ax^2 + c$, gdje je $a = \frac{w^2}{2g}$.

Izračunat ćemo sada volumen nastalog paraboloida i tako naći, za koliko se digla voda uz neki w . U tu svrhu promatrat ćemo samo onaj dio valjkaste posude, u kojem je došlo do promjene nivoa, pa ćemo položiti os x kroz tjeme parabole. Onda je $c = o$, tako da je za $x = o$ i $y = o$ (slika 131.).

Krivulja, koja rotira, je dakle parabola $y = ax^2$, gdje je a dakako $a = \frac{w^2}{2g}$. Volumen paraboloida je $V = \pi\int x^2 dy$, a granice ćemo uzeti od 0 do Y gdje smo sa Y označili najveću visinu, do koje je voda doprla.

$$V = \pi\int_0^Y x^2 dy = \pi\int_0^Y \frac{y}{a}\cdot dy = \frac{\pi}{a}\cdot\int_0^Y y\cdot dy = \frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^Y = \frac{\pi}{a}\,\frac{Y^2}{2}$$

Iz jednadžbe parabole možemo naći pripadnu vrijednost za Y ako stavimo $x = R$, gdje je R polumjer posude $Y = aR^2$ Uvrstimo li to u naš dobiveni volumen, to izlazi

$$V = \frac{\pi}{2a} \cdot Y \cdot a \cdot R^2 = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot Y}{2}$$

Volumen valjka s visinom Y je $R^2 \cdot \pi \cdot Y$, pa vidimo, da je volumen nastalog paraboloida jednak polovini volumena takvog valjka.

Cijela visina paraboloida je $Y = \frac{w^2}{2g} \cdot R^2$. Voda se je digla za polovicu te visine, jer je u mirnom stanju imala oblik valjka i stoga zauzimala samo polovicu visine. Dakle, ako sa h označimo za koliko se digla voda, dobijemo

$$h = \frac{Y}{2} = \frac{w^2}{4g} \cdot R^2$$

Za isto toliko se dakako u sredini voda spustila.

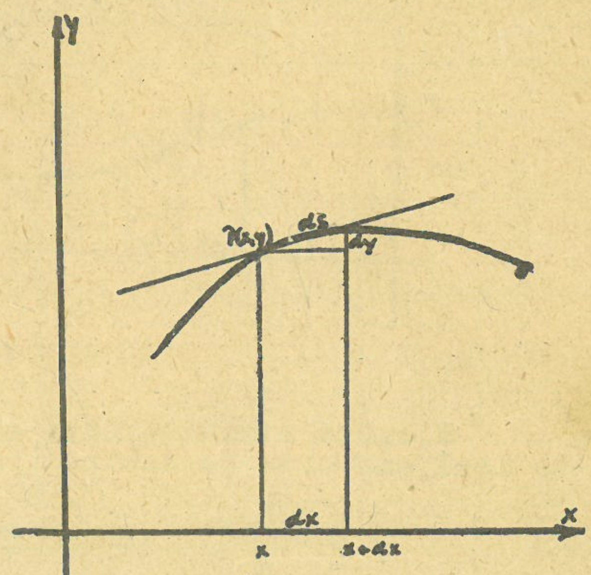
38. Rektifikacija krivulje

Rektificirati krivulju znači naći duljinu luka u jednom intervalu. Poslužit ćemo se najprije neegzaktnim načinom, koji će nas brže dovesti do rezultata.

Uzmimo vrlo maleni dio luka jedne krivulje i nazovimo ga ds . Taj ds stoji u granicama x i x + dx i možemo ga smatrati odsječkom pravca, koji je ujedno i dio tangente, koja prolazi točkom P(x,y). Prirast ordinate je dy , a po Pitagorinom poučku je $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (slika 132).

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$



SLIKA 132

Sumiramo li sve "neizmjerno malene" lukove ds u granicama a i b , dobivamo određeni integral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (150)$$

Da ovaj rezultat izvedemo na stroži način, sjetimo se još jednom definicije određenog integrala. Rekli smo, da je to zajednički limes suma $\Delta x \sum_r y_{r\,max}$ i $\Delta x \sum_r y_{r\,min}$, gdje je općenito y_{rmax} najveća, a y_{rmin} najmanja ordinata u r-tom intervalu. Odabere li se u svakom intervalu neka apscisa ξ_r po volji i pripadna ordinata označi sa $y(\xi_r)$, onda je dakle sigurno $y_{rmin} \leq y(\xi_r) \leq y_{rmax}$ i stoga

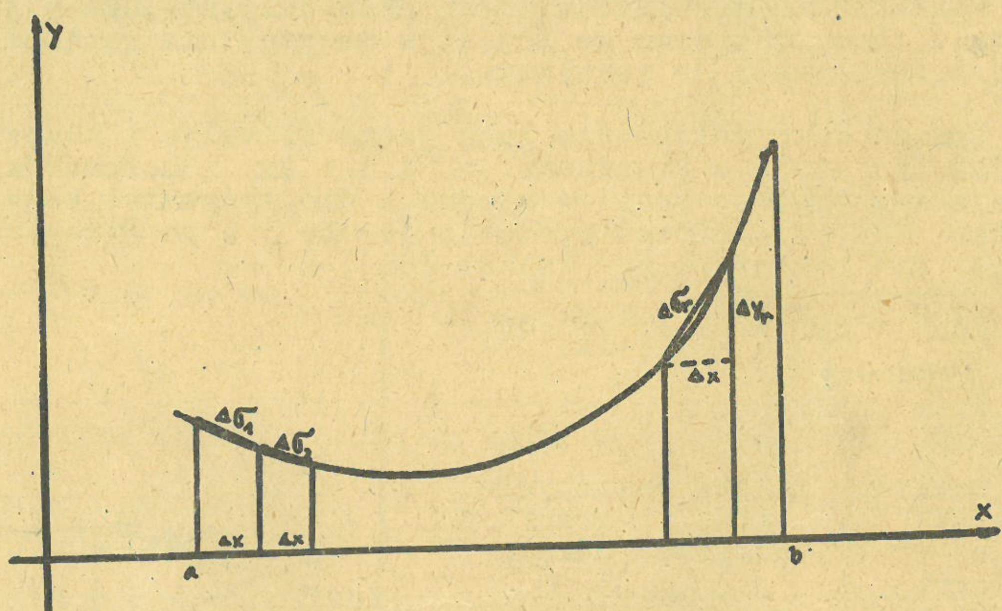
$$\Delta x \sum y_{rmin} \leq \Delta x \sum y(\xi_r) \leq \Delta x \sum y_{rmax} .$$

Ako krajnji članovi te nejednadžbe imaju zajednički limes, mora dakako i srednji član, koji je po veličini između njih, imati taj isti limes, pa je i

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sum_r y(\xi_r) = \int_a^b y dx ,$$

gdje je dakle u svakom intervalu uzeta bilo koja ordinata.

Da nađemo duljinu luka krivulje $y = f(x)$, razdijelimo opet interval na dijelove širine Δx i promatramo krivulji upisani (otvoreni) mnogokut (slika 133).



SLIKA 133

Njegove stranice neka su $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ ...., ukupna duljina te lomljene crte je dakle $\sum_r \Delta\sigma_r$. No po Pitagorinom poučku je

$$\Delta\sigma_r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_r^2} ,$$

a Δy_r možemo izraziti prema teoremu o srednjoj vrijednosti:

$$\Delta y_r = \Delta x \cdot f'(\xi_r) ,$$

gdje je ξ_r apscisa neke točke u r-tom intervalu. Dobijemo dakle

$$\sum_r \Delta\sigma_r = \sum_r \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x^2 \cdot [f'(\xi_r)]^2} = \sum_r \Delta x \sqrt{1 + [f'(\xi_r)]^2}$$

No $\sqrt{1 + [f'(\xi_r)]^2}$ je neka vrijednost funkcije

$F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + y'^2}$ u r-tom intervalu, pa je stoga

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_r \Delta s_r = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_r \Delta x \sqrt{1 + [f'(\xi_r)]^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_r \Delta x \, F(\xi_r) = \int_a^b F(x)dx =$$

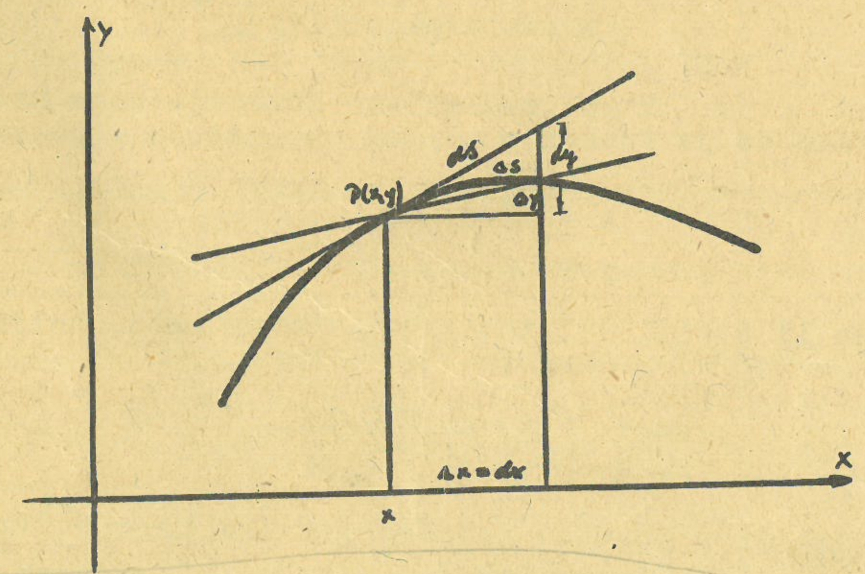
$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Limes duljine upisanog poligona, kada stranice poligona teže prema nuli, zovemo duljinom luka krivulje, koja je time definirana. Budući da sa Δx i Δy, dakle i $\Delta\sigma$ teži prema nuli, to je ovaj uvjet kod našeg graničnog prijelaza ispunjen i duljina luka je stoga zaista dana integralom $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$

"Diferencijal luka" ds je dan izrazom

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

i predstavlja odsječak na tangenti (slika 134).



SLIKA 134 b

Površina rot. plohe $P = 2\pi \int_a y\, ds$

Čim je $dx = \Delta x$ manji, tim točnije se može zamijeniti tetivom $\Delta\sigma$, pa i samim lukom Δs u tom intervalu, t.j. za malene diferencije vrijedi $ds \doteq \Delta\sigma \doteq \Delta s$.

Na pr.

Luk parabole $y = x^2$ u intervalu $[0,a]$ $y' = 2x$.

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}dx \qquad \begin{aligned} 2x &= \operatorname{sh}t \\ dx &= \tfrac{1}{2}\operatorname{ch}t\cdot dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}^2 t\cdot dt = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t - \int \operatorname{sh}^2 t\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t - \int(\operatorname{ch}^2 t - 1)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t - \frac{1}{2}\int\operatorname{ch}^2 t\, dt + \frac{1}{2}\cdot t$$

$$\int \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sh}t\,\operatorname{ch}t + \frac{1}{2}t$$

$$\frac{1}{2}\int\operatorname{ch}^2 t\cdot dt = \frac{1}{4}\cdot(\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t + t)$$

$s = \frac{1}{4}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + \frac{1}{4}t = \frac{1}{4}[\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + t]$

Povratak k staroj varijabli supstitucijom $\operatorname{sh}t = 2x$

$\operatorname{ch}t = \sqrt{1 + 4x^2}$ daje

$$s = \frac{1}{4}\left[2\cdot x\sqrt{1 + 4x^2} + \operatorname{arsh} 2x\right]_0^a = \frac{1}{4}\left[2a\sqrt{1+4a^2} + \operatorname{arsh} 2a\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2a\sqrt{1 + 4a^2} + \ln\left(2a + \sqrt{4a^2 + 1}\right)\right]$$

Parametarski oblik

Ako su i x i y zadani kao funkcije neke nove varijable t, kažemo da je funkcija y od x zadana u parametarskom obliku :

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

Želimo li dobiti duljinu luka, moramo naći, koliko je dx i dy :

$$dx = \varphi'(t)\cdot dt = \dot{x}\cdot dt\ ,$$
$$dy = \psi'(t)\cdot dt = \dot{y}\cdot dt\ .$$

Uvrstimo to u poznatu jednadžbu i dobijemo :

$$s = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\sqrt{\varphi'(t)^2dt^2 + \psi'(t)^2dt^2} = \int\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

α i β su granice integracije po t, dakle se određuju iz $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Kružnica $x^2 + y^2 = r^2$ u parametarskom obliku ima jednadžbe

$$x = r \cdot \cos t,$$
$$y = r \cdot \sin t.$$

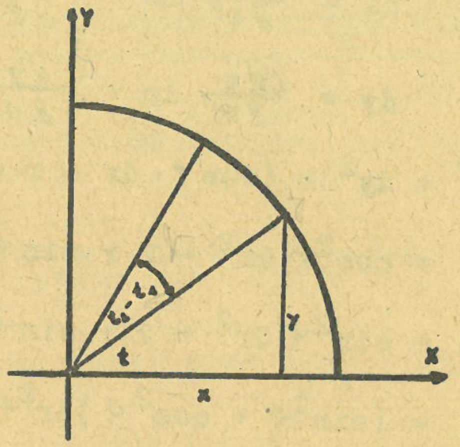
Dobijemo

$$\dot{x} = -r \cdot \sin t$$
$$\dot{y} = r \cdot \cos t,$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= r \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= r \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt = r \left[t \right]_{t_1}^{t_2} = r(t_2 - t_1).$$



SLIKA 135

Vidi se, da su nam t_2 i t_1 kutovi izraženi u lučnoj mjeri, da je dakle parametar t kut polumjera s osi x.

P o l a r n e   k o o r d i n a t e

Ako je krivulja zadana u polarnom koordinatnom sustavu sa $r = f(\varphi)$ (slika 136), onda se duljina krivulje nalazi ovako : Neka je $P(r, \varphi)$ točka na krivulji. Povećamo li kut za $d\varphi$, povećat će se r za dr, a na krivulji dobit ćemo luk ds, za koji možemo kazati da je pravac ako je $d\varphi$ jako malen. Po Pitagorinom poučku je: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, jer stranicu AP možemo smatrati lukom sa centralnim kutom $d\varphi$ i polumjerom r, a za takav luk znamo da je $r\, \cancel{x}\, d\varphi$

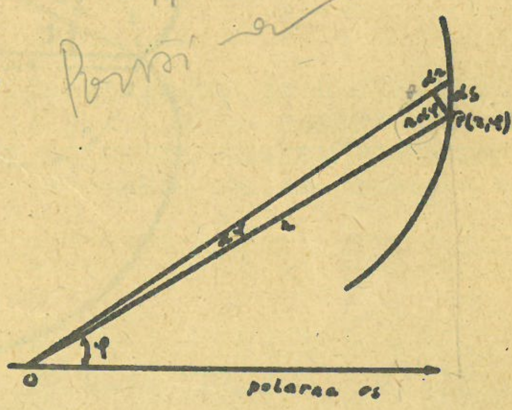
$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$

Površina

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \sqrt{\frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi, \quad \text{jer je } \frac{dr}{d\varphi} = r',$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi \qquad (151)$$



SLIKA 136

Za stroži izvod bi trebalo provesti granični prijelaz pomoću upisane poligonalne crte. No može se jednostranije doći do

jednostavnije

rezultata transformacijom koordinata :

$$x = r\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot dr + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot d\varphi = \cos\varphi\cdot dr - r\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$$

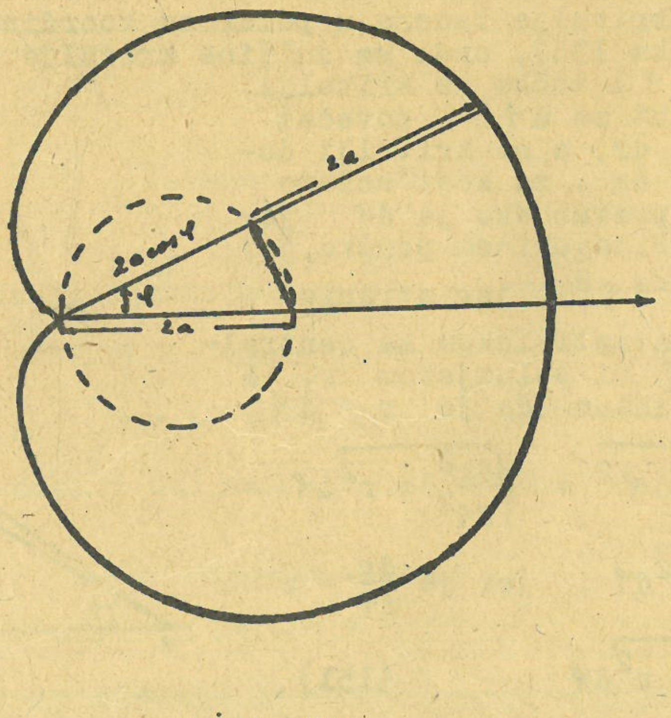
$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}\cdot dr + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot d\varphi = \sin\varphi\cdot dr + r\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi$$

$$dx^2 + dy^2 = (\cos\varphi\cdot dr - r\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi)^2 + (\sin\varphi\cdot dr + r\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi)^2 =$$
$$= \cos^2\varphi\cdot dr^2 - 2\cdot r\cdot\sin\varphi\cos\varphi\cdot dr\cdot d\varphi + r^2\sin^2\varphi\cdot d\varphi^2 +$$
$$+ \sin^2\varphi\cdot dr^2 + 2\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot dr\cdot d\varphi + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 =$$
$$= (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)dr^2 + r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

iz čega izlazi opet prije dobivena formula.

Na pr.

kardioida (slika 137) $r = 2a(1 + \cos\varphi)$
$r' = -2a\sin\varphi$,



SLIKA 137

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{4a^2 \sin^2\varphi + 4a^2(1+\cos\varphi)^2} \cdot d\varphi$$
$$= 2a \cdot \int_0^{\varphi} \sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cdot\cos\varphi + \cos^2\varphi} \cdot d\varphi$$
$$= 2a \cdot \int_0^{\varphi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi} \cdot d\varphi$$
$$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot a \int_0^{\varphi} \sqrt{1+\cos\varphi} \cdot d\varphi = 2\cdot\sqrt{2}\cdot a \int_0^{\varphi} \sqrt{2\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot d\varphi$$
$$= 4a \cdot \int_0^{\varphi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\varphi} = 8a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$$

39. Diferenciranje i integriranje redova funkcija iredova potencija. Izračunavanje broja π

Ako je neka funkcija f(x) dana kao beskonačan konvergentan red.

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

čiji su članovi sami funkcije od x, onda se postavlja pitanje, da li se taj red smije derivirati i integrirati član po član, kao što se to smije kod sume konačnog broja članova.

U tom pogledu vrijede ovi stavci (koje ovdje ne dokazujemo):

TEOREM Ako su u nekom zatvorenom intervalu $[a,b]$ sve funkcije $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... neprekinute i ako je red u tom intervalu uniformno (jednoliko) konvergentan, onda se smije integrirati član po član :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$$

Definicija uniformne konvergencije analogna je definiciji uniformnoga kontinuiteta. Ako je $S_n(x)$ parcijalna suma prvih n članova, a f(x) suma reda, onda mora za po volji (makar kako maleno) odabrani pozitivni ε postojati N tako, da za $n > N$ i za svaki x intervala bude

$$\left| f(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon$$

Za dopustivost deriviranja član po član vrijedi ovaj dovoljni uvjet :

TEOREM Ako članovi reda u intervalu $[a,b]$ imaju neprekinute derivacije $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, ... i ako red dobiven deriviranjem uniformno konvergira u tom intervalu, onda je u tom intervalu dopušteno red derivirati član po član, t.j.

$$f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

(Za dokaze vidi Marković I.str.458, 459.)

Ako su članovi reda potencije od x, t.j. ako se radi o redu potencija,

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots ,$$

uvjeti se pojednostavnjuju. Unutar područja konvergencije može se red potencija integrirati i derivirati član po član bilo koliko puta. (Vidi Marković I, str.364, 460.)

Primjene diferenciranja i integriranja redova

U nekim slučajevima teško je razviti funkciju u red po Mac Laurinovom razvoju, jer su više derivacije pojedinih funkcija komplicirani izrazi, pa je teško dokazati opći oblik koeficijenata reda. Zato se služimo, ukoliko je to moguće, funkcijama, koje diferencirane ili integrirane daju našu traženu funkciju, pa njihove nama poznate redove diferenciramo odnosno integriramo.

Prije nego što prijeđemo na primjenu, vratit ćemo se na Mac Laurinov red i ponoviti binomni poučak. Imamo funkciju $f(x) = (1 + x)^m$.

Razvijmo je u Mac Laurinov red

$f(x) = (1 + x)^m$ $\qquad f(o) = 1$

$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}$ $\qquad f'(o) = m$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$ $\qquad f''(o)\ m(m-1)$

$f^{(r)}(x) = m(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots . \ldots\cdot(m-r+1)\cdot(1 + x)^{m-r}$ $\qquad f^{(r)}(o) = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots . \ldots\cdot(m-r+1)$

$$f(x) = (1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots . +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-r+1)}{r!}x^r \ldots$$

ili

$$= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots + \binom{m}{r}x^r + \ldots .$$

Taj red ide tako daleko, dok r ne poprimi vrijednosr $r = n$, gdje je $n > m$, pa se onaj red prekida.

Na pr.

$n > m$

$$\binom{m}{n} = \binom{5}{7} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot0\cdot(-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = 0$$

Time smo dakle ponovno došli do binomnog poučka.

Ako m nije cio pozitivan broj, već negativan (cio ili razlomljen) ili razlomljen (pozitivan ili negativan), red se ne prekida, kako se lako uviđa, pa u tom slučaju govorimo o "binomnom redu". Treba dakle istražiti, da li mu ostatak R_n teži prema nuli. Dokazat ćemo, da je zaista $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, ako je $|x|<1$, t.j. $-1<x<+1$. Upotrebit ćemo za to Cauchyev ostatak.

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{m}{n-1}x^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\vartheta)^{n-1} \cdot f^{(n)}(1+\vartheta x) =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n (1-\vartheta)^{n-1}(1+\vartheta x)^{m-n} =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n (1+\vartheta x)^{m-1} \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Zbog $x > -1$ očito je $1 + \vartheta x > 1 - \vartheta > 0$, dakle $0 < \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} < 1$

Zadnji faktor $\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$ manji je dakle od 1 za svaki n.

Predzadnji faktor $(1+\vartheta x)^{m-1}$ je konstanta, ako smo x stalno odabrali. Ako dakle uspijemo dokazati, da faktor

$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n$ teži prema nuli, kada n teži prema ∞

$$mx \frac{(m-1)x}{1} \cdot \frac{(m-2)x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(m-n+1)\cdot x}{n-1}$$

Poveća li se n za jednu jedinicu, pridoći će faktor

$$\frac{(m-n)x}{n} = -x\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

Jasno je, da taj dodatni faktor teži prema $-x$, kad $n \to \infty$ jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 0$. Apsolutna vrijednost $\left|x\left(1-\frac{m}{n}\right)\right|$ težit će dakle k apsolutnoj vrijednosti $|x|$. No pretpostavili

onda će time biti i dokazano, da R_n teži prema nuli. Napišimo taj faktor u tu svrhu u obliku smo $|x| < 1$, pa ćemo moći n učiniti tako velik, recimo $n > N$, gdje je N dovoljno velik, da $|x(1 - \frac{m}{n})|$ bude tako blizu $|x|$, da i on bude < 1, makar $|x|$ bio vrlo blizu 1. Neka je dakle za $n > N$ $|x(1 - \frac{m}{n})| < 1 - \varepsilon$. Svi faktori, koji pridolaze poslije toga, manji su od $(1 - \varepsilon)$, njihov produkt je dakle manji od dotične potencije od $(1 - \varepsilon)$, a ta ide prema nuli, kad broj tih faktora, dakle eksponent od $(1 - \varepsilon)$ neograničeno raste. Faktori do $n = N$, koji se dalje ne mijenjaju, pomnoženi su dakle produktom faktora, koji po apsolutnoj vrijednosti teži prema nuli, kada n neograničeno raste. Time je dakle dokazano, da $R_n \to 0$ za $n \to \infty$.

Dade se dalje dokazati, da je binomni red divergentan za $|x| > 1$, t.j. za $x < -1$ i za $x > +1$. Za $m > 0$ konvergira red i za $|x| = 1$, t.j. za $x = +1$ i za $x = -1$ (za $x = -1$ mu je suma nula, $(1 - 1)^m = 0^m = 0$ za $m > 0$, dakle $1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots = 0$).

Za $m \leqq -1$ red divergira za $|x| = 1$, a za $-1 < m < 0$ red konvergira za $x = 1$, a divergira za $x = -1$. Ne ulazimo u dokaze ovoga vladanja reda na granici intervala konvergencije.

Vladanje ostatka za redove

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

može se lako ispitati pomoću Lagrangeova oblika ostatka, pa se vidi, da su ti redovi konvergentni, za svaki x. Red e^x za $x = 1$ daje mogućnost izračunavanja broja e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$$

Red za $\ln(1 + x)$ može se ispitati pomoću Cauchyeva ostatka, ali ćemo do njega i onako doći integracijom reda za $\frac{1}{1+x}$.

Razvijemo sada kao specijalne slučajeve binomnoga reda

$$\frac{1}{(1+x)} = (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ \ldots\ldots \quad \text{(po binomnom poučku)}$$

jer je

$\binom{m}{1} = \binom{-1}{1} = -1$, $\binom{m}{2} = \frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2} = 1$,

$\binom{m}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{1\cdot 2\cdot 3} = -1$, $\binom{m}{4} = \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1$

Na isti način dobijemo i

$$\frac{1}{1-x} :$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$

Vidi se, da su to ujedno geometrijski redovi.

Želimo sada razviti u red funkciju $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Za nju znamo, da je ona derivacija funkcije $\frac{1}{1-x}$, pa možemo pisati

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)' \quad \text{i ako}$$

deriviramo član po član, dobijemo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots..$$

Na isti način integriranjem funkcije $\frac{1}{1-x}$ dobijemo razvijeno u red funkciju $-\ln(1-x)$ jer je

$$-\ln(1-x) = \int \frac{dx}{1-x} = \int (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.)dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots., \quad +C$$

$h.\ x=0 \Rightarrow C=0.$

što smo već dobili, kada smo razvili $y = -\ln(1-x)$ u red po Mac-Laurinovom razvoju.

Međutim po Mac-Laurinovom razvoju teško je razviti u red arctgx, jer je teško odrediti opći oblik koeficijenata. No ako pišemo, da je

$$\operatorname{arctg}x = \int \frac{dx}{1+x^2}$$, možemo vrlo lagano doći do rezultata,

samo ako znamo, kako glasi red funkcije $\frac{1}{1+x^2}$

Za $\frac{1}{1+u}$ znamo, da glasi

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots\ldots ,$$

pa za $u = x^2$ dobijemo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots$$

Dakle

$$\operatorname{arctg}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.)\,dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots. \quad + C$$

1_{+} $x=0 \Rightarrow$ konst. integracije $C = 0$

Na analogan način kao i arctgx možemo i druge arcus-funkcije i area-funkcije razviti u red.

Izračunavanje broja π

Ako su redovi konvergentni, koje dobijemo diferenciranjem ili integriranjem, a i kojom drugom metodom, onda ih možemo upotrebiti za izračunavanje pojedinih vrijednosti od x te funkcije.

Tako je zbog $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}1$, pa na temelju toga možemo izračunati vrijednost za $\frac{\pi}{4}$. Uvrstimo u red za arctgx $x = 1$ i dobijemo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

ili (Leibniz)

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

Time možemo izračunati vrijednost π, samo što se zbog slabe konvergencije toga reda mora uzeti već vrlo mnogo članova, da se dobije π na 2-3 decimale točno.

Da se dođe do oštro konvergentnog reda za π, može se postupati ovako :

Uzet ćemo, da suma dvaju kuteva iznosi $\frac{\pi}{4}$,

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Onda je

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = 1$$

Ako uzmemo da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ onda je

$$\frac{\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\beta}{1 - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta} = 1\,,\ \text{odakle je}\ \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$$

Sad možemo izračunati koliki su α i β jer je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$$

a pošto je

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{onda je} \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \ldots\ldots$$

odakle je zbrajanjem

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right)$$

ili

$$\frac{\pi}{4} = \frac{5}{6} - \frac{35}{648} + \frac{257}{38880} \quad \ldots.$$

Time je postignuta već dosta dobra konvergencija.

Ako želimo još konvergentniji red, uzet ćemo ovako : Neka bude $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, onda je

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{5}{12} \quad \text{a dalje} \quad \operatorname{tg}4\alpha = \frac{2\cdot\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

odakle vidimo, da je $\operatorname{tg}4\alpha > 1$, a pošto je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ onda je $4\alpha > \frac{\pi}{4}$. Razliku tih dvaju kuteva nazovimo β :

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$$

Odatle je

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}4\alpha - 1}{\operatorname{tg}4\alpha + 1} = \frac{1}{239}$$

i

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7}$$

Imali smo, da je

$$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4} \quad \text{, dakle}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$$

Za $\operatorname{tg}\alpha$ smo stavili, da je jednak $\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, dakle

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} \quad \ldots..$$

Dobijemo tako vrlo oštro konvergentni Machinov red (izgovor : Mečin)

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \ldots\right)$$

Da se što spretnije izračunaju članovi reda, može se taj red napisati i u obliku

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{2}{10} - \frac{2^3}{3\cdot 10^3} + \frac{2^5}{5\cdot 10^5} - \frac{2^7}{7\cdot 10^7} \ldots\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \ldots\right)$$

Taj red je već toliko konvergentan, da sa prvih šest članova prve zagrade i 2 člana druge zagrade dobijemo broj π na sedam decimala točno.

Vratimo se sada na binomni red.

1) Binomni red se često prekida poslije linearnog člana, što za vrlo mali x daje dobru aproksimaciju:

$$(1 + x)^m \doteq 1 + mx$$

Tako na pr.

$$\sqrt[n]{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{n}} \doteq 1 + \frac{x}{n}$$

specijalno
$$\sqrt{1 + x} \doteq 1 + \frac{x}{2}\ , \quad \sqrt{1 - x} \doteq 1 - \frac{x}{2}$$

$$\sqrt[3]{1 \pm x} \doteq 1 \pm \frac{x}{3} \quad \text{i t.d.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = (1 + x)^{-\frac{1}{2}} \doteq 1 - \frac{x}{2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \doteq 1 + \frac{x}{2} \quad \text{i t.d.}$$

Ako se radi o korijenu iz binoma, na pr. $\sqrt[n]{\alpha \pm b}$ i ako je α n-ta potencija cijeloga broja a, $\alpha = a^n$, onda se stavlja

$$\sqrt[n]{a^n \pm b} = a\sqrt[n]{1 \pm \frac{b}{a^n}} \doteq a\cdot\left(1 \pm \frac{b}{n\cdot a^n}\right) = a \pm \frac{b}{n\cdot a^{n-1}}$$

napose
$$\sqrt{a^2 \pm b} \doteq a \pm \frac{b}{2a}$$
, uz uvjet, dakako, da je $b \ll a$ (b vrlo malen spram a).

(Ovu posljednju formulu su poznavali već Babilonci.)

2) Binomni red se može upotrebiti i za izračunavanje korijena na željeni broj decimala. To se postizava pomoću jedne približne vrijednosti traženoga korijena. Uzmimo dakle, da je A neka približna vrijednost od $\sqrt[n]{a}$, da je dakle

$$\sqrt[n]{a} \doteq A \quad \text{i stoga} \quad a \doteq A^n \quad \text{ili} \quad a = A^n + \varepsilon$$

gdje je ε malen spram a i može biti pozitivan ili negativan prema tome, da li je A premalena ili prevelika vrijednost za $\sqrt[n]{a}$. ε je lako dobiti kao $\varepsilon = a - A^n$, pa se sada može $\sqrt[n]{a}$ razviti u binomni red :

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{A^n + \varepsilon} = A\sqrt[n]{1 + \frac{\varepsilon}{A^n}} = A\cdot\left\{1 + \binom{\frac{1}{n}}{1}\frac{\varepsilon}{A^n} + \binom{\frac{1}{n}}{2}\frac{\varepsilon^2}{A^{2n}} + \ldots\right\}$$

Taj je red tim oštrije konvergentan, čim je manji ε, dakle čim točniju približnu vrijednost našega korijena imamo unaprijed na raspolaganje. Najgrublja približna vrijednost je onaj cijeli broj, čija je n-ta potencija najbliža broju a.

Na pr.

$$\sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1} = 3\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 3\left\{1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{1}{9} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{9^2} - \binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \ldots\right\}$$

Općenito je
$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}, \quad \text{dakle}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot4}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot x^4 + \ldots\ldots$$

i
$$\sqrt{8} = 3\left\{1 - \frac{1}{2\cdot9} - \frac{1}{2\cdot4\cdot9^2} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot9^3} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9^4} - \ldots\right.$$

Radimo li s boljom aproksimacijom, konvergencija je oštrija :

Stavimo $\sqrt{8} \doteq 2{,}8 = A$

$$2{,}8^2 = 7{,}84 \qquad \varepsilon = a - A^2 = 8 - 7{,}84 = 0{,}16, \quad \text{dakle}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2{,}8^2 + 0{,}16} = 2{,}8\cdot\sqrt{1 + \frac{0{,}16}{7{,}84}} = 2{,}8\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{49}} =$$

$$= 2{,}8\left(1 + \frac{1}{2\cdot49} - \frac{1}{2\cdot4\cdot49^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot49^3} - \ldots\right)$$

Vidi se, da članovi mnogo brže opadaju. Da se članovi lakše računaju, poželjno je, da se u nazivniku nalaze potencije od 10. To se postizava, ako se traži približna vrijednost recipročnoga korijena, dakle za $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

U našem slučaju za $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \doteq \frac{1,4}{4} = 0,35$

ili $\sqrt{8} \doteq \frac{1}{0,35} \doteq \frac{100}{35}$

$$\varepsilon = 8 - \frac{100^2}{35^2} = \frac{8.35^2 - 100^2}{35^2} = -\frac{200}{1225}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{100}{35}\right)^2 - \frac{200}{35^2}} = \frac{100}{35}\cdot\sqrt{1 - \frac{200}{100^2}} = \frac{100}{35}\sqrt{1 - \frac{2}{100}} =$$

$$= \frac{100}{35}\left(1 - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 100} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2^2}{100^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2^3}{100^3} \dots\right)$$

Vidi se, da se članovi ovdje lakše računaju. Procjena pogreške, koju činimo prekidanjem poslije izvjesnoga člana, dakle postignuta točnost, lako je procijeniti. Ako predznaci alterniraju (izmjenjuju se), a to se događa u razvoju $\sqrt[n]{1+\varepsilon}$ za $\varepsilon > 0$, zbog alterniranja predznaka binomnih koeficijenata, znamo, da je pogreška apsolutno manja od prvoga ispuštenog člana. Ako predznaci ne alterniraju, dakle za $\varepsilon < 0$, možemo se poslužiti formulom za Lagrangeov oblik ostatka : za $f(x) = \sqrt[n]{1+\varepsilon}$

je
$$R_r = \frac{\varepsilon^r}{r!}\, f^{(r)}(1 + \vartheta\varepsilon) = \binom{\frac{1}{n}}{r}(1 + \vartheta\varepsilon)^{\frac{1}{n} - r}\cdot\varepsilon^r$$

$$= \binom{\frac{1}{n}}{r}\frac{\varepsilon^r}{(1 + \vartheta\varepsilon)^{r - \frac{1}{n}}}$$

Uzmemo li $\vartheta = 1$, t.j. prevelik, to će zbog $\varepsilon < 0$ biti $1 + \varepsilon < 1 + \vartheta\varepsilon$, dakle nazivnik premalen, dakle razlomak $\frac{1}{(1+\varepsilon)^{r-\frac{1}{n}}}$ prevelik. Pogreška je dakle sigurno apsolutno manja

od $\left|\binom{\frac{1}{n}}{r}\varepsilon^r\right| \frac{1}{(1+\varepsilon)^{r-\frac{1}{n}}}$. Zbog $1 + \varepsilon < 1$ dalje

smanjujemo nazivnik, ako mu povećamo eksponent za $\frac{1}{n}$, pa dobijemo jednostavniju procjenu $\left|R_n\right| < \left|\binom{\frac{1}{n}}{r}\varepsilon^r\right|\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)^r}$.

Eulerove formule

40. Metode za izračunavanje neodređenih integrala

Integrali racionalnih funkcija.

$f(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

Tražimo rješenje integrala $\int f(x)dx$, gdje je $f(x)$ razlomljena racionalna funkcija $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ su cijele racionalne funkcije, t.j. polinomi m-tog i n-tog stupnja.

a) Stupanj m brojnika manji od stupnja n nazivnika $(m < n)$

Na pr. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-3)(x+5)(x-1)} \cdot dx$

Ovdje vrijedi, da je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika, jer kada bi izmnožili sve binome u nazivniku, dobili bi polinom 3. stupnja, a u brojniku je kvadratni polinom.

Kako nas zanima sada samo način, kako bi mogli pisati taj isti integral u prikladnijem obliku, to ćemo promatrati samo integrand :

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-3)(x+5)(x-1)}$$

Pokušat ćemo taj razlomak rastaviti u "parcijalne razlomke" :

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-3)(x+5)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+5)} + \frac{C}{(x-1)} ,$$

gdje su A, B i C koeficijenti, koje moramo naći. Ako svedemo na zajednički nazivnik, dobijemo

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-3)(x+5)(x-1)} = \frac{A(x+5)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+5)(x-1)}$$

ili jednostavnije :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= A(x+5)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-3)(x+5) \\ &= A(x^2 + 4x - 5) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 + 2x - 15) \\ &\equiv x^2(A + B + C) + x(4A - 4B + 2C) - 5A + 3B - 15C \end{aligned}$$

A, B i C su konstante, koje ćemo odrediti tako, da gornja jednadžba vrijedi za sve vrijednosti od x , t.j. da ta relacija bude "identitet". Ako dvije cijele racionalne funkcije od x treba da budu identično jednake (t.j. jednake za svaki x), onda moraju koeficijenti jednako visokih potencija od x biti jednaki. Da se to uvidi, uzmimo na pr. dvije kvadratne funkcije :

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \equiv a_2x^2 + b_2x + c_2$$

(znak $\equiv$ znači identično jednako).

Jednakost mora vrijediti za svaki x, dakle i za $x = o$, iz čega je odmah

$$c_1 = c_2$$

Možemo stoga ispustiti članove c_1 i c_2, pa ostaje

$$a_1x^2 + b_1x \equiv a_2x^2 + b_2x \,,$$

opet za svaki x. Dijelimo li sa x, dobijemo

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \,,$$

što sigurno vrijedi za svaki $x \neq 0$, dok za $x = 0$ to ne možemo odmah tvrditi, jer ako je $x = 0$, onda sa x nismo smjeli jednadžbu podijeliti. Moglo bi za $x = 0$ biti $a_1x^2 + b_1x = a_2x^2 + b_2x$, a da ipak nije $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$.

No napišimo jednadžbu u obliku

$$b_1 - b_2 = (a_2 - a_1)x \,.$$

Ako je slučajno $a_1 = a_2$, onda izlazi $b_1 = b_2$. Ako je $a_1 \neq a_2$, zaključujemo ovako: Jednadžba svakako vrijedi za svaki $x \neq o$. Desnu stranu (njezinu apsolutnu vrijednost) možemo učiniti bilo kako malenu, ako x odaberemo dovoljno malen. Lijeva strana dakle ne može biti od nule različita. Da je ona, recimo, jednaka nekom broju $\delta \neq 0$ mogli bismo, ma kako malen bio $|\delta|$ odabrati $|x|$ tako malen, da desna strana postane apsolutno manja od $|\delta|$. Treba samo odabrati $|x| < \frac{|\delta|}{|a_2 - a_1|}$. Time je dobivena kontradikcija, t.j. $b_1 - b_2$ ne može biti od nule različit, dakle

$$b_1 = b_2$$

Vidimo stoga, da je ipak i za $x = 0$

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2$$

Analognim zaključivanjem izlazi

$$a_1 = a_2$$

i, da je funkcija višega stupnja, i za sve ostale koeficijente.

U našem slučaju dakle dobijemo

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1, \\ 4A - 4B + 2C &= 2, \\ \underline{-5A + 3B - 15C} &\underline{= 3} \end{aligned}$$

Riješimo li te jednadžbe, dobijemo, da je

$$A = \frac{9}{8}\ , \quad B = \frac{3}{8} \quad i \quad C = -\frac{1}{2}$$

Uvrstimo li to sada u naše parcijalne razlomke, dobijemo

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-3)(x+5)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+5)} + \frac{C}{(x-1)} =$$

$$= \frac{9}{8(x-3)} + \frac{3}{8(x+5)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

Pošto smo tako pojednostavnili naš integrand, vratit ćemo se integralu, koji se sada može lako riješiti.

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-3)(x+5)(x-1)}\, dx = \int \left[\frac{9}{8(x-3)} + \frac{3}{8(x+5)} - \frac{1}{2(x-1)} \right] dx$$

$$= \frac{9}{8}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{3}{8}\cdot\int \frac{dx}{x+5} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{9}{8}\cdot \ln(x-3) + \frac{3}{8}\ln(x+5) - \frac{1}{2}\ln(x-1)\ ,$$

Pišemo li ovo u općem obliku, dobijemo

$$\int \left(\frac{\varphi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}\right) dx = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots + \frac{N}{x-x_n} \right) dx\ ,$$

gdje će se A, B .... naći na gore opisani način .

Ako nazivnik nije zadan kao produkt linearnih faktora, kao što smo to pretpostavili, nego kao polinom n-toga stupnja

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

postavlja se zadatak, da taj polinom rastavimo u takve linearne faktore. Poslužit ćemo se za to "osnovnim teoremom algebre" (dokazao Gauss 1799.), koji izriče da svaka algebarska jednadžba ima barem jedan korijen (realan ili kompleksan). (U dokaz toga teorema ovdje ne možemo ulaziti). Mora dakle postojati neka vrijednost x_1, koja zadovoljava jednadžbu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\ ,$$

t.j. vrijedi

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

Odbijemo li te dvije jednadžbe jednu od druge, dobijemo

$$a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \ldots + a_1(x - x_1) = 0$$

Budući da je općenito $x^r - x_1^r$ djeljivo sa $x - x_1$, to možemo tu jednadžbu podijeliti sa $(x - x_1)$, pa dobijemo na lijevoj strani polinom $P_{n-1}(x)$ u kojem se x pojavljuje u najviše $(n-1)$-toj potenciji. Ako taj polinom nazovemo $P_{n-1}(x)$, vrijedi dakle

$$\frac{P_n(x)}{x-x_1} = P_{n-1}(x)$$

ili

$$P_n(x) = (x - x_1)\cdot P_{n-1}(x)$$

No i jednadžba

$$P_{n-1}(x) = 0$$

mora imati barem jedan korijen x_2 (koji može i ne mora biti jednak x_1), pa možemo isto tako staviti

$$P_{n-1}(x) = (x - x_2)\, P_{n-2}(x) ,$$

gdje je $P_{n-2}(x)$ polinom $(n-2)$-toga stupnja.

Ako to uvrstimo u naš $P_n(x)$, dobijemo

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\, P_{n-2}(x)$$

Tako nastavljajući dopiremo do relacije

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdot \ldots \cdot(x - x_n)\cdot A$$

gdje je A polinom nultoga stupnja, t.j. konstanta. Vidi se, da je $A = a_n$, jer ako se desna strana izmnoži, dobije se uz x^n kao koeficijent A, a u našem polinomu smo imali koeficijent a_n, dakle $A = a_n$.

Vidi se dakle, da se svaki polinom n-toga stupnja može rastaviti u n linearnih faktora. Ako su neki od korijena x_1, x_2 .... međusobno jednaki, govorimo o "višestrukim" korijenima. Brojimo li takve višestruke korijene toliko puta, koliko ima "jednakih" linearnih faktora, u kojima se pojedini korijen pojavljuje, možemo reći, da jednadžba n-toga stupnja ima n korijena. Tako na pr. jednadžba

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad (x - 1)^3 = 0$$

ima tri jednaka korijena +1, ili trostruki korijen +1. Zasada kod rastavljanja u parcijalne razlomke pretpostavljamo, da su korijeni svi jednostruki, t.j. međusobno različiti.

Neka je na pr. dan integral $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10}$. Imamo $x^2 + 3x - 10 = P_n(x) = (x_2 - 2)\cdot(x + 5)$, gdje su 2 i -5 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Dakle

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+5)} = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}\right)\cdot dx ,$$

što se dalje rješava po prije izloženoj metodi.

b) Brojnik je višeg ili jednakog stupnja kao nazivnik .

U slučaju da je brojnik višeg stepena nego nazivnik, ili jednakog stupnja, podijelimo brojnik sa nazivnikom a ostatak rješavamo pomoću rastavljanja u parcijalne razlomke.

Općenito bi to glasilo ovako :

Imamo $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx$ gdje je $m \geqq n$.

U brojniku je dakle polinom m-toga stupnja, a u nazivniku n-toga stupnja. Pošto je $m \geqq n$ možemo ta dva polinoma podijeliti, pa dobijemo

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx = \int \left(P_{m-n}(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}\right)\cdot dx$$

polinom $P_{m-n}(x)$ dade se jednostavno član po član integrirati, dok kvocijent polinoma $P_{n-1}(x)$ i $Q_n(x)$ rješavamo po metodi pod a), jer se polinom $Q_n(x)$ dade pretvoriti u produkt linearnih faktora i onda se taj kvocijent rješava rastavljanjem u parcijalne razlomke.

$$\int\left[P_{m-n}(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}\right]dx = \int\left[P_{m-n}(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}\right]dx$$

$$= \int\left[P_{m-n}(x) + \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots + \frac{N}{x-x_n}\right]\cdot dx$$

Na pr. $\int \frac{x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 6}\, dx$;

podijelimo li brojnik s nazivnikom, dobijemo

$$\int\left[x^3 + 8x^2 + 32x + 113 + \frac{362x - 675}{x^2 - 5x + 6}\right]dx =$$

$$\int\left[x^3 + 8x^2 + 32x + 113 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right]dx$$

jer su 2 i 3 riješenja jednadžbe $x^2 - 5x + 6 = 0$. Integriramo li, dobijemo

$$I = \frac{x^4}{4} + 8\cdot\frac{x^3}{3} + 32\cdot\frac{x^2}{2} + 113x + A\cdot\ln(x-2) + B\cdot\ln(x-3)$$

Izračunamo li A i B po gore već opisanoj metodi, dobit ćemo, da je $A = -49$ a $B = 411$, pa je rezultat te integracije

$$I = \frac{x^4}{4} + 8\frac{x^3}{3} + 16x^2 + 113x - 49.\ln(x-2) + 411\cdot\ln(x-3)$$

Ako je brojnik istog stupnja kao i nazivnik, bit će $P_{m-n}(x)$ nultoga stupnja, t.j. konstanta, koja integrirana daje samo linearni član.

Korijeni x_1, x_2, ..., koje dobijemo stavljanjem polinoma u nazivniku jednako nuli, mogu biti realni ili kompleksni brojevi. U slučaju kompleksnih brojeva izlaze u rješenju logaritmi kompleksnih brojeva, što računski nije zgodno. Ako su svi koeficijenti polinoma $Q_n(x)$ (nazivnika) realni, onda se može lako uvidjeti, da k svakom kompleksnom korijenu $a+bi$ ima i jedan konjugirano kompleksni $a-bi$, t.j. ako $x = a + bi$ zadovoljava jednadžbu, čini to i $x = a - bi$. Kompleksni se korijeni dakle pojavljuju u parovima konjugirano kompleksnih. Logaritmi u rješenju, koji odgovaraju takvom paru, daju se sažeti u izraz, koji više ne sadrži kompleksnih brojeva.

(pojavljuju se)

Ako se dakle pojavljuju kompleksni korijeni u parovima konjugirano kompleksnih brojeva, onda se dotični kompleksni članovi rješenja moraju sastaviti u realne, ili treba rješavati taj integral kojom zgodnijom metodom, gdje će se izbjeći takova rješenja.

Na pr.

$$\int\frac{dx}{x^2 + 1}$$

Za taj integral dakako znamo, da je rješenje $\operatorname{arctg}x + C$, ali ako želimo rješavati pomoću rastavljanja u parcijalne razlomke, račun bi bio ovaj.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\, i$$

Dakle :

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i} \right) dx, \text{ odakle je}$$

$$A = -\frac{1}{2i} \quad \text{a} \quad B = +\frac{1}{2i}$$

$$\int \left(\frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}\right) \cdot dx = -\int \frac{dx}{2i\,(x+i)} + \int \frac{dx}{2i\,(x-i)} =$$

$$= -\frac{1}{2i} \cdot \ln (x+i) + \frac{1}{2i} \cdot \ln (x-i) =$$

$$= \frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i}$$

Ako uzmemo, da je rezultat jednak y , dobijemo

$$y = \frac{1}{2i} \cdot \ln \frac{x-i}{x+i} \qquad \text{ili}$$

$2iy = \ln \frac{x-i}{x+i}$; ako to antilogaritmiramo, dobijemo

$e^{2iy} = \frac{x-i}{x+i}$ ili

$xe^{2iy} + ie^{2iy} = x - i$ izlučimo li x i i, izlazi

$x(1-e^{2iy}) = i\,(1 + e^{2iy})$, a odatle je x

$$x = \frac{i(1 + e^{2iy})}{1 - e^{2iy}}$$

Pomnožimo li brojnik i nazivnik sa e^{-iy} dobijemo

$$x = \frac{i(e^{-iy} + e^{iy})}{e^{-iy} - e^{iy}}$$

što je po relaciji između eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija jednako $-\operatorname{ctg} y$.

$$x = -\operatorname{ctg} y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{ili}$$

$$\operatorname{arctg} x = y - \frac{\pi}{2}$$

$y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$, gdje je $\frac{\pi}{2}$ aditivna konstanta. Došli smo dakle do istog rezultata.

Da izbjegnemo ovakav račun, spojit ćemo parove konjugirano kompleksnih linearnih faktora u nazivniku u po jedan kvadratni realni faktor. U dotičnom parcijalnom razlomku stavlja se u nazivnik taj kvadratni faktor, a u brojnik linearna funkcija. Na pr.

$$\int \frac{\overset{1}{f(x)}}{(x-x_1)\cdot(x^2+ax+b)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+C}{x^2+ax+b}\right) dx ,$$

gdje sada A, B i C tražimo na isti način kao i prije.

Prilikom rješavanja takvog integrala javljaju se integrali oblika $\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\,dx$, koje onda rješavamo ovako :

Nastojimo prvo razdijeliti taj integral na dva integrala tako, da jedan integral ima u brojniku derivaciju nazivnika. U tu svrhu izlučimo $\frac{A}{2}$ pred integral :

$$I = \int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}}{x^2+ax+b} \quad ;$$

dodamo li sada u brojniku a i -a, ne mijenja se vrijednost integrala, dakle

$$I = \frac{A}{2}\int \frac{2x+a-a+\frac{2B}{A}}{x^2+ax+b}\,dx$$

Sada već možemo rastaviti u dva integrala :

$$I = \frac{A}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\,dx - \frac{A}{2}\int \frac{a-\frac{2B}{A}}{x^2+ax+b}\,dx$$

gdje je $a - \frac{2B}{A}$ konstanta .

Prvu integraciju znamo provesti :

$$I = \frac{A}{2}\cdot\ln(x^2+ax+b) - \frac{A}{2}\left(a-\frac{2B}{A}\right)\int \frac{dx}{x^2+ax+b} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) - \left(\frac{Aa}{2} - B\right)\int \frac{dx}{x^2+ax+b} .$$

Sada nam još preostaje izračunati $\int \frac{dx}{x^2+ax+b}$ izraz x^2+ax+b možemo rastaviti na potpuni kvadrat binoma i jednu konstantu :

$$x^2+ax+b = x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b-a^2}{4}$$

i to uvršteno u integral

$$\int \frac{dx}{(x^2 + ax + b)} = \int \frac{dx}{(x + \frac{a}{2})^2 + \frac{4b-a^2}{4}}$$

izlučimo li pred integral $\frac{4b - a^2}{4}$, dobijemo

$$I = \frac{1}{\frac{4b-a^2}{4}} \cdot \int \frac{dx}{\frac{(x + \frac{a}{2})^2}{\frac{4b-a^2}{4}} + 1} = \frac{4}{4b-a^2} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{4}{4b-a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}}\right)^2 + 1}$$

supstituiramo li sada $\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} = t$ onda je $dt = \frac{2 \cdot dx}{\sqrt{4 \cdot b-a^2}}$ ili

$$dx = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \cdot dt$$

$$I = \frac{4}{4b-a^2} \cdot \int \frac{\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot b-a^2}} \int \frac{dt}{1+t^2}$$

i time smo sveli integral na oblik $\int \frac{dt}{1+t^2}$. Postupak je provediv na ovaj način, jer je $\sqrt{4b - a^2}$ realan, budući da je $4b-a^2$ pozitivan, inače bi $x^2 + ax + b$ bio produkt realnih linearnih faktora, a ne kompleksnih, kako smo to pretpostavili.

$$\frac{2}{\sqrt{4 \cdot b-a^2}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \cdot \operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot x+a}{\sqrt{4b-a^2}} \right)$$

Konačno riješenje integrala $\int \frac{Ax+B}{x^2-ax+b} dx$ je :

$$I = \frac{A}{2} \cdot \ln(x^2 + ax + b) - \frac{Aa - 2B}{\sqrt{4b-a^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+a}{4b-a^2} \right)$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \int \frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)}$$

Budući da $x^2 - x + 1 = 0$ nema realna rješenja jer su $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, to bi linearni faktori bili kompleksni, pa

$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ćemo se poslužiti gornjom metodom.

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)\cdot dx$$

Izračunamo li A, B i C, dobijemo $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$

$$I = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right).dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{6}\cdot\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}} + 1}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Supstitucija $\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = t$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$ daje

$$I = \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg} t$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Dosad smo pretpostavljali, da su korijeni jednadžbe $P_n(x) = 0$ ($P_n(x)$ nazivnik pod integralom) jednostruki. Ako ta jednadžba ima višestruke korijene, ako se dakle pojavljuju višestruki faktori - linearni za realne korijene, a kvadratni za parove konjugiranih kompleksnih korijena - onda rastavljanje u parcijalne razlomke treba postaviti ovako : Za svaki višestruki linearni faktor, recimo r-struki, postavi se r parcijalnih razlomaka, kojima su brojnici neodređene konstante, a nazivnici su potencije toga linearnoga faktora s eksponentima od 1 do r. Za svaki višestruki kvadratni faktor, recimo s-struki, postavi se s parcijalnih razlomaka, u brojnicima su linearne funkcije s neodređenim koeficijentima, a u nazivnicima potencije toga kvadratnoga faktora s eksponentima od 1 do s .

Na pr.

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{(x-2)^2(x+3)^3(x-1)(x^2-x+1)^2} = \int \Big[\frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+3)^3} + \frac{D}{(x+3)^2} +$$
$$+ \frac{E}{x+3} + \frac{F}{x-1} + \frac{G+Hx}{(x^2-x+1)^2} + \frac{J+Kx}{x^2-x+1}\Big]dx$$

Da je uvijek moguće konstante odrediti tako, da integrand bude zaista rastavljen u ovakve razlomke, može se dakako dokazati, u što ovdje ne ulazimo. (Potanje vidi Marković I,str.180).

Integraciju razlomaka s potencijom linearnih faktora u nazivniku lako je provesti. Općenito je za $r \neq 1$

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)^r} = \int (x-x_1)^{-r}\,dx = \frac{(x-x_1)^{-r+1}}{-r+1} = -\frac{1}{(r-1)(x-x_1)^{r-1}}$$

Preostaje dakle još integracija razlomaka s potencijama kvadratnih izraza u nazivniku. Ti se integrali rješavaju metodom rekurzije, t.j. svođenja na isto takve integrale sa sve nižim eksponentima u nazivniku.

41. Rekurzione formule

Prije samog postupka rekurzije svodi se integral $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$ pomoću iste metode, koju smo opisali za slučaj $n = 1$, na integral

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

Taj se integral sada podvrgne slijedećem postupku :

$$I = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^n}\,dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,dt =$$
$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}$$

Prvi integral smo sveli u nazivniku za jednu potenciju manje.

Nazovimo $\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} = I_1$ a $\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = I_2$. Onda je $I = I_1 - I_2$.

Integral $I_2 = \int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^n}$ pripremimo za parcijalnu integraciju.

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{t\cdot 2\cdot t}{(1+t^2)^n}\,dt \qquad t = u \qquad \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^n} = dv$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[- t\cdot\frac{1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}\right]$$

$$= - \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$

$$= (1 - \frac{1}{2\cdot n-2})\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}$$

Time je integral I izražen istovrsnim integralom s nižim eksponentom. Zovemo to rekurzionom formulom. Ponavljanjem toga postupka mora se konačno taj eksponent sniziti na jedinicu, pa je onda integracija provediva.

Na pr.

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{(1+t^2)^2} = \text{arctgt} - \frac{1}{2}\left[- \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right]$$

$$= \text{arctg } t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\,\text{arctg } t =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{arctg } t + \frac{t}{2(1+t^2)}$$

(Ovdje je trebao samo jedan korak rekurzije)

42. Algebarske jednadžbe

Time smo dakle u mogućnosti riješiti svaki integral racionalne funkcije, pretpostavivši da znamo naći korijene jednadžbe $P_n(x) = 0$. (Nazivnik integranda stavljen jednako nuli.)

Poznato je rješavanje kvadratnih jednadžbi i poznato je sniževenje stupnja simetričnih jednadžbi

Kubne jednadžbe mogu se riješiti ovako :

U jednadžbi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

postizava se iščezavanje kvadratnog člana supstitucijom

$$x = y - \frac{a}{3} ,$$

pa izlazi

$$y^3 + py + q = 0$$

gdje su p i q dobiveni novi koeficijenti. Riješi li se ova jednadžba, treba dobiveni y samo uvrstiti u supstituciju $x = y - \frac{a}{3}$, pa se dobije x. Da se dakle pojednostavnjena jednadžba riješi, stavimo $y = u + v$, t.j. rastavimo traženo rješenje u dva sumanda. Uvrštenje u jednadžbu daje

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q =$$

$$= u^3 + v^3 + 3\cdot uv(u+v) + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

Budući da u i v nisu oba određena, nego samo njihov zbroj, to ih možemo podvrgnuti još jednom uvjetu. Odabiremo

$$3\cdot uv + p = 0$$

a od jednadžbe je ostalo

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Vrijedi dakle $uv = -\frac{p}{3}$ ili kubiramo

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

$$u^3 + v^3 = -q .$$

Općenito znamo, da rješenja ξ_1 i ξ_2 kvadratne jednadžbe $\xi^2 + A\cdot\xi + B = 0$ zadovoljavaju relacije

$$\xi_1 + \xi_2 = - A,$$
$$\xi_1 \cdot \xi_2 = B ,$$

što se odmah uviđa, ako uočimo, da je $\xi^2 + A\cdot\xi + B = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) = \xi^2 - (\xi_1 + \xi_2)\xi + \xi_1\xi_2 = 0$ Veličine u^3 i v^3 moraju dakle biti rješenja kvadratne jednadžbe

$$\xi^2 + q\cdot\xi - \frac{p^3}{27} = 0 ,$$

t.j.
$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} ,$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Izvadimo 3.korijen i zbrojimo, pa dobijemo $y = u + v$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(Cardanova formula). Svaki treći korijen ima, kako znamo, 3 vrijednosti, pa bi svega bilo 9 mogućnosti. Međutim zahtjev $uv = -\frac{p}{3}$ iz tih mogućnosti izlučuje 6 neispravnih, pa ostaju 3 rješenja kubne jednadžbe, kako mora biti. Slično se mogu rješavati jednadžbe 4.stupnja, u što ovdje ne ulazimo.

Jednadžbe iznad 4.stupnja ~~doduše~~ imaju uvijek rješenja (prema osnovnom teoremu algebre), ali se ta rješenja ne daju izraziti pomoću konačnog broja elementarnih operacija (zbrajanje, odbijanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i radiciranje) izvršenih na koeficijentima jednadžbe, ako ti koeficijenti nisu podvrgnuti naročitim uvjetima, kao na pr. kod simetričnih jednadžbi. Dadu se dakle u tom smislu riješiti samo specijalni tipovi jednadžbi višega od 4.stupnja. Međutim, rješenja se mogu ipak naći željenom točnošću pomoću metoda aproksimacije.

U tu svrhu se nariše graf funkcije

$$y = a_n x^n + \ldots\ldots + a_o$$

pomoću izvjesnog broja računski određenih točaka, pa se može približno odrediti, gdje siječe os x , t.j. potraže se apscise tih sjecišta, koje su ujedno realna rješenja jednadžbe. Metoda tangente ili sekante daje ta rješenja bilo kojom točnošću. U traženje i aproksimaciju kompleksnih rješenja ovdje ne ulazimo.

Ako zadana jednadžba ima racionalne koeficijente, mogu se eventualni racionalni korijeni naći pokušavanjem. Ako naime takav korijen ima oblik $\pm \frac{k}{l}$, gdje su k i l cijeli brojevi i razlomak je skraćen (dakle k i l relativno prim, t.j. nemaju zajedničke mjere), onda mora k biti mjera od člana 0-toga stupnja a_0, a l mora biti mjera koeficijenta a_n najviše potencije od x. Pri tom je pretpostavljeno, da su svi koeficijenti $a_0, \dots, a_n$ cijeli brojevi, što možemo postići množenjem s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih nazivnika.

Treba dakle kušati sve razlomke oblika $\pm \frac{k}{l}$, gdje su k odnosno l mjere od a_0 odnosno a_n, s jednim i drugim predznakom. (Treba uzeti u obzir i cijele brojeve, gdje je $l = 1$, a i razlomke s brojnikom $k = 1$.) Uvrštavanjem u jednadžbu vidi se, da li je koji od tih brojeva korijen jednadžbe.

Kada je nađen koji korijen x_1 jednadžbe, može se njezin stupanj sniziti za jedinicu time, da se podijeli sa $x - x_1$. Ako su, recimo, nađena dva korijena x_1, x_2, može se odmah dijeliti sa $(x-x_1)(x-x_2)$ i time sniziti stupanj za 2 jedinice i t.d.

Ako je jednadžba oblika $x^n + a = 0$, ona se rješava pomoću Moivreove formule, naime nađe se u vrijednosti od $\sqrt[n]{-a}$. Na pr. jednadžba $x^4 + 1 = 0$ ima rješenja $\sqrt[4]{-1}$. Budući da je $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1 \cdot (e^{i\pi})} = \cos\pi + i \sin\pi$, to je $\sqrt[4]{-1} = 1.(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4})$, $k = 0,1,2,3$, dakle

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1+i)$$

$$x_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1-i)$$

$$x_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1-i)$$

Želimo li rastaviti x^4+1 na faktore $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, dobijemo dakle

$$\left[x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)\right]\left[x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1+i)\right]\left[x - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right]\left[x - \frac{2}{2}(1-i)\right]$$

Prvi i četvrti faktor su za realni x konjugirano kompleksni (jer su x_1 i x_4 konjugirano kompleksni), isto tako drugi i treći faktor. Tvorimo li dotične produkte, dobijemo rastvorbu u realne kvadratne faktore :

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1).$$

Do te rastvorbe se uostalom jednostavnije dolazi, ako se $x^4 + 1$ nadopuni na kvadrat binoma :

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$
$$= (x^2 + 1 - \sqrt{2}\cdot x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}\cdot x) .$$

43. Racionalne funkcije trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija

Imamo li $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)dx$ t.j. integral, u kojem je integrand racionalna funkcija trigonometrijskih funkcija, to se on može svesti na integral racionalne funkcije supstitucijom $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ukoliko ne vodi do cilja koja spretnija supstitucija. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ je prikladan, jer se sve trigonometrijske funkcije od x a i njegova derivacija daju racionalno izraziti pomoću njega :

$$\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot t}{1+t^2} ; \qquad (152)$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cdot\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \qquad (153)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} ; \qquad (154)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1-t^2}{2t} \qquad (155)$$

Napokon moramo izračunati dx :

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t ,$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot dx = dt ,$$

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\,dx = dt ,$$

$$\frac{1}{2}(1 + t^2)\,dx = dt ,$$

$$dx = \frac{2\cdot dt}{1+t^2} \qquad (156)$$

Kako vidimo, tom supstitucijom dobili smo uvijek racionalnu funkciju.

Na pr.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\cdot dt = \int\frac{2}{2t}\,dt =$$

$$= \int\frac{dt}{t} = \ln t = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$\int R(shx;\, chx,\, thx,\, cthx)\,dx$

Analogno rješavamo integrale racionalnih funkcija hiperbolnih funkcija supstitucijom $\operatorname{th}\frac{x}{2} = t$.

$$\operatorname{sh}x = 2\cdot\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{2} = 2\cdot\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} = \frac{2\cdot\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \qquad (157)$$

$$\operatorname{ch}x = \operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = 2\cdot\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1-t^2} - 1$$

$$= \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad ; \qquad (158)$$

$$\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \qquad (159)$$

$$\operatorname{cth}x = \frac{1}{\operatorname{th}x} = \frac{1+t^2}{2t} \quad ; \qquad (160)$$

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = t \quad ;$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx = dt ,$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}\right)dx = dt ,$$

$$\frac{1}{2}(1 - t^2)\,dx = dt ,$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} \qquad (161)$$

Izvest ćemo još parcijalnom integracijom formule rekurzije za $\int\sin^n x\,dx$ i $\int\cos^n x\,dx$:

$$I_n = \int\sin^n x\,dx = \int\sin^{n-1}x\cdot\sin x\cdot dx = -\cos x\cdot\sin^{n-1}x +$$

$$+ (n-1)\int\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\cdot dx =$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)\int(1-\sin^2 x)\cdot\sin^{n-2}x\cdot dx =$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int\sin^n x\,dx ,$$

dakle

$$I_n = -\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n\ ,$$

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}\ .$$

Time je dakle integral $I_n = \sin^n x\,dx$ sveden na integral $I_{n-2} = \int\sin^{n-2}x\,dx$, u kojemu je eksponent za dvije jedinice niži. Nastavljanjem toga postupka dolazi se konačno do $\int\sin x\,dx = -\cos x$ ili do $\int dx = x$, prema tomu, da li je n lih ili tak broj .

Analogna rekurziona formula izlazi za $\int\cos^n x\,dx$:

$$\int\cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cdot\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

Uzmimo napose te integrale u granicama od 0 do $\frac{\pi}{2}$

Općenito je, ako formulu za parcijalnu integraciju $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$ pišemo u obliku

$$\int(uv' + vu')\,dx = uv\ ,$$

poslije uvođenja granica

$$\int_a^b(uv' + vu')dx = \Big[uv\Big]_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)v(a),$$

dakle

$$\int_a^b uv'dx = \Big[u\cdot v\Big]_a^b - \int_a^b v\cdot u'dx$$

Dobijemo stoga

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \Big[-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot dx$$

ili

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cdot dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$

Daljom primjenom iste formule na desnu stranu izlazi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cdot dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}x\,dx$$

i t.d.

Uzmimo, da je n lih broj, dakle $n = 2m + 1$.

Izlazi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\cdot dx =$$

$$= \frac{2m(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-3}x\,dx = \ldots = \frac{2m(2m-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\ldots 5\cdot 3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\ldots\cdot 2m}{3\cdot 5\cdot\ldots\ldots(2m+1)}$$

Ako je n parni broj, t.j. $n = 2m$, izlazi $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cdot dx =$

$$= \frac{2m-1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-2}x\cdot dx = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-4}x\cdot dx =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots\ 3\cdot 1}{2m(2m-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\ldots\cdot 2m}$$

Analogno izlazi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\ \ldots\ 2m}{3\cdot 5\ \ldots\ (2m+1)}\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2m}$$

Kod integrala, gdje je integrand racionalna funkcija od x i od drugog korijena iz kvadratne funkcije od x,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\cdot dx ,$$

svodimo taj korijen na oblik $\sqrt{t^2+1}$ ili $\sqrt{t^2-1}$ ili $\sqrt{1-t^2}$ na već prije izloženi način.

Dobijemo li oblik $\sqrt{t^2+1}$ uzmemo za $t = \operatorname{sh} u$, (162)

za oblik $\sqrt{t^2-1}$ uzmemo za $t = \operatorname{ch} u$, (163)

za oblik $\sqrt{1-t^2}$ uzmemo za $t = \sin u$. (164)

Time dobijemo racionalne funkcije trigonometrijskih ili hiperbolnih funkcija.

Na pr.
$$\int\sqrt{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int\sqrt{x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6}\cdot dx =$$

$$= \int\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\sqrt{(2x-5)^2 - 1}\,dx \qquad 2x - 5 = t, \quad dx = \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int\sqrt{t^2 - 1}\,dt$$

Supstituiramo sada $t = \operatorname{ch} u$, $dt = \operatorname{sh} u\,du$, izlazi

$$I = \frac{1}{4}\int\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}\,.\,\operatorname{sh} u\cdot du = \frac{1}{4}\cdot\int\operatorname{sh}^2 u\cdot du ,$$

$$\int sh^2u\,du = \int sh\,u\cdot sh\,u\cdot du = sh\,u\cdot chu - \int ch^2u\,du$$

$$= shu\,chu - \int(1 + sh^2u)du =$$

$$= shu\,chu - \int du - \int sh^2u\,du\,,$$

$$2\int sh^2u\,du = shu\cdot chu - u$$

$$\int sh^2u\,du = \frac{shu\cdot chu - u}{2}$$

Izvršimo li natrag supstituciju dobijemo :

$$ch\,u = t\;;\quad sh\,u = \sqrt{ch^2u - 1} = \sqrt{t^2 - 1}\quad;\quad u = archt$$

$$I = \frac{1}{8}\,(shu\,chu - u) = \frac{1}{8}\left[t\sqrt{t^2 - 1} - archt\right],$$

$$t = 2x - 5\,,$$

$$I = \frac{1}{8}\left[(2x-5)\sqrt{(2x-5)^2 - 1} - arch\,(2x-5)\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[(2x - 5)\sqrt{4x^2 - 20x + 24} - arch\,(2x - 5)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2(2x - 5)\sqrt{x^2 - 5x + 6} - arch(2x - 5)\right]$$

(Za druge metode rješavanja ovakovih integrala vidi Marković I.str.424.)

Integrali oblika $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx$, gdje je dakle integrand racionalna funkcija od x i od n-tog korijena (n cio broj) razlomljeno linearne funkcije od x, rješavaju se supstitucijom $\sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} = t$. odatle je

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^n\,,$$

a odatle $$x = \frac{-\beta + \delta t^n}{\alpha - \gamma t^n}$$

Integrand dakle očito prelazi u racionalnu funkciju. Specijalni slučaj $\gamma = 0$, $\delta = 1$ znači, da se radi o n-tom korijenu cijele linearne funkcije.

Na pr.

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = -\int\frac{4\cdot u^2}{(u^2-1)^2}\cdot du \qquad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = u \qquad x+1=u^2(x-1)$$

$I = \int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$; supstitucijom $ax+b=u^2$ ili $cx+d=u^2$

$\int R(u, \sqrt{au^2+bu+c})\,du$.

$$= -2\cdot\int \frac{u.2u\,du}{(u^2-1)^2} = \qquad\qquad x = -\frac{u^2+1}{1-u^2}$$

$$= -2\left[\frac{-u}{u^2-1} + \int\frac{du}{u^2-1}\right] \qquad\qquad = \frac{u^2+1}{u^2-1}$$

$$= 2\left[\frac{u}{u^2-1} + \int\frac{du}{1-u^2}\right] \qquad\qquad dx = \frac{-4u}{(u^2-1)^2}\,du$$

$$= 2\left[\frac{u}{u^2-1} + \operatorname{arcth} u\right] \quad 1)$$

$$I = \frac{2u}{u^2-1} + 2\cdot\operatorname{arcth} u = 2\,\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1}-1} + 2\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{x+1}(x-1)}{2\sqrt{x-1}} + 2\ln\sqrt{\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{-1+\frac{x+1}{x-1}}} = \sqrt{x^2-1} + \ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

44. Binomni integrali

Binomni integrali su integrali oblika

$$I = \int x^m (a+bx^n)^p\,dx \quad ,$$

gdje su m,n,p racionalni (pozitivni ili negativni) brojevi. Supstitucijom $x^n = u$, $x = u^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,du$, dobije se

$$I = \frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot(a+b\cdot u)^p\cdot du .$$

a) Ako je $\frac{m+1}{n}$ cio, integrand je racionalna funkcija od u i nekog cjelobrojnog korijena iz $a+bu$. Naime, ako je $p = \frac{r}{s}$, gdje su r i s cijeli brojevi, onda integrand ima opći oblik $R(u, \sqrt[s]{a+b\cdot u})$, ako R znači racionalnu funkciju. Takav integral već znamo riješiti. b) Analogno je u slučaju, kada je p cio broj, jer onda dobijemo racionalnu funkciju od u i od

1) arcthu je odabran pod pretpostavkom, da je x pozitivan i veći od jedan, jer je onda $u>1$, a u tom području je arcth realan.

cjelobrojnog korijena od u . Naime, ako je $\frac{m+1}{n} = \frac{q}{t}$, gdje su q i t cijeli brojevi, onda je integrand $R(u, \sqrt[t]{u})$.

c) Konačno možemo integrand napisati i u obliku

$$u^{\frac{m+1}{n} + p-1} \cdot \left(\frac{a+bu}{u}\right)^p$$

Ako je dakle $\frac{m+1}{n} + p$ cio broj, a $p = \frac{r}{s}$, dobijemo $R\left(u, \sqrt[s]{\frac{a+bu}{u}}\right)$, tako da i taj slučaj znamo riješiti.

Rješivi su dakle slučajevi

a) p cio,

b) $\frac{m+1}{n}$ cio,

c) $\frac{m+1}{n} + p$ cio .

Čebišev (Чебышев) je dokazao (1853.), da su to jedini slučajevi, gdje se integral može izraziti pomoću konačnog broja operacija s elementarnim funkcijama.

45. Volumen tjelesa, dvostruki i trostruki integrali.

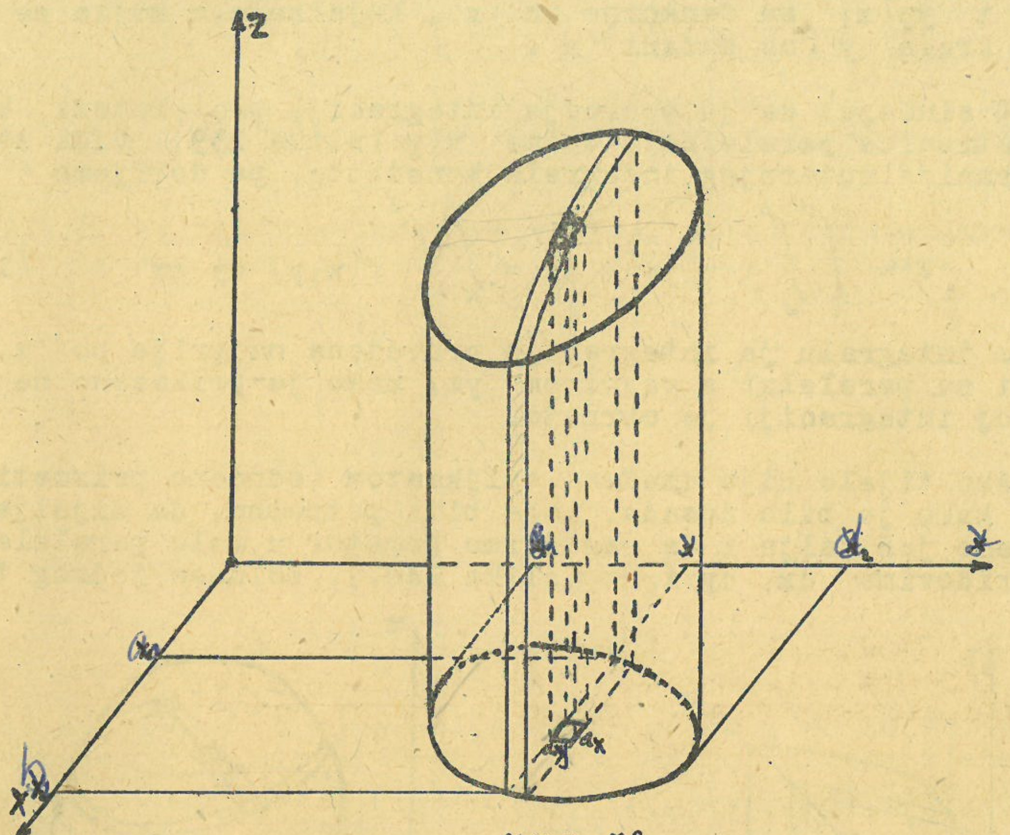
Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu zadana ploha $z = f(x,y)$ i na njoj neka zatvorena krivulja. Projiciramo tu krivulju na ravninu xy . Sama ploha, ravnina xy i valjak, što ga čine zrake projiciranja, omeđuju volumen, koji želimo odrediti (slika 138.).

Rastavimo taj volumen ravninama paralelnim s ravninom xz u tanke slojeve debljine dy , a same slojeve rastavimo pomoću ravnina paralelnih s ravninom yz u sitne dijelove. Takav jedan dio možemo približno smatrati prizmom, kojoj baza ima bridove dx i dy a visina je z , volumen joj je dakle $z\,dx\,dy = f(x,y)\,dx\,dy$. Sumacija prizema jednoga sloja vodi dakle na integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \cdot dy = dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) \cdot dx$$

Pri tom su granice x_1 i x_2 dakako ovisne o odabranom y , koji odgovara dotičnom sloju. Te se funkcije dobiju iz jednadžbe krivulje, koja omeđuje bazu valjka. Volumen našega sloja je dakle približno (tim točnije, čim je dy manji) dan produktom

$$dy \cdot \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx ,$$



SLIKA 138

gdje sam integral znači površinu prereza našeg tijela paralelnog s ravninom xz. Integral je neka funkcija $\varphi(y)$. Zbrajanje volumena svih slojeva vodi dakle očito na integral

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) \cdot dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy \qquad (165)$$

Dobili smo tako dvostruki integral. Pri tom su $\overset{c}{y_1}$ i $\overset{d}{y_2}$ krajnje vrijednosti od y na granici područja integracije, koje je omeđeno projekcijom krivulje na ravninu xy. To su dakle neke konstante.

Da smo volumen rastavili u slojeve paralelno s ravninom yz, analogno bismo došli do dvostrukog integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) \cdot dy \cdot dx \quad ,$$

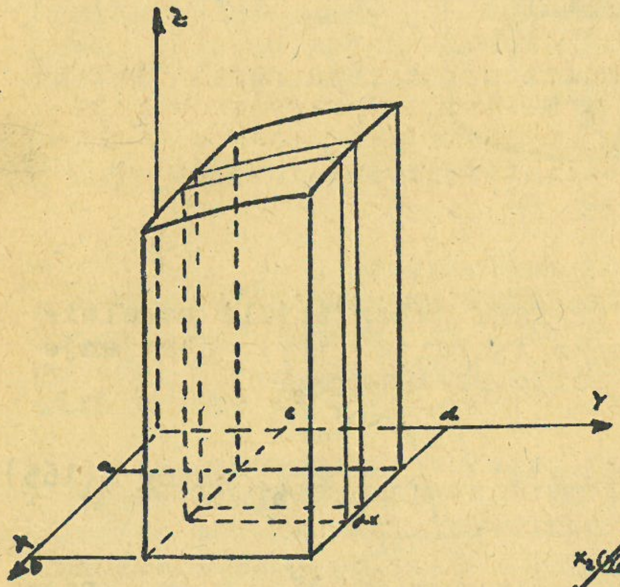
gdje su integracije provedene obrnutim slijedom. Ovdje su x_1 a i ~~x_2~~ b krajnje vrijednosti od x u području integracije, a $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su funkcije od x, koje kažu, u kojim se granicama kreće y uz zadani x.

U slučaju, da je područje integracije pravokutnik, kojemu su stranice paralelne s osima x,y (slika 139), vidi se, da su i granice nutarnjeg integrala konstante, pa dobijemo

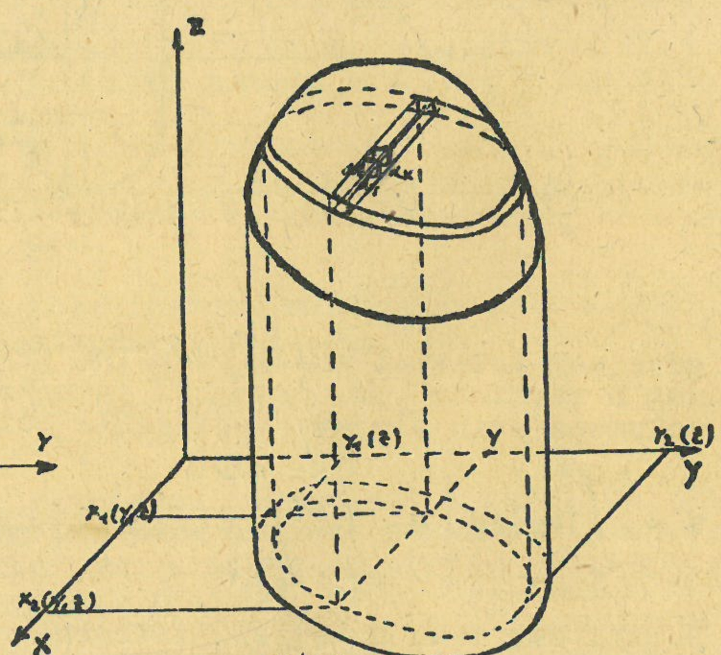
$$V = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx \cdot dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy \cdot dx \qquad (166)$$

U prvom integralu je integracija provedena najprije po x, t.j. slojevi su paralelni s ravninom yz, kako je prikazano na slici. U drugoj integraciji je obrnuto.

Ako tijelo nije omeđeno valjkastom (odnosno prizmatičnom) plohom kako je bilo dosada, može biti potrebno, da dijeljenje provedemo još dalje i da rastavimo prostor u male paralelepipede s bridovima dx, dy i dz (slika 140.). Volumen jednog takvog



SLIKA 139



SLIKA 140

paralelepipeda je $dV = dx\, dy\, dz$. Pomičemo li ga paralelno sa ravninom xz od x_1 do x_2, dobijemo približno prizmu volumena $\int_{x_1}^{x_2} dx \cdot dy \cdot dz = dy \cdot dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx$, gdje su x_1, x_2 ovisni o odabranim vrijednostima y,z. Ova se prizma može pomicati paralelno s ravninom xy od y_1 do y_2, pa se dobije tanki sloj, koji je paralelan sa tom ravninom, a volumen mu je suma svih volumena tih sitnih prizama unutar toga sloja volumena. Dakle volumen toga sloja je

$$dz \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} dx \right) dy = dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx\, dy$$

Pri tom su y_1 i y_2 krajnje vrijednosti od y , koje se pojavljuju u tom sloju s koordinatom z, t.j. to su neke funkcije od z .

Dižemo li ili spuštamo takav sloj, dobit ćemo volumen cijelog tijela kao sumu slojeva, t.j. dolazimo na integral

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \left[\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx \cdot dy \right] dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx \cdot dy \cdot dz \qquad (152)$$

gdje su z_1 i z_2 krajne vrijednosti od z , do kojih dolazimo pomicanjem toga sloja. Granice svih triju integracija mogu se odrediti iz jednadžbe ploha, kojom je tijelo omeđeno. Volumen je dakle ovdje izražen trostrukim integralom.

Na pr. <u>Volumen kugle.</u>

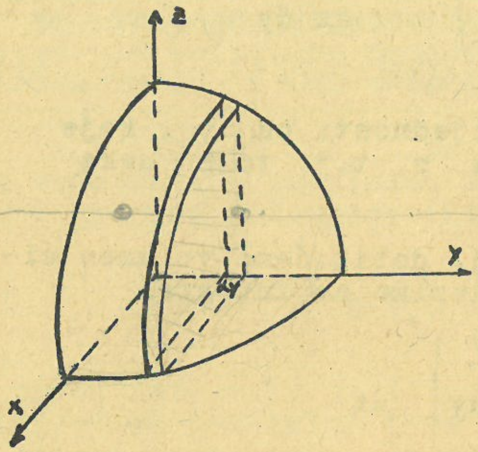
Jednadžba kugle u pravokutnom koordinatnom sustavu (x,y,z) je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Promatrat ćemo samo volumen u jednom oktantu, i to u prvom gdje su x,y i z pozitivni.

Razdijelimo taj volumen u slojeve, koji su paralelni s ravninom xz. Volumen takvog sloja je Pdy gdje je $P = \int_0^x z.dx$, jer je to površina prereza paralelnog sa ravninom xz. Kako je međutim taj sloj uzet na bilo kojem mjestu, nije gornja granica x konstanta, nego je trebamo izračunati kao funkciju od y . Kako iz slike vidimo, gornja granica x nalazi se u ravnini xy, gdje je $z = 0$ pa dobijemo iz jednadžbe kugle, ako je $z = 0$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{odakle je} \quad x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Dakle volumen jednog sloja je



SLIKA 141

$$dV = \left[\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} z \cdot dx \right] \cdot dy$$

Ako z izračunamo iz jednadžbe kugle, dobijemo

$$dV = \left[\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} z dx \right] dy = \left[\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} \cdot dx \right] dy$$

Ako sve te slojeve sumiramo od 0 do r (to su krajne vrijednosti od y, koje mogu odgovarati sloju), dobijemo cijeli volumen tog dijela kugle.

$$V = \int_0^r \left[\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx \right] dy$$

Izračunajmo najprije integral $\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx$, gdje r i y smatramo konstantnim, jer integriramo po x.

$$\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - y^2 - x^2}\, dx = \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sin t \\ dx &= \sqrt{r^2-y^2} \cdot \cos t \cdot dt \end{aligned}$$

$$= \int \sqrt{r^2 - y^2 - (r^2-y^2)\sin^2 t}\, \cos t \cdot \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dt$$

Izvršimo li transformaciju granica dobijemo da je za gornju granicu $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, dakle $\sin t = 1$, odakle je $t = \frac{\pi}{2}$, a za $x = 0$ dobijemo, da je i $t = 0$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - y^2 - (r^2 - y^2)\sin^2 t}\, \cos t \cdot \sqrt{r^2-y^2}\, dt = (r^2-y^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$= (r^2 - y^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = (r^2 - y^2) \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin t \cdot \cos t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (r^2-y^2) \cdot \frac{\pi}{4}$$

Dobili smo time vrijednost određenog integrala

$$\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - y^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}(r^2 - y^2)$$

Taj izraz treba sada integrirati po y od 0 do r.

$$V = \int_0^r \frac{\pi}{4}(r^2-y^2)dy = \frac{\pi}{4}\int_0^r (r^2-y^2)dy = \frac{\pi}{4}\left[r^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^r =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{2\cdot r^3\pi}{12} = \frac{r^3\pi}{6}$$

Pošto smo promatrali samo u jednom oktantu moramo dobiveni volumen pomnožiti sa 8, da dobijemo

$$V_k = \frac{r^3\pi}{6}\cdot 8 = \frac{4}{3}r^3\pi \quad .$$

46. Masa nekog tijela promjenljive gustoće

Znamo da je masa M homogenog tijela jednaka produktu volumena V i gustoće

Ako je tijelo promjenljive gustoće, t.j. ako je gustoća funkcija mjesta, $\mu = f(x,y,z)$, rastavit ćemo volumen u male pravokutne paralelepipede, koji imaju svaki približno konstantnu gustoću, ako smo ih načinili dosta malenim. Uzmemo li u nekom paralelepipedu recimo u K-tom, bilo koju točku, u kojoj μ ima neku svoju vrijednost μ_k, to je masa toga paralelepipeda približno jednaka $\mu_k\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$, gdje su Δx, Δy, Δz bridovi paralelepipeda. Čitava masa tijela je onda približno jednaka sumi takvih dijelova $\sum\mu_k\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$. Ta suma može konvergirati prema nekoj istoj granici (limesu), kada bridovi paralelepipeda teže prema nuli (a broj paralelepipeda neograničeno raste), kako god odabrali točke u pojedinim paralelepipedima. Za to je na pr. dovoljno, da funkcija $f(x,y,z)$ bude neprekinuta u zatvorenom području, koje predstavlja volumen tijela uključivo njegove površine. Taj limes se onda zove određeni trostruki integral

$$M = \iiint \mu\, dx\, dy\, dz = \iiint f(x,y,z)dx\, dy\, dz \qquad (153)$$

i predstavlja masu tijela. Dade se dokazati, da se integral može izračunati pomoću tri uzastopne integracije, što se grubo uviđa na isti način, kako smo to raspravili kod izračunavanja volumena, naime da se sumiraju najprije približne mase paralelepipeda s odabranim y,z u smjeru osi x, zatim dobivene mase prizama u smjeru osi y s odabranim z, i konačno dobivene mase slojeva u smjeru osi z. Integral onda dobiva oblik triju uzastopnih integracija :

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx.dy.dz \ , \qquad (154)$$

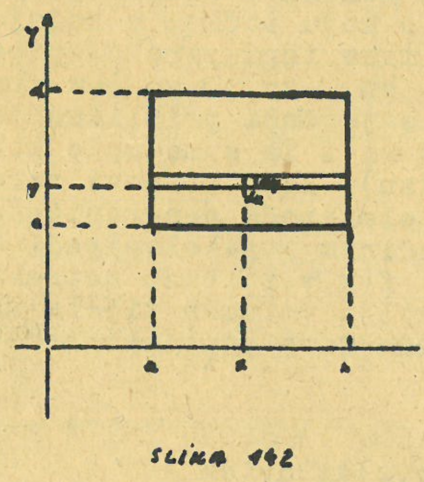
a granice se određuju pomoću jednadžbe površine tijela.

U specijalnom slučaju, kada je gustoća u cijelom tijelu konstantna, možemo μ izlučiti pred integral :

$$M = \mu \iiint dx.dy.dz \qquad (155)$$

Sam integral je onda volumen tijela, koji će se, već prema obliku tijela, moći izračunati trostrukim, dvostrukim ili jednostrukim (kod rotacionih tijela) integralom .

Slično kao masa tjelesa, može se računati i masa ploha, samo što je μ onda plošna gustoća. Uzmemo li da je ta gustoća funkcija mjesta, onda je $\mu = f(x,y)$. Cijelu plohu si moramo rastaviti u male paralelograme površine dx dy, jer u takovom paralelogramu možemo kazati, da je μ približno konstantan. Integriramo li prvo paralelno sa osi x u intervalu $[x_1, x_2]$ i poslije integriramo paralelno sa osi y u intervalu $[y_1, y_2]$ dobijemo masu cijelog lika).



SLIKA 142

Ako je područje integracije paralelogram, (slika 142), granice će biti konstantne :

$$M = \int_c^d \int_a^b \mu \, dx \cdot dy =$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx \cdot dy$$

Specijalan je slučaj, da je μ konstantan duž cijele površine. Onda je $M = \mu P$ a $P = \iint dx \cdot dy$.

Ako je ploha ograničena krivuljom $y = f(x)$, dvjema ordinatama i osi x , bit će dakako

$$M = \mu \int_a^b y \cdot dx \qquad (156)$$

47. Težište i moment tromosti

Momentom sile P s obzirom na neku točku zovemo produkt te sile s krakom h, t.j. s okomicom spuštenom iz točke na pravac, u kojem djeluje ta sila. Promatramo sustav od, recimo, tri točke u ravnini s masama m_1, m_2, m_3 i koordinatama (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Na te točke neka djeluje sila teža, t.j. djeluju na njih sile m_1g, m_2g, m_3g Prema tome, kako zakrenemo ravninu s tim točkama, može sila teža imati smjer osi y ili smjer osi x ili bilo koji drugi smjer. Tražimo točku $T(\xi, \eta)$, koja ima to svojstvo, da moment sile teže, koja djeluje na masu $M=m_1+m_2+m_3$ u toj točki, s obzirom na ishodište 0 koordinatnog sustava bude jednak sumi momenata sila, koje djeluju na pojedine točke. Takvu točku zovemo težištem tih masa. Ako sila teža ima smjer osi y (ili negativne osi y), momenti pojedinih sila će biti m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3, a moment sile u težištu je $M\xi = (m_1+m_2+m_3)\xi$. Treba dakle biti

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\xi$$

dakle

$$\xi = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Ako sila teža ima smjer osi x , dobijemo analogno

$$\eta = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Time su određene koordinate težišta. Nije teško dokazati, da tražene relacije između momenata ostaju na snazi i onda, kada sila teže ima bilo koji drugi smjer, pa i onda, kada se odnose na bilo koju drugu točku ravnine, a ne baš na ishodište slučajno odabranog koordinatnog sustava. Položaj težišta dakle ne ovisi o tome, kako smo postavili koordinatni sustav.

Specijalno, ako imamo dvije točke jednake mase m, dobijemo

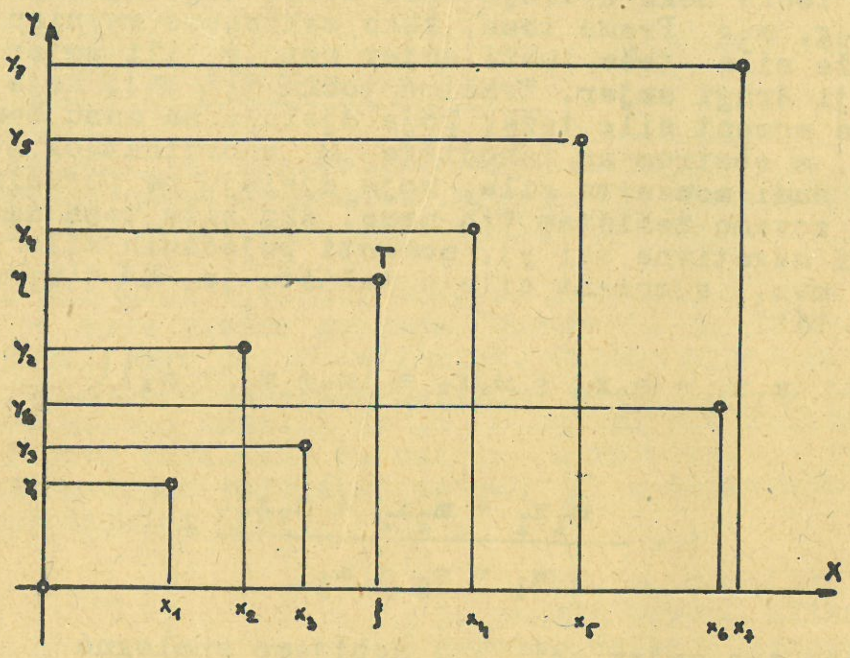
$$\xi = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

što znači, da se težište nalazi u polovištu spojnice tih dviju točaka.

Za slučaj, da ima n točaka (slika 143) izlazi sasvim analognim razmatranjem za koordinate težišta

$$\xi = \frac{m_1x_1+m_2x_2\ldots m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots m_n} \quad ; \quad \eta = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots\ldots m_n}$$



SLIKA 143

Ako su točke u prostoru, vodi isto razmatranje još na treću relaciju

$$\zeta = \frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

Izrazi u brojnicima zovu se statički momenti i to u ravnini se zove $\sum_{i=1}^{n} m_ix_i$ statički momenti sustava s obzirom na os y, jer je na pr. m_1x_1 produkt mase m_1 i udaljenosti te mase od osi y; a $\sum_{i=1}^{n} m_iy_i$ statički moment sustava s obzirom na os x, jer je na pr. m_1y_1 produkt mase m_1 i udaljenosti te mase od osi x. U prostoru bi to bili statički momenti s obzirom na ravnine (yz) odnosno (xz)

Ako se radi o tijelu (ili o plohi) s neprekinuto razdijeljenom tvari, trebat će opet izvesti granični prijelaz. Na pr.

statički moment s obzirom na ravninu (yz) nekog paralelepipeda, u koje smo razrezali tijelo, bit će približno

$\sum\limits_{k} x_k \mu_k \, \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, gdje je x_k apscisa neke točke u k-tom paralelepipeda, a μ_k gustoća na tom mjestu. Granični prijelaz vodi na integral $\iiint x\,\mu\, dx \cdot dy \cdot dz$. U nazivniku je dakako ukupna masa $M = \iiint \mu\, dx \cdot dy \cdot dz$, dakle, za koordinate težišta

$$\xi = \frac{\iiint x\,\mu\, dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint \mu\, dx\, dy\, dz} \tag{157}$$

i analogno

$$\eta = \frac{\iiint y\,\mu\, dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint \mu\, dx\, dy\, dz} \;; \qquad \zeta = \frac{\iiint z\,\mu\, dx\, dy\, dz}{\iiint \mu\, dx\, dy\, dz} \tag{158}$$

Ako je μ konstantan, može se njime kratiti, pa dobijemo za homogena tijela

$$\xi = \frac{\iiint x \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint dx \cdot dy \cdot dz} \;; \qquad \eta = \frac{\iiint y \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint dx \cdot dy \cdot dz} \;;$$

$$\zeta = \frac{\iiint z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint dx \cdot dy \cdot dz} \tag{159}$$

Analogno je za (ravne) plohe

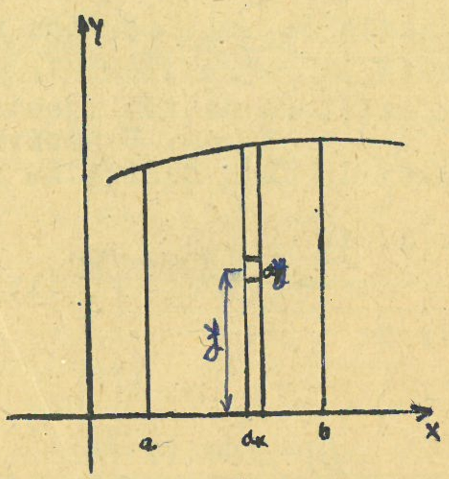
$$\xi = \frac{\iint x\,\mu\, dx \cdot dy}{\iint \mu\, dx \cdot dy} \;; \qquad \eta = \frac{\iint y\,\mu\, dx \cdot dy}{\iint \mu\, dx \cdot dy}$$

odnosno za $\mu = \text{const.}$

$$\xi = \frac{\iint x \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy} \;; \qquad \eta = \frac{\iint y \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

Razumije se, da je prema prilikama moguće dotične integrale izračunati jednostavnije, t.j. dvostruke nadomjestiti jednostrukim i t.d. Primjerice, ako se računa težište plohe omeđene krivuljom $y = f(x)$, dvjema ordinatama i osi x, možemo plohu razrezati na uske pruge (slika 144). Statički moment s obzirom na os y možemo postaviti u obliku

$\int_a^b x \cdot y dx$, jer je $y dx$ površina jedne pruge (pomnožena s gustoćom $\mu = 1$, kako to obično zamišljamo kod određivanja težišta geometrijskih likova ili tjelesa), a svi dijelovi te pruge imaju istu apscisu x, dakle je njezin statički moment $x\ y\ dx$. Integracija daje moment čitave plohe, dakle je



SLIKA 144

$$\xi = \frac{\int_a^b x \cdot y \cdot dx}{\int_a^b y . dx}$$

Statički moment s obzirom na os x može se dobiti ovako: Statički moment jedne pruge bit će (ako prugu razdijelimo na elemente $dx\ dy$ i svaki pomnožimo s njegovom udaljenosti y od osi x)

$$dx \int_0^y y\,dy = dx \frac{y^2}{2}$$

Ovdje y pod integralom znači ordinatu elementa $dx\ dy$, dok gornja granica znači ordinatu točke na krivulji, a dx je kao konstanta izlučena iz integrala. Zbrojimo li momente svih pruga, izlazi

$$\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2} \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx, \quad \text{dakle}$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y \cdot dx}$$

Na pr.

Zadana je u prvom kvadrantu četvrtina kruga, koji je omeđen kružnicom $x^2 + y^2 = r^2$ i osima koordinata. Tražimo težište toga tijela.

$$\xi = \frac{\int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx}{\frac{r^2 \pi}{4}}$$

$$\int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} . dx = - \frac{1}{2} \int_0^r (-2x) \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx \qquad \begin{aligned} r^2 - x^2 &= t \\ - 2 \cdot x dx &= dt \end{aligned}$$

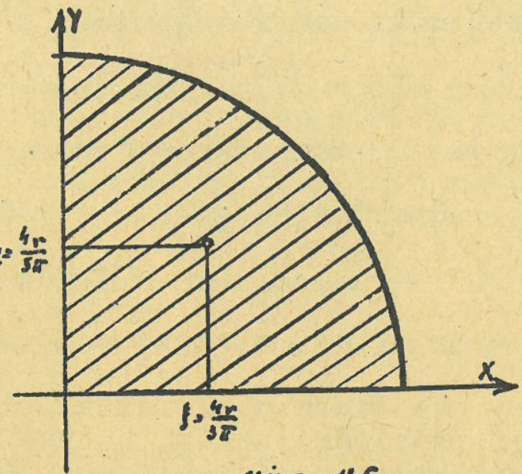
$$= -\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}\sqrt{t^3}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\sqrt{(r^2 - x^2)^3}\right]_0^r$$

$$= \frac{1}{3}r^3 = \frac{r^3}{3}$$

Radi simetrije je $\xi = \eta$

dakle $\xi = \eta = \dfrac{\frac{r^3}{3}}{\frac{r^2\pi}{4}} = \dfrac{4}{3\pi}\ r$



SLIKA 145

48. Moment tromosti

U mehanici igra vrlo važnu ulogu moment tromosti (moment inercije). Razlikujemo tri vrsti momenta tromosti i to: polarni moment (I_p), aksijalni moment (I_a) i planarni moment (I_{pl}). Najvažniji od tih je aksijalni moment.

Momentom tromosti neke materijalne točke s masom m zovemo produkt njene mase i kvadrata udaljenosti te materijalne točke od neke druge točke (polarni moment) odnosno pravca (aksijalni moment) ili ravnine (planarni moment).

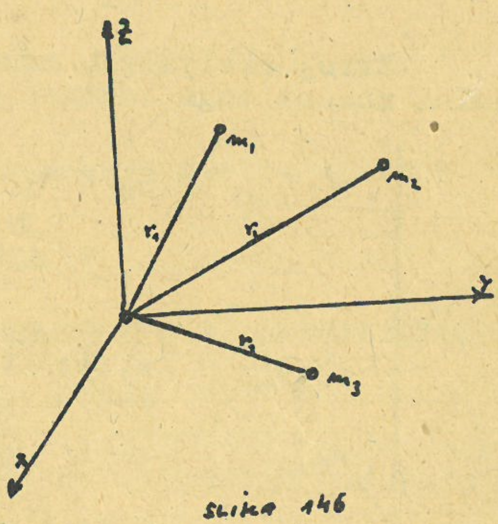
Polarni moment tromosti.

Ako je zadana točka O i u nekim udaljenostima od te točke O n-materijalnih točaka s masama m_1, m_2 .....m_n, onda svaka od tih točaka ima svoj polarni moment s obzirom na točku O.

Na pr. točka sa masom m_1 ima polarni moment $m_1r_1^2$ (slika 146) gdje je r_1 udaljenost te materijalne točke od točke O. Zbroj svih polarnih momenata tih materijalnih točaka zovemo polarni moment tromosti sustava točaka s obzirom na točku O.

$$I_p = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots m_nr_n^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$



SLIKA 146

Za tijelo s neprekinuto razdijeljenom masom dobit ćemo μ dx dy dz kao masu jednog elementa volumena, pa će stoga polarni moment tromosti biti dan integralom.

$$I_p = \iiint \mu r^2 dx \cdot dy \cdot dz \quad , \text{ gdje je } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ,$$

ako je 0 ishodište koordinatnog sustava.

Specijalno je za $\mu = C = 1$

$$I_p = \iiint r^2 dx \cdot dy \cdot dz = \int r^2 \cdot dV \quad , \text{ gdje je}$$

$dV = dx \cdot dy \cdot dz$ element volumena.

Razdiobu u elemente volumena možemo načiniti i na drugi koji prikladni način, u ovom slučaju na pr. može biti zgodno uzeti kao element volumena tanku kuglinu ljusku sa središtem u 0, jer sve njezine točke imaju istu udaljenost r od središta, pa je njezin polarni moment $r^2 \cdot dV$ gdje je sada $dV = 4r^2 \cdot \pi dr$, ako je dr debljina ljuske, a $4r^2\pi$ njezina površina. Tako će recimo, polarni momenat kugle polumjera R s obzirom na njezino središte biti dan integralom

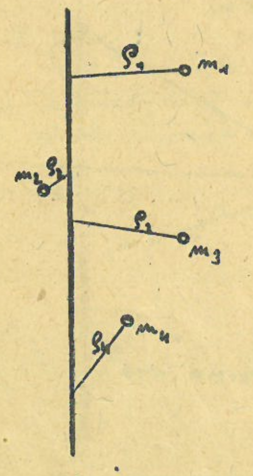
$$I_p = \int_0^R r^2 \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot dr = 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi R^5}{5}$$

Aksijalni moment

Ako su zadane materijalne točke s masama $m_1, m_2 \ldots m_n$, koje su udaljene od nekog pravca za $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, onda je produkt mase jedne od tih točaka i kvadrata ~~udaljenosti~~ njene udaljenosti od pravca aksijalni moment te točke s obzirom na taj pravac.

$$I_{a_1} = m_1 \cdot \rho_1^2$$

Zbroj aksijalnih momenata pojedinih točaka zovemo aksijalni moment toga sastava točaka (slika 147.).



SLIKA 147

$$I_a = m_1 \cdot \rho_1^2 + m_2 \cdot \rho_2^2 + \ldots + m_n \cdot \rho_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \rho_i^2$$

Uzmemo li opet naš koordinatni sustav x, yz i tijelo s neprekinuto razdijeljenom masom, dobijemo izraz :

$$I_a = \iiint \mu \rho^2 dxdydz \; ,$$

a za $\mu = 1$

$$I_a = \iiint \rho^2 dx\, dy\, dz = \int \rho^2 dV$$

Ako je pravac primjerice os z , onda će biti $\rho^2 = x^2+y^2$.

I ovdje se razdioba u elemente može načiniti prema prilikama prikladnije i time integracija provesti jednostavnije. Treba li na pr. izračunati aksijalni momenat tromosti rotacionog valjka, kojemu je polumjer baze R , visina h, a os z mu je os, onda ćemo ga rastaviti u tanke valjkaste ljuske debljine dr. Elemenat volumena je tada $dV = 2r\pi h\cdot dr$, jer je $2r\pi h$ plašt te ljuske polumjera r , a dr njena debljina. Sve točke ljuske imaju istu udaljenost r od osi, dakle je njezin aksijalni moment tromosti jednak $r^2 dV = r^2\cdot 2r\pi h\cdot dr$. Dobijemo stoga za cijeli valjak

$$I_a = \int_0^R r^2\cdot 2r\pi h dr = 2\pi h\int_0^R r^3 dr = 2\pi h\frac{R^4}{4} = \pi h\frac{R^4}{2}$$

Planarni moment

Imamo li neku ravninu, recimo ravninu yz i n materijalnih točaka u udaljenostima x_1, x_2, x_3, ... x_n, onda je

$$I_{pl} = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \ldots + m_nx_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i^2$$

Ako se radi o tijelu s neprekinuto razdijeljenom masom, bit će dakle planarni moment tromosti s obzirom na ravninu (yz)

$$I_{xpl} = \iiint \mu x^2\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

S obzirom na ravninu xy bio bi I_{pl}

$$I_{zpl} = \iiint \mu z^2\cdot dx\cdot dy\cdot dz ,$$

a s obzirom na ravninu xz

$$I_{ypl} = \iiint \mu y^2\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

Razumije se, da se ti izrazi pojednostavnjuju ako je $\mu = 1$.

Moment tromosti kod kugle

Radi jednostavnosti pretpostavljamo $\mu = 1$. Aksijalni moment kugle s obzirom na os z bit će

$$I_a = \iiint \rho^2 dx\cdot dy\cdot dz,$$

gdje je $\rho^2 = x^2 + y^2$, t.j.

$$I_a = \iiint (x^2 + y^2)\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

ili rastavljeno na sumande

$$I_a = \iiint x^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \iiint y^2 dx \cdot dy \cdot dz$$

Vidi se, da je to suma planarnih momenata

$$I_a = I_{xpl} + I_{ypl} \quad ,$$

a budući, da su kod kugle zbog simetrije planarni momenti I_{xpl} I_{ypl} jednaki, $I_{xpl} = I_{ypl}$, to izlazi

$$I_a = 2 \cdot I_{xpl} = 2\iiint x^2 dx \cdot dy \cdot dz$$

Međutim, kako je kod kugle najlakše izračunati polarni moment, kako smo već vidjeli, pokušat ćemo izraziti planarni i aksijalni moment pomoću polarnog momenta.

I_p obzirom na ishodište je

$$I_p = \iiint r^2 dx \cdot dy \cdot dz \ ,$$

no kako je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, dobijemo

$$I_p = \iiint (x^2 + y^2 + z^2)\, dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= \iiint x^2 dxdydz + \iiint y^2 dx \cdot dy \cdot dz + \iiint z^2 dxdydz \ ,$$

odakle vidimo da je

$$I_p = I_{xpl} + I_{ypl} + I_{zpl}$$

t.j. polarni moment se dade rastaviti u tri planarna, koji su među sobom dakako jednaki, dakle je jedan planarni trećina polarnog.

$$I_{pl} = \frac{1}{3} \cdot I_p$$

No jer znamo, da su dva planarna jednaki aksijalnom momentu, možemo kazati, da je

$$I_a = \frac{2}{3} \cdot I_p \quad ,$$

Već smo prije odredili moment tromosti za kuglu

$$I_p = \frac{4\pi}{5} \cdot R^5$$

Ovaj izraz možemo pojednostaviti, ako ga napišemo ovako :

$$I_p = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi \cdot \frac{3}{5} R^2$$

$\frac{4}{3} R^3 \cdot \pi$ je volumen kugle, a kako je $M = \mu \cdot V$, gdje je M masa cjelokupne kugle, a uzeli smo da je $\mu = 1$, to je $M = V = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi$, pa dobijemo

$$I_p = M \cdot \frac{3}{5} \cdot R^2$$

(Ovo izlazi i onda, kada je μ = const. a nije jednako 1.) Iz toga vidimo, da je aksijalni moment kugle

$$I_a = \frac{2}{3} I_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} M \cdot R^2 = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2 , \quad I_{pl} = \frac{1}{5} MR^2$$

Da se vidi primjena momenta tromosti u mehanici, promatramo materijalnu točku, koja rotira oko neke osi u nekoj udaljenosti. Njezina je kinetička energija $\frac{Mv^2}{2}$, gdje je v brzina te točke. Ako se u prostoru nalazi n takvih materijalnih točaka, koje rotiraju oko te osi u raznim udaljenostima, onda se sve zajedno imaju kinetičku energiju, koja je suma energija pojedinih točaka

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Za brzinu v znamo, da je produkt kutne brzine ω i polumjera vrtnje ρ.

$$v = \omega \cdot \rho$$

(Kutna brzina je kut u lučnoj mjeri, za koji se sustav zakrene u jedinici vremena.) Energija rotacije tog sustava materijalnih točaka bit će dakle

$$E_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \rho_i^2 \cdot \omega^2}{2}$$

Kako je ω konstanta, jer je kutna brzina svih točaka ista, dobijemo

$$E_r = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \rho_i^2$$. Sumu $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \rho_i^2$

zvali smo aksijalni moment tromosti, t.j.

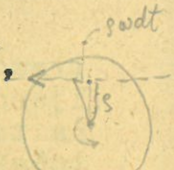
$$E_r = \frac{I_a \cdot \omega^2}{2}$$

$\frac{Mv^2}{2}$

Vidi se, da za kinetičku energiju rotacije vrijedi ista formula kao za kinetičku energiju translacije $\frac{Mv^2}{2}$, samo je brzina nadomještena kutnom brzinom, a mjesto mase stoji moment tromosti.

Uzmimo dalje, da na tijelo, koje rotira oko neke osi, djeluje sila P, koja je okomita (i mimosmjerna) na os rotacije. Znamo, da hvatište sile smijemo pomicati po volji u smjeru sile, kada sila djeluje na kruto tijelo. Neka se dakle hvatište nalazi u točki pravca te sile, koja je osi najbliža. Udaljenost ρ te točke od osi je krak te sile. U malom vremenu dt to hvatište odmakne za $\rho\omega dt$, u smjeru sile, jer je ωdt kut, za koji se tijelo okrene za vrijeme dt ako je ω kutna brzina tijela, a $\rho\cdot\omega\cdot dt$ je pripadni luk na polumjeru ρ, koji za mali dt možemo smatrati ravnim. Radnja, koju je sila obavila iznosi dakle $P\cdot\rho\cdot\omega\cdot dt$. Zbog djelovanja te sile mijenjat će se kinetička energija $\frac{I_a\omega^2}{2}$, t.j. ω je funkcija vremena. Radnja sile mora biti jednaka prirastu kinetičke energije, dakle

$$P\cdot\rho\cdot\omega dt = d\,\frac{I_a\cdot\omega^2}{2} = I_a\omega\, d\omega = I_a\omega\frac{d\omega}{dt}\cdot dt\,,$$



dakle

$$P\rho = I_a\frac{d\omega}{dt} = I_a\dot{\omega}$$

$P\cdot\rho$ je moment sile s obzirom na os vrtnje, a $\frac{d\omega}{dt}$ je kutno ubrzanje (akceleracija). Usporedimo li tu formulu sa formulom

$$P = m\cdot\frac{dv}{dt} = m\cdot\dot{v}$$

za pravocrtno gibanje (sila = masa puta ubrzanje), vidimo, da kod rotacije tijela vrijedi jednako građena jednadžba, samo treba mjesto sile staviti moment sile, mjesto ubrzanja kutno ubrzanje, a mjesto mase aksijalni moment tromosti.

Primjer :

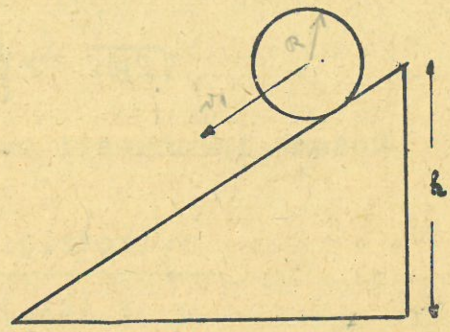
Pokazat ćemo, da bi od dviju jednakih kugala ona, koja bi klizila bez trenja niz neku kosinu, imala veću brzinu od one kugle, koja bi se kotrljala. (Slika 148.)

Kinetička energija kugle, koja je otklizila niz kosinu, bit će jednaka njenoj početnoj potencijalnoj energiji, t.j.

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh$$

Konačna brzina je dakle jednaka $v = \sqrt{2\cdot gh}$.

Kod kugle, koja se kotrlja, mora se jedan dio potencijalne energije pretvoriti u energiju rotacije, a jedan dio u energiju translacije. Energiju rotacije označimo sa E_r a energiju translacije, koju ima zbog toga, što se kao cjelina giba pravocrtno sa E_t . Mora dakle biti [1]



SLIKA 148

$$E_t + E_r = Mgh$$

$E_t = \frac{M \cdot v_1^2}{2}$, gdje je v_1 brzina kojom se kugla (njezino središte) giba naprijed; $E_r = \frac{\omega^2}{2} \cdot I_a$, jer kugla rotira.

Dakle:

$$\frac{M \cdot v_1^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot I_a = Mgh$$

Za I_a kod kugle smo izračunali da je $\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$, dakle

$$\frac{M \cdot v_1^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2 = Mgh$$

Da dobijemo odnos između kutne brzine ω i translatorne brzine v_1 , zamislimo, da kugla uz jednoliku brzinu kotrlja tako daleko, da se okrene za 2π , t.j. za jedan puni okretaj. Pri tom se odmotao njezin opseg $2R\pi$, dakle je i odmaknula za $2R\pi$. Omjer kuta vrtnje i puta translacije je dakle $\frac{2\pi}{2R\pi} = \frac{1}{R}$. U istom omjeru su kut u jedinici vremena i put u jedinici vremena, t.j. kutna i translatorna brzina ω i v_1 , dakle

$$\frac{\omega}{v_1} = \frac{1}{R} \quad \text{ili} \quad \omega = \frac{v_1}{R}$$

Bit će dakle

$$\frac{M \cdot v_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2R^2} \cdot \frac{2}{5} M \cdot R^2 = Mgh$$

$$Mv_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = Mgh$$

$$v_1^2 = \frac{10}{7} \cdot gh \qquad v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot gh}$$

---

1) Može se lako pokazati, da je zbroj kinetičkih energija svih čestica nekoga tijela, koje pravocrtno odmiče, a pri tom rotira oko neke svoje osi, jednaka zbroju kinetičke energije translacije koju tijelo ima, ako samo odmiče, a ne rotira, i kinetičke energije rotacije,koju ima,ako samo rotira,a ne odmiče.

Iz toga rezultata vidimo, da je brzina rotirajuće kugle (v_1) manja od brzine kugle, koja klizi (v) :

$$\sqrt{2gh} > \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Možemo izračunati omjer tih brzina

$$\frac{v_1(\text{kotrlj.})}{v\ (\text{kl.})} = \frac{\sqrt{\frac{10}{7}}}{\sqrt{2}} = 0{,}845$$

Kod šupljih kugala s tankim stijenama je taj odnos brzina još manji.

I ovdje kod kugle, koja klizi

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh \quad , \quad v = \sqrt{2gh}$$

Kod kugle, koja se kotrlja, bit će opet zbroj energija translacije i rotacije jednaka energiji, samo što će aksijalni moment biti drugačiji, kad je kugla šuplja, t.j. sva masa skupljena na površini, nego kad je masa razdijeljena po cijeloj unutrašnjosti kugle.

Rekli smo, da je kod kugle lakše izračunati polarni moment, a iz toga onda aksijalni moment.

$I_p = MR^2$ (jer su sve čestice udaljene za R od središta).

Opet je $I_a = \frac{2}{3} \cdot I_p$ iz istih razloga kao i kod pune kugle, dakle

$$I_a = \frac{2}{3} \cdot I_p = \frac{2}{3} \cdot M \cdot R^2$$

Sada možemo izračunati v_1 iz relacije

$$\frac{Mv_1^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} I_a = Mgh \, ,$$

$$\frac{M \cdot v_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2R^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot M \cdot R^2 = Mgh \, ,$$

$$M \cdot v_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = Mgh$$

$$v_1^2 = \frac{6}{5} \cdot gh \qquad v_1 = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot gh}$$

gdje i sada vidimo, da je $v > v_1$; $\sqrt{2 \cdot gh} > \sqrt{\frac{6}{5} \cdot gh}$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}}}{\sqrt{2}} = 0{,}7746.$$ Omjer je dakle ovdje još manji nego kod ~~šupljih~~ punih kugala.

49. Integrali, koji se ne daju izraziti elementarnim funkcijama .

Deriviranje bilo kakve kombinacije elementarnih funkcija uvijek se može izraziti opet pomoću elementarnih funkcija. Naprotiv kod integriranja možemo doći do novih vrsti funkcija, koje se ne daju izraziti konačnim brojem operacija izvršenih na elementarnim funkcijama. Takvi se dakle integrali ne daju "elementarno izraziti". Navodimo nekoliko važnijih takvih integrala :

Integralsinus $\quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} \cdot dx$;

integralcosinus $\quad Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx$;

integrallogaritam $\quad li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x}$;

integrali $\quad \int \frac{\arcsin x}{x} dx$, $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx$

integral pogrešaka $\quad \int_0^x e^{-x^2} dx \quad$ i t.d.

Takvi se integrali međutim daju izraziti beskonačnim brojem operacija izvršenim na elementarnim funkcijama, na pr. pomoću beskonačnih konvergentnih redova.

Na pr.

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$$

Integral Si(x) možemo predočiti konvergentnim redom. Pretvorit ćemo integrand $\frac{\sin x}{x}$ u red razdijelivši red potencija za sinx sa x :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Izvršimo sada integraciju, pa dobijemo

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right)\cdot dx + C$$

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots\dots C$$

Ako stavimo $x = 0$, izlazi $C = 0$, jer je očito $Si(o) = 0$.

Na isti način dobijemo i integralkosinus

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \dots\right)dx + C$$

$$= \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \dots\dots + C$$

Ovdje C nije nula, nego se može pokazati da je

$$C = 0{,}5772 \dots.$$

Taj broj se zove Eulerova ili Mascheronijeva konstanta, koja je definirana kao

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

Slično se i mnogi drugi integrali daju predočiti kao redovi potencija.

Među integrale, koji se općenito ne daju elementarno izraziti, spadaju t.zv. eliptični, hipereliptični i Abelovi integrali.

Eliptični su integrali oni, kod kojih je integrand racionalna funkcija od x i od drugog korijena iz polinoma 3. ili 4. stupnja, t.j.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f}\right)dx ,$$ gdje a i b nisu oba jednaka nuli.

Hipereliptični su analogni integrali, kod kojih je pod drugim korijenom polinom 5. ili višeg stupnja. Abelovi integrali su još općenitiji, naime oblika

$\int R(x,y)dx$, gdje je y algebarska funkcija od x,

t.j. implicitno zadan algebarskom jednadžbom $F(x,y) = 0$, gdje je dakle $F(x,y)$ polinom varijabla x i y .

Kod problema njihala srest ćemo se s jednim eliptičnim integralom.

50. Numerička integracija

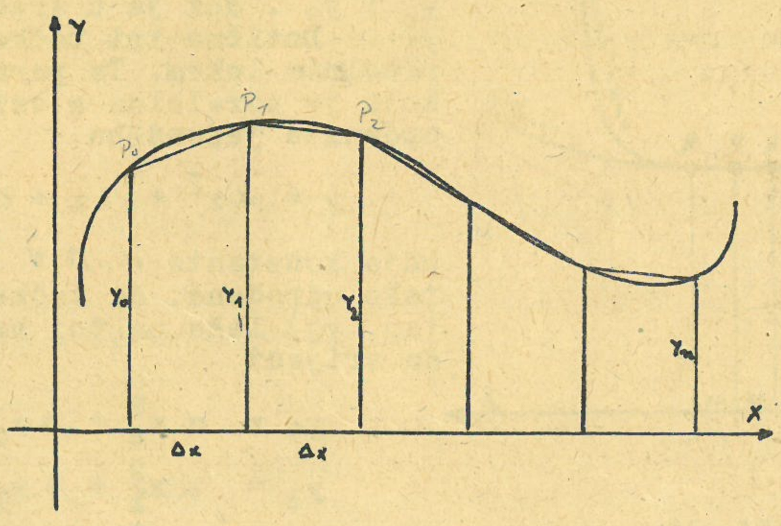
Vrlo često ne možemo izračunati vrijednost određenog integrala, jer ne možemo izraziti dotični neodređeni integral nekom jednostavnom funkcijom.

Ima doduše i nekih izravnih metoda za izračunavanje stanovitih određenih integrala bez određivanja dotičnog neodređenog integrala, no te metode je obično teško primjeniti, a često to uopće ne uspijeva.

Služimo se onda za izračunavanje numeričkom integracijom. Njom određujemo približno vrijednost određenog integrala u intervalu $[ab]$. Najpoznatije su trapezna formula i Simpsonova formula.

T r a p e z n a   f o r m u l a

Rastavimo u intervalu $[a,b]$ površinu, koju zatvara krivulja i os x, na n dijelova širine Δx. Točke P_0, P_1 i P_2 na krivulji spojimo tetivama. Dobili smo onda trapeze, čije su baze ordinate, a "visina" im je Δx (slika 149).



SLIKA 149

Neka su $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ apscise djelišta u intervalu $[a,b]$ a pripadne ordinate $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$.

Ukupna površina svih trapeza bit će dakle

$$P = \Delta x \frac{y_0+y_1}{2} + \Delta x \frac{y_1+y_2}{2} + \Delta x \frac{y_2+y_3}{2} + \ldots \Delta x \frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$

$$P = \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2} + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{y_n}{2}\right)$$

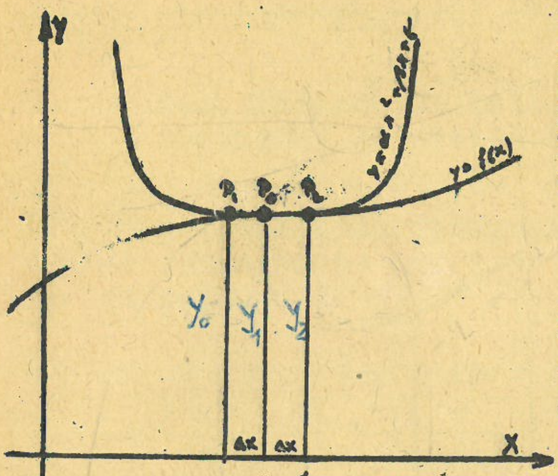
$$P = \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

$$P = \Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots y_{n-1}\right). \qquad (160)$$

Površinu, koju smo izračunali na ovaj način, bit će tim bliža traženoj površini ispod krivulje, čim je n veći, jer se onda lomljena crta, koju tvore tetive, sve više približava krivulji.

S i m p s o n o v a   f o r m u l a .

Da se dobije što točniji rezultat, može se krivulja aproksimirati parabolnim lukovima (slika 150) umjesto tetivama, kako je to kod trapezne formule. Neka je u tu svrhu interval razdijeljen u 2n dijelova (dakle u tak broj dijelova). Uzmimo primjerice prva dva takva dijela s krajnjim ordinatama y_0 i y_2, dok je u sredini ordinata y_1. Dotične tri točke spojimo parabolnim lukom. Ta parabola (s osi, koja je paralelna s osi y) imat će općenito jednadžbu



SLIKA 150

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

gdje konstante α, β, γ moraju biti tako određene, da točke (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) leže na toj paraboli, t.j. da vrijedi

$$y_0 = \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma$$

$$y_1 = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma$$

$$y_2 = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma$$

Površina ispod toga parabolnog luka od x_0 do x_2 će biti

$$\int_{x_0}^{x_2}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot dx=\frac{\alpha}{3}(x_2^3-x_0^3)+\frac{\beta}{2}(x_2^2-x_0^2)+\gamma(x_2-x_0)=$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}\Big\{\underbrace{\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma}_{y_2}+\underbrace{\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma}_{y_0}+\alpha x_2^2+2\alpha x_2x_0+$$

$$+\alpha x_0^2+2\beta(x_2+x_0)+4\gamma\Big\}=\frac{x_2-x_0}{6}\Big\{y_2+y_0+\alpha(x_2+x_0)^2+$$

$$+2\cdot\beta(x_2+x_0)+4\gamma\Big\}.$$

Stavimo li $x_2-x_0=2\delta$, t.j. označimo li sa δ širinu jednog dijela površine, bit će

$$x_2=x_1+\delta\ ,$$

$$x_0=x_1-\delta\ ,$$

dakle

$$x_2+x_0=2\cdot x_1\ ,$$

pa dobijemo dalje

$$\int_{x_0}^{x_2}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot dx=\frac{\delta}{3}(y_2+y_0+\underbrace{4\alpha x_1^2+4\beta x_1+4\gamma}_{4y_1})=$$

$$=\frac{\delta}{3}(y_0+4\cdot y_1+y_2)\ .$$

Analogno je

$$\int_{x_2}^{x_4}(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)dx=\frac{\delta}{3}(y_2+4\cdot y_3+y_4)$$

i t.d. za sve ostale parove dionih intervala, tako da je sva površina ispod parabolnih lukova

$$P=\frac{\delta}{3}\Big\{y_0+4\cdot y_1+y_2+$$

$$+y_2+4\cdot y_3+y_4+$$

$$+y_4+4\cdot y_5+y_6+$$

$$+\ ....$$

$$.....$$

$$+y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}\Big\}$$

ili

$$P = \frac{\delta}{3}\left\{ y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) \right\}$$

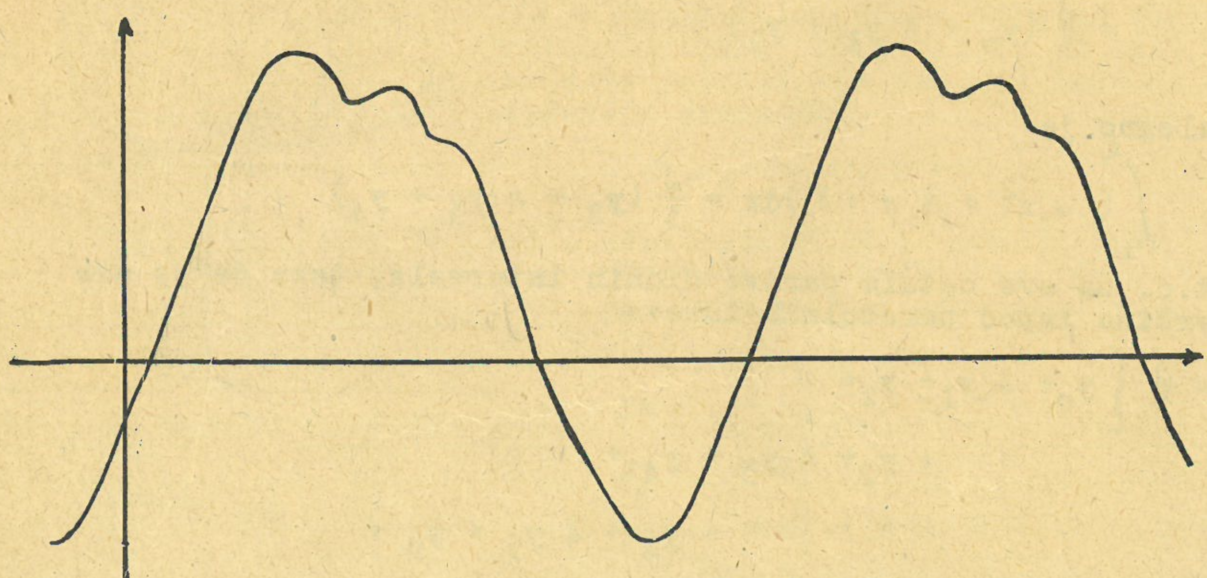
Ovo je Simpsonova formula, koja je znatno točnija od trapezne, a da nije mnogo kompliciranija.

51. Fourierovi redovi

U prirodnim pojavima često su neke fizičke veličine periodičke funkcije vremena, t.j. mijenjaju se u stalnom ritmu. Tako na pr. njihanje, mehanička i elektromagnetska titranja, obilaženje planeta oko sunca, razna periodička gibanja kod strojeva, izmjenične električne struje i t.d. No može neka veličina biti i periodička funkcija prostornih varijabla. Na pr. valovi na vodi u nekom momentu pokazuju, da je visina točaka površine periodička funkcija od x, ako je os x položena u smjeru širenja valova. Takve periodične funkcije ne moraju imati oblik sinuslinije, t.j. najpravilnije periodične funkcije. Udarimo li na pr. na glasoviru neki akord, t.j. nekoliko tonova najedamput, nastaju akustički valovi, t.j. periodična zgušćenja i razrеđenja uzduha. Oscilografira li se taj tok, dobije se slika periodične funkcije, koja nije sinuslinija (slika 151). Pojedini ton - ako je sasvim čist - ima naprotiv oblik sinuslinija. Periodična funkcija akorda nastala je dakle zbrajanjem (superpozicijom) ordinata od više sinuslinija.

Matematički definiramo periodičnost ovako :

Ako je: $\quad f(x + L) = f(x) \quad$ za svaki x ,



SLIKA 151

onda je funkcija $f(x)$ periodična s periodom L. Na temelju toga je onda

$$f(x + 2L) = f\left[(x+L) + L\right] = f(x+L) = f(x) ,$$

t.j. i 2L je period, isto tako 3L i t.d. Ako je L najmanji broj, za koji vrijedi $f(x+L) = f(x)$, onda ga zovemo temeljnim periodom te funkcije.

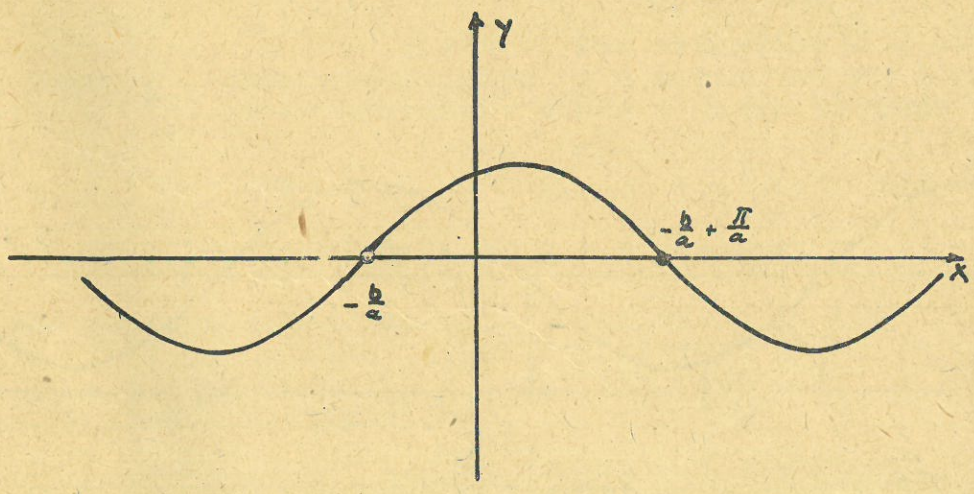
Superponiramo li dakle više sinusfunkcija, dobit ćemo sigurno periodsku funkciju, ako ti sinusi imaju svi jedan zajednički period L, jer će onda dakako i njihova suma imati taj period. To znači, da je L višekratnik temeljnih perioda L_1, $L_2, \ldots$ pojedinih sinusa, koje zbrajamo. Za temeljne periode tih sinusa dakle dolaze u obzir brojevi L,
$\frac{L}{2}, \frac{L}{3}, \frac{L}{4}, \ldots$.

Napose možemo zbrojiti i neizmjerno mnogo takvih sinusa i tako tvoriti "trigonometrijski red". Ako je taj red konvergentan, on će predočivati funkciju s periodom L.

Ako je obrnuto zadana neka periodična funkcija (recimo oscilogram nekog akorda), htjet ćemo iznaći, iz kojih je sinusfunkcija superponiran (t.j. iz kojih čistih tonova se akord sastoji). Treba dakle tu funkciju rastaviti u zbroj sinusa, ili, ako ih je neizmjerno mnogo, tu funkciju razviti u trigonometrijski red, koji se zove "Fourierov" red. Ovo rastavljanje zovemo "harmonijskom analizom".

Opća jednadžba sinuslinije, koja je još pomaknuta u smjeru osi x, glasi

$$y = A \cdot \sin(ax + b) \qquad \text{(slika 152)}$$



SLIKA 152

Njezine su nultočke određene jednadžbama

$$\ldots,\ ax + b = -\pi\ ,\ ax + b = 0,\ ax + b = \pi\ ,\ ax + b = 2\pi, \ldots$$

dakle odgovaraju ovim vrijednostim od x :

$$\ldots,\ -\frac{b}{a} - \frac{\pi}{a}\ ;\ -\frac{b}{a}\ ;\ -\frac{b}{a} + \frac{\pi}{a}\ ;\ -\frac{b}{a} + \frac{2\pi}{a}\ ;\ \ldots$$

Period sinusfunkcije odgovara prirastu argumenta sinusa za 2π. To znači, ako x naraste za period L, mora $ax + b$ narasti za 2π, dakle

$$a(x + L) + b = ax + b + 2\pi$$

ili

$$aL = 2\pi\ ,\quad L = \frac{2\pi}{a}$$

Ako se radi o vremenskom pojavu, bit će x vrijeme, pa ga označimo sa t . Mjesto L ćemo pisati T, mjesto "a" pišemo ω, a mjesto "b" pišemo φ.

Dobivamo

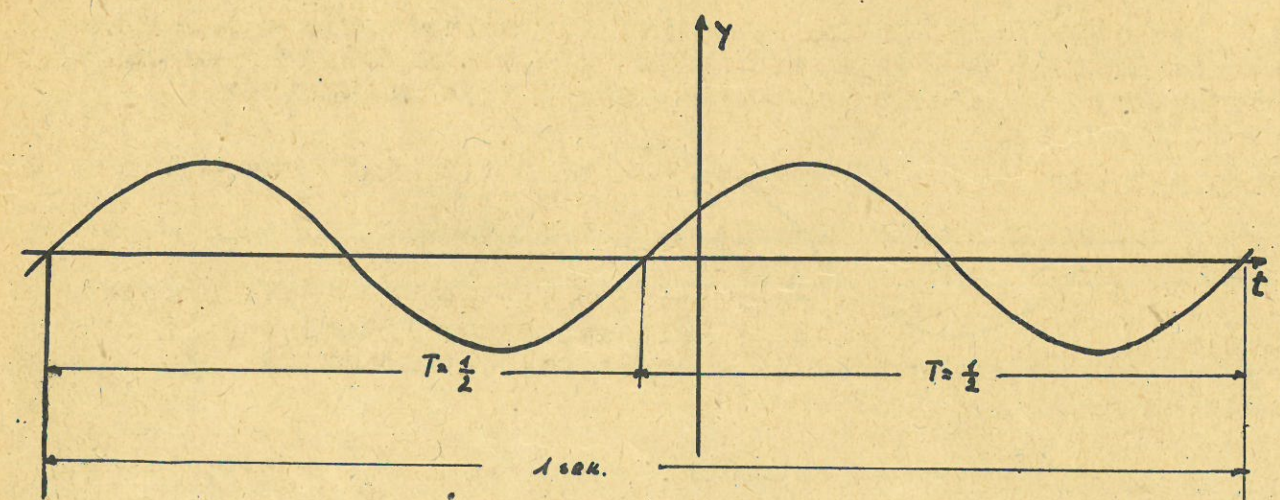
$$y = A \cdot \sin\ (\ \omega \cdot t + \varphi)\ ,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Veličinu

$$\frac{1}{T} = f$$

zovemo frekvencijom, jer je to "broj titraja u jedinici vremena". Ako je na pr. $T = \frac{1}{2}$ sek, onda je $f = 2$ (slika 153).

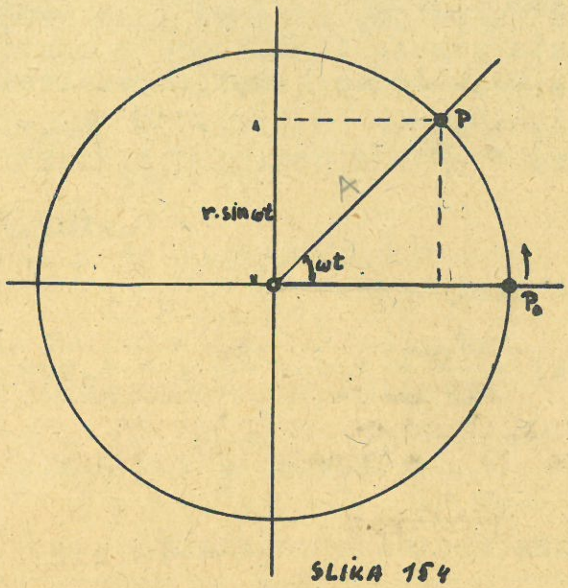


SLIKA 153

Veličina

$$\omega = 2\pi f$$

zove se "kružna frekvencija". Rotira li točka P (slika 154) na kružnici polumjera A kutnom brzinom ω u pozitivnom smislu s početnim položajem $P_0(1,0)$, to će njena spojnica sa središtem poslije vremena t s osi x zatvarati kut ωt.



SLIKA 154

Koordinate točke P su dakle $x = A\cdot\cos\omega t$, $y = A\cdot\sin\omega t$. Vidimo, da je njezina ordinata sinusfunkcija od t, t.j. njezina projekcija na os y titra s frekvencijom $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Zbog ovog značenja veličine ω kao kutne brzine zovemo je "kružnom frekvencijom" titraja.

Veličina φ zove se "početni fazni kut". Naime, uzmemo li početni P_0 položaj točke P tako, da joj spojnica sa središtem zatvara s osi x kut φ narast će taj kut poslije vremena t na vrijednost $\varphi + \omega\cdot t$, t.j. projekcija točke P na os y titra po zakonu

$$y = r\cdot\sin(\omega t + \varphi).$$

Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ izlazi $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos\omega t$,

t.j. kozinuslinju možemo shvatiti kao sinuslinju s početnim faznim kutom $\frac{\pi}{2}$. Opću sinuslinju $y = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$ možemo rastaviti u jedan (nepomaknuti) sinus i jedan kozinus :

$$y = A\cdot\sin(\omega t + \varphi) = A\cdot\cos\varphi\cdot\sin\omega t + A\cdot\sin\varphi\cdot\cos\omega t =$$

$$= C\cdot\sin\omega t + D\cdot\cos\omega t .$$

*

Ako je periodična funkcija s periodom L (pišemo opet L mjesto T i x mjesto t, ali zadržavamo slova ω, φ) rastavljena u sinusfunkcije s temeljnim periodima L, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{3}$, ..., onda su im kružne frekvencije

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{L}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{\frac{L}{2}} = 2\omega_1, \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{\frac{L}{3}} = 3\omega_1 \quad \text{i t.d.}$$

t.j. kružne frekvencije pojedinih sinusa su višekratnici temeljne frekvencije $\omega_1 = \frac{2\pi}{L}$. Fourierov red će dakle općenito

kružne

glasiti

$$f(x) = C_o + C_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + C_2 \sin(2\omega x + \varphi_2) + \ldots ,$$

gdje smo još dodali konstantu C_o , što možemo, jer je funkcija $y = C$ periodična sa svakim periodom (i ujedno je to jedina takva funkcija, kako se lako uviđa). Rastavljajući opće sinuse u čiste sinuse i kozinuse i označujući C_o su $\frac{A_o}{2}$ (što je zgodnije, kako će se kasnije razabrati), dobijemo

$$f(x) = \frac{A_o}{2} + A_1 \cos\omega x + A_2 \cos 2\omega x + A_3 \cos 3\omega x + \ldots + B_1 \sin\omega x + B_2 \sin 2\omega x + B_3 \sin 3\omega x + \ldots$$

ili zbog $\omega = \frac{2\pi}{L}$

$$f(x) = \frac{A_o}{2} + A_1 \cos\frac{2\pi}{L}x + A_2 \cos\frac{4\pi}{L}x + A_2 \cos\frac{6\pi}{L}x + \ldots + B_1 \sin\frac{2\pi}{L}x + B_2 \sin\frac{4\pi}{L}x + A_3 \sin\frac{6\pi}{L}x + \ldots$$

Kraće napisano to glasi

$$f(x) = \frac{A_o}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{2k\pi}{L}x + B_k \sin\frac{2k\pi}{L}x\right) \qquad (162)$$

Koeficijenti Fourierovog reda

Da razvijemo neku zadanu periodičnu funkciju u Fourierov red, t.j. da odredimo koeficijente toga reda, potrebno nam je izračunati nekoliko određenih integrala:

$$\text{I} \quad \int_a^{a+L} \sin^2 \frac{2\cdot k\cdot\pi\cdot x}{L}\, dx = \frac{L}{2}$$

$$\text{II} \quad \int_a^{a+L} \cos^2 \frac{2\cdot k\cdot\pi\cdot x}{L}\, dx = \frac{L}{2}$$

$$\text{III} \quad \int_a^{a+L} \cos\frac{2\cdot r\cdot\pi\cdot x}{L} \cos\frac{2\cdot s\cdot\pi\cdot x}{L}\, dx = 0 \qquad (r \neq s)$$

$$\text{IV} \quad \int_a^{a+L} \sin\frac{2\cdot r\cdot\pi x}{L} \cos\frac{2\cdot s\cdot\pi x}{L}\, dx = 0$$

$$\text{V} \quad \int_a^{a+L} \sin\frac{2\cdot r\cdot\pi x}{L} \sin\frac{2\cdot s\cdot\pi\cdot x}{L}\, dx = 0 \qquad (r \neq s)$$

I $\quad \int_a^{a+L} \sin^2 \frac{2\cdot k\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx$

Iz trigonometrije znamo, da je $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, dakle

$$I = \int_a^{a+L} \frac{1-\cos\frac{4\cdot k\cdot\pi\, x}{L}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+L} dx - \frac{1}{2}\int_a^{a+L} \cos\frac{4\,k\,x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x\Big]_a^{a+L} - \frac{L}{8\cdot k\cdot\pi}\Big[\sin\frac{4\cdot k\cdot\pi\, x}{L}\Big]_a^{a+L}$$

$$= \frac{a+L}{2} - \frac{a}{2} - \frac{L}{8\cdot k\cdot\pi}\left\{\sin\left(\frac{4\cdot k\cdot\pi a}{L} + 4\cdot k\pi\right) - \sin\frac{4\cdot k\cdot\pi\cdot a}{L}\right\}$$

Vidimo, da je izraz unutar vitičaste zagrade jednak nuli, jer je $\sin\left(\frac{4k\pi a}{L} + 4k\pi\right) = \sin\frac{4k\pi\cdot a}{L}$. Izrazi su jednaki, jer je argument lijevog sinusa povećan za $k\cdot 2\pi$, a sinus ima period 2π. Prema tome integral glasi

$$\int_a^{a+L} \sin^2\frac{2k\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2}$$

II $\quad \int_a^{a+L} \cos^2\frac{2k\cdot\pi x}{L}\,dx$

Znamo, da je $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, dakle

$$I = \int_a^{a+L} \frac{1+\cos\frac{4k\pi x}{L}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x\Big]_a^{a+L} + \frac{L}{8k\pi}\Big[\sin\frac{4k\cdot\pi\cdot x}{L}\,x\Big]_a^{a+L}$$

Analogno kao gore dobijemo, da je

$$\int_a^{a+L} \cos^2\frac{2k\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx = \frac{L}{2}$$

III $\quad \int_a^{a+L} \cos\frac{2r\cdot\pi\cdot x}{L}\cos\frac{2s\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx \qquad (r \neq s)$

Pretpostavljamo $r \neq s$ (r,s cijeli pozitivni brojevi), jer slučaj $r = s$ daje integral, koji je već gore riješen. Iz trigonometrije znamo, da je $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$. To ćemo uvrstiti u integral.

$$I = \frac{1}{2}\left[\int_a^{a+L} \cos \frac{2(r+s)\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx + \int_a^{a+L} \cos \frac{2(r-s)\cdot\pi\, x}{L}\,dx\right] =$$

$$= \frac{L}{4(r+s)\pi}\left[\sin \frac{2(r+s)\pi\, x}{L}\right]_a^{a+L} + \frac{L}{4(r-s)\pi}\left[\sin \frac{2(r-s)\ \ x}{L}\right]_a^{a+L}$$

$$= \frac{1}{4(r+s)\pi}\left\{\sin\left(\frac{2(r+s)\pi\, a}{L} + 2(r+s)\pi\right) - \sin \frac{2(r+s)\cdot\pi\cdot a}{L}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{4(r-s)\pi}\left\{\sin\left(\frac{2(r-s)\cdot\pi\cdot a}{L} + 2(r-s)\pi\right) - \sin \frac{2(r-s)\cdot\pi\, a}{L}\right\}$$

Kako vidimo, izrazi u vitičastim zagradama imaju vrijednost nula, jer su argumenti prvih sinusa povećani za $(r + s)2\pi$ odnosno $(r-s)2\pi$ te su prema tome jednaki drugim sinusima. Iz toga slijedi, da je

$$\int_a^{a+L} \cos \frac{2r\cdot\pi\cdot x}{L} \cos \frac{2s\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx = 0 \qquad (r \neq s)$$

IV. $\displaystyle\int_a^{a+L} \sin \frac{2r\cdot\pi\cdot x}{L} \cos \frac{2s\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx$

Analogno kao i gore imamo trigonometrijsku relaciju, da je $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$, dakle

$$I = \frac{1}{2}\int_a^{a+L} \sin \frac{2(r+s)\cdot\pi\, x}{L}\,dx + \frac{1}{2}\int_a^{a+L} \sin \frac{2(r-s)\,\pi\, x}{L}\,dx$$

$$= -\frac{L}{4(r+s)\pi}\left[\cos \frac{2(r+s)\cdot\pi\, x}{L}\right]_a^{a+L} - \frac{L}{4(r-s)\pi}\left[\cos \frac{2(r-s)\cdot\pi\, x}{L}\right]_a^{a+L}$$

$$= -\frac{L}{4(r+s)\cdot\pi}\left\{\cos\left(\frac{2(r+s)\cdot\pi\cdot a}{L} + 2(r+s)\pi\right) - \cos \frac{2(r+s)\,\pi\, a}{L}\right\} -$$

$$- \frac{L}{4(r-s)\pi}\left\{\cos\left(\frac{2(r-s)\cdot\pi\, a}{L} + 2(r-s)\pi\right) - \cos \frac{2(r-s)\,\pi\, a}{L}\right\}$$

Rezultat je nula iz istog razloga kao i u prošlom integralu, dakle

$$\int_a^{a+L} \sin \frac{2r\cdot\pi\cdot x}{L} \cos \frac{2s\cdot\pi\cdot x}{L}\,dx = 0\,.$$

Za slučaj $r = s$ otpada već $\int_a^{a+L} \sin \frac{2(r-s)\cdot\pi\cdot x}{L} dx$, i rezultat je isti, tako da ova formula vrijedi i za $r = s$.

V. $$\int_a^{a+L} \sin \frac{2r\pi x}{L} \sin \frac{2s\pi x}{L} dx$$ $r \neq s$

Pošto je $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$, dobijemo:

$$I = \frac{1}{2}\cdot\int_a^{a+L} \cos\frac{2(r-s)\cdot\pi\cdot x}{L} dx - \frac{1}{2}\int_a^{a+L} \cos\frac{2(r+s)\cdot\pi\cdot x}{L} dx$$

$$= \frac{L}{4(r-s)\pi}\left[\sin\frac{2(r-s)\quad x}{L}\right]_a^{a+L} - \frac{L}{4(r+s)\pi}\left[\sin\frac{2(r+s)\quad x}{L}\right]_a^{a+L}$$

$$= \frac{L}{4(r-s)\pi}\left\{\sin\left(\frac{2(r-s)\pi a}{L} + 2(r-s)\pi\right) - \sin\frac{2(r-s)\pi a}{L}\right\}$$

$$- \frac{L}{(4(r+s)\pi}\left\{\sin\left(\frac{2(r+s)\pi a}{L} + 2(r+s)\pi\right) - \sin\frac{2(r+s)\pi a}{4}\right\}$$

Iz istog razloga kao i u gornja dva slučaja vrijedi

$\int_a^{a+L} \sin\frac{2r\pi x}{L} \sin\frac{2s\pi x}{L} dx = 0$ $(r \neq s)$. Vidi se, da je pretpostavka $r \neq s$ u III. i IV. slučaju bitna, jer se razlika $r-s$ pojavljuje u nazivniku i stoga ne smije biti jednaka nuli, inače račun nije na ovaj način provediv. Integrali III, IV za slučaj $r = s$ prelaze u integrale II, I.

Vratit ćemo se na naš Fourierov red, koji, kako smo rekli, glasi

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{2k\pi x}{L} + B_k\sin\frac{2k\pi x}{L}\right]$$

Promatrajmo jedan odlomak periodične funkcije $f(x)$, koji ima duljinu perioda L, t.j. promatramo funkciju između a i $a+L$.

Integrirajmo lijevu i desnu stranu u granicama $[a, a+L]$, odnosno, pošto je $a+L$ gornja granica b, u granicama $[a,b]$, dakle :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{A_0}{2} dx + \int_a^b A_k\cos\frac{2k\pi x}{L} dx + \int_a^b B_k\sin\frac{2k\pi x}{L} dx$$

(Pri tome dakako pretpostavljamo, da je dopušteno na desnoj strani integraciju izvršiti član po član.)

Kako su integrali $\int_a^{a+L} \cos\frac{2k\pi x}{L} dx$ i $\int_a^{a+L} \sin\frac{2k\pi x}{L} dx$ jednaki nuli, kako se lako dobije, to ostaje :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A_0}{2}\Big[x\Big]_a^{a+L} = \frac{A_0}{2}\cdot L$$

ili konstantno $\boxed{A_0 = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)dx}$. (163)

Pomnožimo li cijeli red sa $\cos\frac{2k\pi}{L}x$ i integriramo li od a do a+L odnosno od a do b, dobijemo

$$\int_a^b f(x)\cos\frac{2k\pi}{L}xdx = \int_a^b \frac{A_0}{2}\cos\frac{2k\pi}{L}xdx + \sum_{r=1}^{\infty}\int_a^b A_r\cos\frac{2r\pi x}{L}\cos\frac{2k\pi x}{L}dx +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty}\int_a^b B_r\sin\frac{2r\pi}{L}x\cdot\cos\frac{2k\pi}{L}xdx .$$

Kako je $\int_a^b\cos\frac{2k\pi x}{L}dx = 0$, $\int_a^b\sin\frac{2r\pi x}{L}\cos\frac{2k\pi x}{L}dx = 0$ i za $r \neq k$ $\int_a^b\cos\frac{2r\pi x}{L}\cos\frac{2k\pi x}{L}dx = 0$ to preostaje samo član $\int_a^b A_k\cos^2\frac{2k\pi x}{L}dx$, koji je sadržan u prvoj sumi za $r = k$, dakle zbog $\int_a^b\cos^2\frac{2k\pi x}{L}dx = \frac{L}{2}$

$$\int_a^b f(x)\cos\frac{2k\pi}{L}xdx = A_k\cdot\frac{L}{2}$$

odnosno $\boxed{A_k = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\frac{2k\pi}{L}xdx}$. (164)

Pomnožimo li sada red sa $\sin\frac{2k\pi}{L}x$ i integriramo od a do b, dobijemo:

$$\int_a^b f(x)\sin\frac{2k\pi}{L}xdx = \frac{A_0}{2}\int_a^b\sin\frac{2k\pi}{L}xdx + \sum_{r=1}^{\infty}A_r\int_a^b\cos\frac{2r\pi}{L}x\sin\frac{2k\pi\cdot x}{L}dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty}B_r\int_a^b\sin\frac{2r\pi x}{L}\sin\frac{2k\pi x}{L}dx .$$

Kako je $\int_a^b\sin\frac{2k\pi x}{L}dx = 0$ i $\int_a^b\cos\frac{2r\pi x}{L}\sin\frac{2k\pi x}{L}dx = 0$

zatim za $r \neq k$ $\int_a^b\sin\frac{2r\pi x}{L}\sin\frac{2k\pi x}{L}dx = 0$ to preostaje član $r = k$ iz druge sume, dakle zbog

$$\int_a^b\sin^2\frac{2k\pi x}{L}dx = \frac{L}{2}$$ dobijemo

$$\int_a^b f(x)\sin\frac{2k\pi}{L}x\,dx = B_k\cdot\frac{L}{2} \quad \text{odnosno}$$

$$\boxed{B_k = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cdot\sin\frac{2k\pi}{L}x\,dx} \qquad (165)$$

Time smo jednadžbama (163, 164 i 165) dobili formule za određivanje koeficijenata Fourierovog reda. Vidi se sada, zašto smo konstantni član označili sa $\frac{A_0}{2}$, a ne sa A_0. Time se u formuli za A_0 desno pojavio faktor 2, koji se pojavljuje i u formulama za ostale koeficijente, pa je tako postignuta jednolikost. Fourierov se red može napisati i pomoću eksponencijalnih funkcija. Potrebne su nam za to Eulerove formule, koje glase

$$e^{ix} = \cos x + i\cdot\sin x \quad \text{odnosno} \quad e^{ikx} = \cos kx + i\cdot\sin kx$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\cdot\sin x \quad \text{"} \quad e^{-ikx} + \cos kx - i\cdot\sin kx$$

Ako ove dvije jednadžbe zbrojimo, dobijemo

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left[e^{ikx} + e^{-ikx}\right]$$, a ako ih odbijemo, dobijemo, da je

$$\sin kx = \frac{1}{2i}\left[e^{ikx} - e^{-ikx}\right]$$

Prema tome možemo pisati namjesto trigonometrijskog polinoma eksponencijalni polinom.

$$A_k\cos\frac{2k\pi x}{L} + B_k\sin\frac{2k\pi x}{L} = \frac{A_k}{2}\left[e^{i\frac{2k\pi x}{L}} + e^{-i\frac{2k\pi x}{L}}\right] +$$

$$+\frac{B_k}{2i}\left[e^{i\frac{2k\pi x}{L}} - e^{-i\frac{2k\pi x}{L}}\right] =$$

$$= e^{i\frac{2k\pi x}{L}}\left(\frac{A_k}{2} + \frac{B_k}{2i}\right) + e^{-i\frac{2k\pi x}{L}}\left(\frac{A_k}{2} - \frac{B_k}{2i}\right) \qquad (166)$$

Budući da je $\left(\frac{A_k}{2} + \frac{B_k}{2i}\right) = \left(\frac{A_k}{2} - i\frac{B_k}{2}\right)$, možemo (166) pisati i ovako

$$\left(\frac{A_k}{2} - i\frac{B_k}{2}\right)\cdot e^{i\frac{2k\pi x}{L}} + \left(\frac{A_k}{2} + i\frac{B_k}{2}\right)\cdot e^{-i\frac{2k\pi x}{L}} \qquad (167)$$

$C_k =$ $\left(\frac{A_k}{2} - i\frac{B_k}{2}\right)$ označit ćemo sa nekom konstantom C_k a $\left(\frac{A_k}{2} + i\frac{B_k}{2}\right) = C_{-k}$ sa konstantom C_{-k} , te dobijemo, da izraz pod (167) glasi

$$C_k e^{i\frac{2k\pi x}{L}} + C_{-k}e^{-i\frac{2k\pi x}{L}} \qquad (168)$$

Članovima s indeksom k odgovara dakle jedan član s indeksom k i jedan član s indeksom -k.

Fourierov red izražen eksponencijalnim funkcijama glasi dakle općenito :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2k\pi x}{L}} \tag{169}$$

Član $k = 0$ daje C_0, koji je dakako jednak $\frac{A_0}{2}$

Kako se iz gornjega vidi, koeficijenti C_k i C_{-k} su konjugirano kompleksni brojevi, ako su A_k i B_k realni t.j. ako je $f(x)$ realna funkcija.

Ako red (169) pomnožimo sa $e^{-i\frac{2k\pi x}{L}}$ i integriramo od a do a+L, dobijemo

$$\int_a^{a+L} f(x)e^{-i\frac{2k\pi x}{L}} dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r \cdot \int_a^{a+L} e^{i\frac{2r\pi x}{L}} \cdot e^{-i\frac{2k\pi x}{L}} dx$$

No za $r \neq k$ možemo pisati

$$\int_a^{a+L} e^{i\frac{2r\pi}{L}x} \cdot e^{-i\frac{2k\pi}{L}x} dx = \int_a^{a+L} e^{i\frac{2(r-k)\pi x}{L}} dx =$$

$$= \frac{L}{i\cdot 2(r-k)\pi}\left[e^{i\frac{2(r-k)\pi}{L}x}\right]_a^{a+L} = \frac{L}{i2(r-k)\pi}\left\{e^{i\frac{2(r-k)\pi}{L}a+2i(r-k)\pi} - e^{i\frac{2(r-k)\pi}{L}a}\right\}$$

što je zbog $e^{i(r-k)2\pi} = 1$ jednako nuli. Preostaje dakle samo član sa $r = k$, a budući da za $r = k$ izlazi

$\int_a^{a+L} dx = L,$ to dobijemo

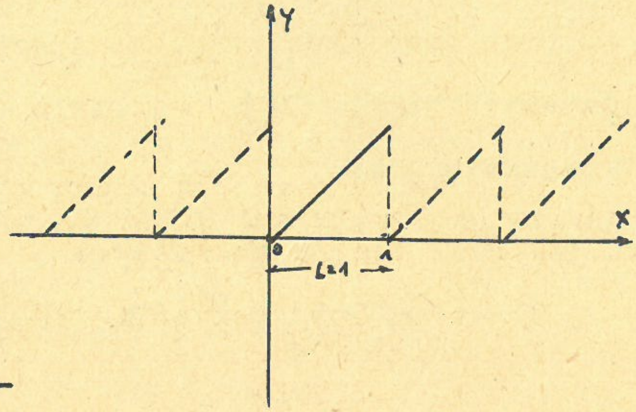
$$C_k = \frac{1}{L} \cdot \int_a^{a+L} f(x)e^{-i\frac{2k\pi x}{L}} dx \tag{170}$$

Time je određena formula za koeficijente C_k.

Kod teoretskih izvoda eksponencijalni je oblik mnogo prikladniji nego trigonometrijski, dok je praktično izračunavanje trigonometrijski zgodnije.

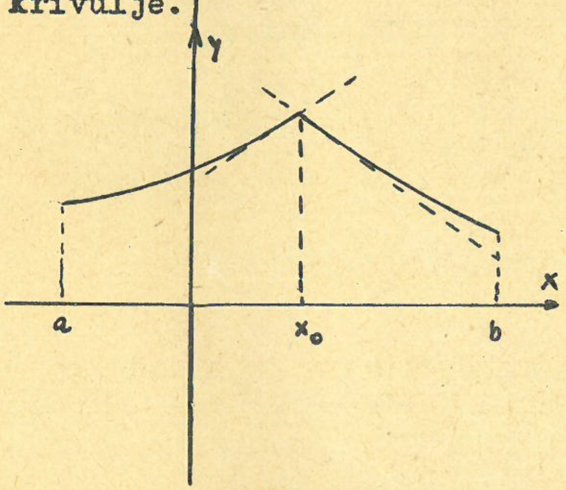
Vidjeli smo, da smo za određivanje koeficijenata trebali funkciju samo unutar jedne duljine perioda L. Možemo stoga taj isti račun provesti za dio bilo kakve funkcije (koja ne mora biti periodična), pa i tako dobijemo Fourierov red, koji funkciju predočuje u dotičnom odabranom intervalu od a do a+L.

Budući da je dobiveni red periodična funkcija s periodom L, to taj red izvan intervala ne će predočivati danu neperiodičnu funkciju, već će predočivati ponavljanje funkcijskog toka unutar intervala. Razvijemo li na pr. funkciju $y = x$ u Fourierov red u intervalu $[0,1]$, to će taj red značiti zupčastu funkciju (slika 155).

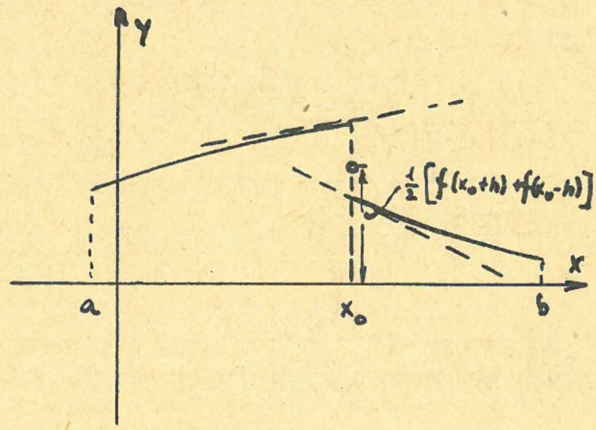


SLIKA 155

Dosada nismo govorili o uvjetima, pod kojima je naš postupak određivanja koeficijenata opravdan. U tom pogledu vrijedi dovoljni uvjet : Daju se u Fourierov red razviti sve funkcije, koje su u danom intervalu po odsječcima derivabilne. To znači, da se interval, u kojemu razvijamo, može podijeliti u konačan broj dijelova tako, da je funkcija derivabilna u svim točkama unutar svakoga dionog intervala, a u krajnjim točkama ima bar jednostranu derivaciju. Ako na pr. funkcija ima za $x = x_0$ točku loma (slika 156a) ili skok (slika 156b) ("diskonuitet prve vrsti"), onda ipak može postojati derivacija "s lijeva" i derivacija "s desna", t.j. tangenta na lijevu odnosno desnu granu krivulje.



SLIKA 156a



SLIKA 156b

Podijelimo li interval u dva dijela $[a,x_0]$ i $[x_0, b]$, to će sada unutar svakom dijelu funkcija (prema slici) biti derivabilna i u krajnjim točkama imati jednostranu derivaciju. U točki, gdje krivulja ima skok, suma Fourierovog reda je jednaka aritmetičkoj sredini lijeve i desne funkcijske vrijednosti, t.j.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k x_0}{L}} = \frac{1}{2}\left[\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0 + \varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0 - \varepsilon)\right] ,$$

gdje ε preko pozitivnih vrijednosti ide prema nuli. Kraće se to piše

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0 + o) - f(x_0 - o) \right]$$

Potanje o tome, kao i o slabijim uvjetima, vidi Marković I, glava šesta.

Uzet ćemo sada nekoliko specijalnih slučajeva :

1) Interval je $[-\pi, \pi]$, dakle $L = 2\pi$.

Konstante glase:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx ,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,$$

a funkcija daje red

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$$

---

2) Interval je $(-1, 1)$, $L = 2$

$$A_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx,$$

$$A_k = \int_{-1}^{1} f(x)\cos k\pi x dx,$$

$$B_k = \int_{-1}^{1} f(x)\sin k\pi x dx,$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\pi x + B_k\sin k\pi x).$$

---

3) Interval je $[0,1]$, $L = 1$

Konstante će prema tome biti

$$A_0 = 2\int_0^1 f(x)dx ,$$

$$A_k = 2\cdot\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kx dx ,$$

$$B_k = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx dx$$

Red glasi

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos 2\pi kx + B_k\sin 2\pi kx) .$$

Ovo bi u kompleksnom obliku glasilo

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2\pi kx} \qquad \text{sa} \quad C_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$$

4) Izrazimo $y = x$ u intervalu $[0,1]$ $(L = 1)$ kao Fourierov red

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos 2\pi kx + B_k \sin 2\pi kx)$$

Treba prvo naći koeficijente.

$$A_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$A_k = 2\int_0^1 x\cos 2\pi kxdx = \frac{1}{\pi k}\left[x\sin 2\pi kx\right]_0^1 - \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \sin 2\pi kxdx \;.$$

Prvi izraz je nula, jer sinus od $2k\pi$ i od 0 je nula.

$$A_k = -\frac{1}{\pi k}\int_0^1 \sin 2\pi kxdx = \frac{1}{2\pi^2k^2}\left[\cos 2\pi kx\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi^2k^2}\left[1-1\right] = 0$$

Prema tome članova sa cos nema (osim konstantnog člana, koji se može smatrati cos-članom za $k = 0$)

$$B_k = 2\int_0^1 x\sin 2\pi kxdx = -\frac{1}{\pi k}\left[x\cos 2\pi kx\right]_0^1 + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \cos 2\pi kxdx =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left[1-0\right] + \frac{1}{2\pi^2k^2}\left[\sin 2\pi kx\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi k} + \frac{1}{2\pi^2k^2}\left[0-0\right] = -\frac{1}{\pi k}$$

dakle $B_k = -\frac{1}{\pi k}$.

Uvrstimo li to u naš red, dobijemo za $0 < x < 1$

$$f(x) = x = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi k}\right)\cdot\sin 2\pi kx =$$

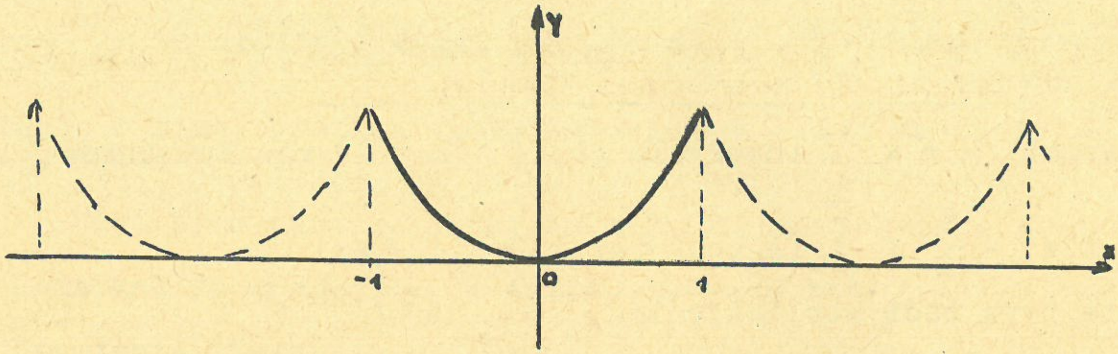
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left\{\sin 2\pi x + \frac{1}{2}\sin 4\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi k + \ldots\ldots\right\}$$

Za $x = 1$ dobijemo $f(x) = \frac{1}{2}$, što je u skladu s tim, što smo rekli za vrijednost Fourierovog reda na mjestu diskontinuiteta.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{f(1+0) + f(1-0)\right\} = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

Za $x = 0$ dobijemo isto, što je i razumljivo , jer se periodičnost Fourierovog reda prenosi i na lijevu stranu koordinatnog sustava te i sa $x = 0$ postoji diskontinuitet.

5) Razvijmo u Fourierov red $y = x^2$ u intervalu $[-1, 1]$ $L = 2$ (slika 157).



SLIKA 157

$$f(x) = \frac{A_0}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\pi x + B_k \sin k\pi x)$$

$$A_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} ,$$

$$A_k = \int_{-1}^{1} x^2 \cos k\pi\, x dx = \frac{1}{k\pi}\left[x^2 \sin k\pi\, x\right]_{-1}^{1} -$$

$$- \frac{2}{k\pi}\int_{-1}^{1} x \cdot \sin k\pi\, x dx$$

Pošto je prvi član jednak nuli, slijedi, da je

$$A_k = \frac{2}{k^2\pi^2}\left[x \cos k\pi\, x\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{k^2 \cdot \pi^2}\int_{-1}^{1} \cos k\pi\, x dx$$

Pošto je $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, a $\int_{-1}^{1} \cos k\pi\, x dx = 0$,

dobijemo, da je

$$A_k = \frac{4}{k^2 \cdot \pi^2}(-1)^k ,$$

jer ako je $k = 1,3,5,7$ ...... , onda izlazi unutar uglaste zagrade $[-2]$, a ako je $k = 2,4,6$ ...... onda izlazi $[+2]$.
To slijedi iz $\cos\pi = \cos 3\pi = \cos 5\pi = ... = -1$,

$\cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = ... = +1$,

t.j. $\cos k\pi x = (-1)^k$.

$$B_k = \int_{-1}^{1} x^2 \sin k\pi\, x dx = -\frac{1}{k\pi}\left[x^2 \cos k\pi\, x\right]_{-1}^{1} + \frac{2}{k\pi}\int_{-1}^{1} x \cos k\pi\, x dx .$$

Pošto je izraz unutar uglaste zagrade jednak nuli, slijedi

$$B_k = \frac{2}{k^2 \cdot \pi^2} \left[x \sin k\pi x \right]_{-1}^{1} - \frac{2}{k^2 \cdot \pi^2} \int_{-1}^{1} \sin k\pi x dx$$

Kako je izraz u uglastoj zagradi jednak nuli, a i integral je nula, to izlazi, da nema sinus-članova :

$$B_k = 0$$

Dakle za $|x| < 1$

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos k\pi x$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{1^2} \cos \pi x + \frac{1}{2^2} \cos 2\pi x - \frac{1}{3^2} \cos 3\pi x + \dots \right\}$$

Time smo razvili $f(x) = x^2$ u Fourierov red. Uzmemo li napose $x = 0$, dobijemo

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} (-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots\dots)$$

odnosno

$$\frac{4}{\pi^2} (-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots\dots) = -\frac{1}{3}$$

ili

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots\dots\dots$$

Time smo dobili još jedan red za broj π , koji međutim nije osobito prikladan za izračunavanje toga broja. Drugi takav red dobijemo, ako stavimo $x = 1$:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\dots \right)$$

odnosno

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\dots\dots$$

Zbrojimo li dobivena dva reda imat ćemo

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4} = 2 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\dots \right) \quad \text{ili}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\dots\dots$$

Vidi se, da iz Fourierovih redova možemo crpsti razne specijalne redove, koje na drugi način nije lako dobiti, odnosno nije lako naći njihovu sumu, kad su ti redovi zadani.

Ako je funkcija razvijena u intervalu $(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$, i ako je ona simetrična spram osi y, t.j. $f(x) = f(-x)$ (takva se funkcija zove "taka" funkcija, jer su sve take potencije od x takove funkcije) onda je lako uvidjeti, da u Fourierovom redu nema sinus-članova. Naime, iz

$$B_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{L}\,dx$$

se vidi, da je integrand "liha" funkcija, t.j., ako ga označimo sa $\varphi(x)$, da je $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ (takvo svojstvo imaju sve lihe potencije od x). Rastavimo li integral :

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\varphi(x)dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{0}\varphi(x)dx + \int_{0}^{\frac{L}{2}}\varphi(x)dx ,$$

to supstitucija $x = -\xi$ daje zbog $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\varphi(x)dx = \int_{\frac{L}{2}}^{0}\varphi(\xi)d\xi = -\int_{0}^{\frac{L}{2}}\varphi(\xi)d\xi$$

Ovo zadnje vrijedi, jer izmjena gornje i donje granica mijenja predznak integrala, što je jasno, ako se sjetimo, kako iz neodređenog integrala dobijemo određeni. Ako je

$$\int\varphi(x)dx = \Phi(x)$$

onda je

$$\int_a^b\varphi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

dok je

$$\int_b^a\varphi(x)dx = \Phi(a) - \Phi(b) ,$$

t.j.

$$\int_a^b = -\int_b^a$$

Dobili smo dakle

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\varphi(x)dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{L}{2}} = -\int_{0}^{\frac{L}{2}} + \int_{0}^{\frac{L}{2}} = 0 ,$$

t.j. $B_k = 0$

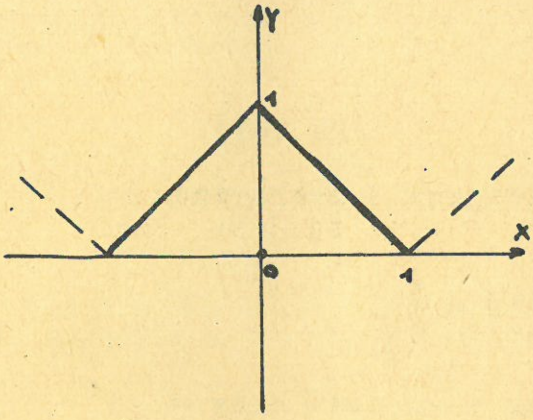
Analogno se vidi, da za lihu funkciju $f(x) = -f(-x)$ (krivulja je tada centralno simetrična spram ishodišta), razvijenu u intervalu $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, nema cosinus-članova, jer

$$A_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{L}\, dx$$

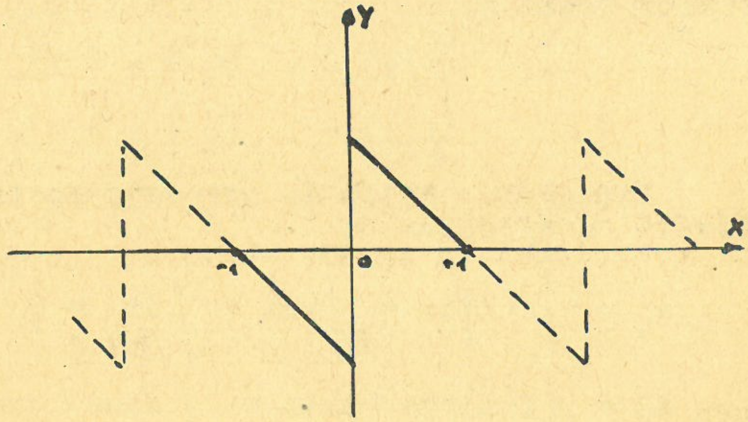
ima kao integrand produkt lihe i take funkcije (cosinus je očito taka funkcija), a to je liha funkcija. Integral je opet nula, t.j.

$$A_k = 0 .$$

Treba li razviti neku funkciju, zadanu u intervalu $[0,L]$ i želimo li dobiti razvoj sa samim cosinus-članovima, možemo to postići time, da interval proširimo na $[-L,L]$, dakle na duljinu 2L, i funkciju u dodatnom dijelu $[-L,0]$ definiramo tako, da bude taka, t.j. krivulju nastavimo simetrično spram osi y . Na pr., ako je $y = -x + 1$ u intervalu $[0,1]$, stavit ćemo $y = +x + 1$ u intervalu $[-1, 0]$ (slika 158). Želimo li

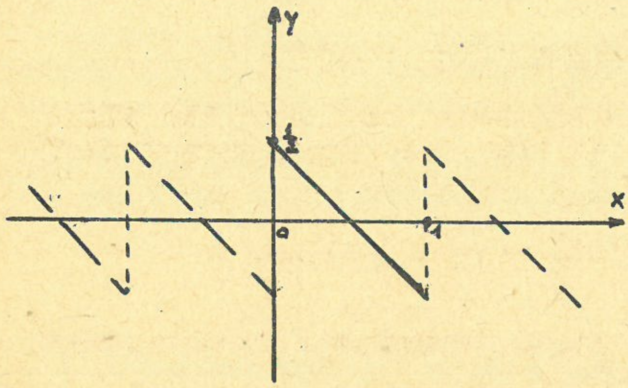


SLIKA 158

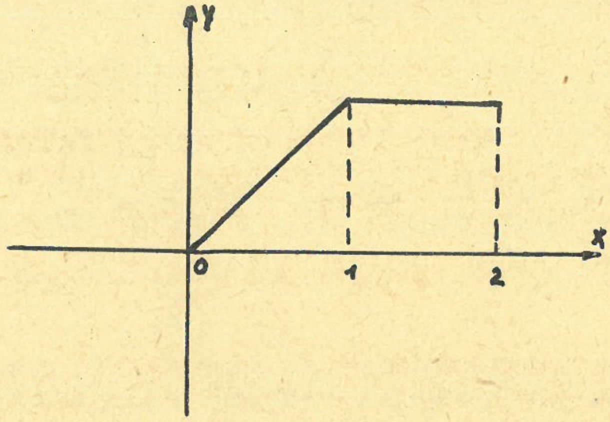


SLIKA 159

same sinus-članove, nastavljamo krivulju centralno simetrično (slika 159). Dobijemo tako dva Fourierova reda, jedan sa samim cos-članovima, drugi sa samim sinus-članovima, oba imaju temeljni period 2, i oba u intervalu $[0,1]$ predočuju istu funkciju. $y = -x + 1$ (ali je tok funkcije izvan toga drukčije). Osim toga možemo dakako funkciju razviti u samom intervalu $[0,1]$ pa dobijemo općenito red sa sinus i cosinus-članovima, ali s temeljnim periodom 1. U našem konkretnom slučaju dobili bismo samo jedan cos-član, naime konstantni član $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2}$,što se uviđa, ako od krivulje odbijemo $\frac{1}{2}$. Izlazi pravac $y = -x + \frac{1}{2}$ u intervalu $[0,1]$, a ako ga periodički nastavimo, dobijemo lihu funkciju (slika 160), koja ima samo sinus-članove. Dodavši joj $\frac{1}{2}$ već smo dobili red za prvobitnu funkciju $y = -x + 1$.



SLIKA 160



SLIKA 161

Funkcija, koja se razvija u Fourierov red, može i unutar intervala biti sastavljena od dijelova, koji su određeni različitim analitičkim izrazima. Recimo, da treba u intervalu $[0,2]$ razviti funkciju

$$f(x) = x \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$$f(x) = 1 \quad (1 \leqq x \leqq 2), \qquad \text{(slika 161)}$$

Integrale, kojim se određuju koeficijenti, treba tada rastaviti u dijelove :

$$A_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$A_k = \int_0^2 f(x)\cos\pi kxdx = \int_0^1 x\cos\pi kxdx + \int_1^2 \cos\pi kxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2k^2}\left[(-1)^k - 1\right] + 0 \text{ , t.j.}$$

$$A_2 = A_4 = A_6 = \ldots\ldots = 0$$

$$A_1 = -\frac{2}{\pi^2} \text{ , } A_3 = -\frac{2}{9\cdot\pi^2} \text{ , } A_5 = -\frac{2}{25\,\pi^2} \text{ , } \ldots\ldots \text{ ;}$$

$$B_k = \int_0^2 f(x)\sin\pi kxdx = \int_0^1 x\sin\pi kxdx + \int_1^2 \sin\pi kxdx = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k} + 0,$$

t.j.

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \text{ , } B_2 = -\frac{1}{2\pi} \text{ , } B_3 = \frac{1}{3\pi} \text{ , } B_4 = -\frac{1}{4\pi} \text{ , } \ldots\ldots$$

i red glasi

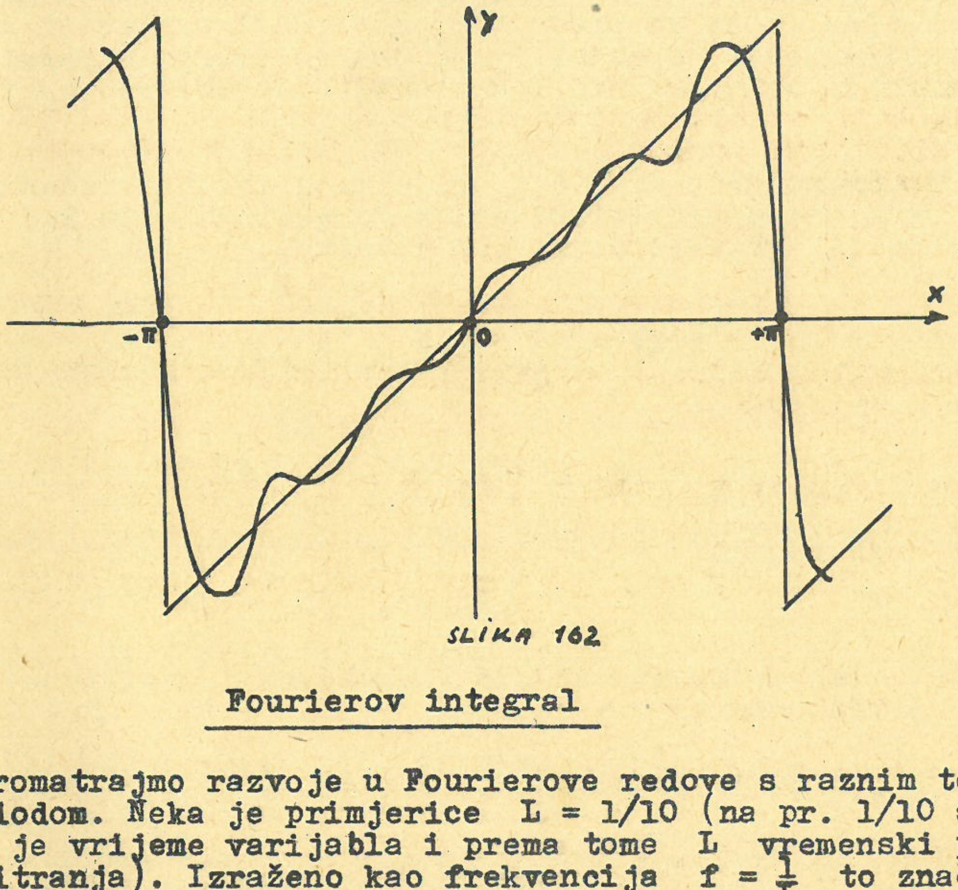
$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{2}{9\cdot\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{2}{25\cdot\pi^2}\cos 5\pi x - \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin \pi x - \frac{1}{2\cdot\pi} \sin 2\pi x + \frac{1}{3\cdot\pi} \sin 3\pi x - \ldots\ldots$$

Uzme li se od nekog Fourierovog reda samo nekoliko članova, dobit će se funkcija, koja približno predočuje danu funkciju $f(x)$. Na pr. funkcija

$$y = 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x)$$

predstavlja prvih 5 članova razvoja za funkciju $f(x)=x$ $(|x|<\pi)$ u intervalu $[-\pi,\pi]$ (slika 162).



SLIKA 162

Fourierov integral

Promatrajmo razvoje u Fourierove redove s raznim temeljnim periodom. Neka je primjerice $L = 1/10$ (na pr. 1/10 sekunde, ako je vrijeme varijabla i prema tome L vremenski period nekog titranja). Izraženo kao frekvencija $f = \frac{1}{L}$ to znači, da je temeljna frekvencija $f_1 = \frac{1}{L} = 10$ (titraja u sekundi). Dalji članovi onda imaju frekvencije, koji su višekratnici temeljne, t.j. frekvencije članova su

10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

Ako je temeljni period veći, $L = 1$, $f_1 = 1$, bit će frekvencije

1,2,3,...., 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, ...

Neka je sada period još veći, recimo $L = 10$, $f_1 = \frac{1}{10}$, dobijemo frekvencije

0'1, 0'2, 0'3,....,49'6, 49'7, 49'8, 49'9, 50, 50'1, 50'2...

s porastom temeljnog perioda

Vidi se, da se u okolici neke frekvencije, recimo $f = 50$, sve više gomilaju frekvencije, t.j. slijede u sve manjim razmacima. Upotrebimo li pojmove iz optike, gdje se rastavljanje u harmonijske (t.j. sinusne) titraje vrši pomoću spektroskopa i time dobije niz linija u spektru, od kojih svaka odgovara nekoj frekvenciji svjetlosnog titraja, dobit ćemo dakle te linije sve više nagusto, čim je veći temeljni period funkcije, (titraja), koju rastavljamo.

Zamislimo sada, da period sve više raste, dok nije postao neizmjeran $[-\infty,\infty]$, to ćemo konačno imati posla s neperiodičnom funkcijom, koja se prema tomu mora dati rastaviti u neprekinuti (kontinuirani) spektar, t.j. ona se dobiva superpozicijom sinusfunkcija svih mogućih frekvencija, dakako raznog intenziteta.

Pokušajmo ovaj granični prijelaz slijediti računski. Upotrebit ćemo za to kompleksni oblik Fourierova reda kao računski jednostavniji. Neka je dakle dan interval $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, onda red glasi

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ikx}{L}}$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\xi) e^{-\frac{2\pi ik\xi}{L}} d\xi$$

Uvedimo sada oznaku

$$\frac{k}{L} = y$$

Kada k prima sve cijele (negativne i pozitivne) vrijednosti, y će primati vrijednosti

$$y = \ldots, -\frac{3}{L}, -\frac{2}{L}, -\frac{1}{L}, 0, \frac{1}{L}, \frac{2}{L}, \frac{3}{L}, \ldots$$

Jasno je, da su te vrijednosti tim više nagusto, čim je veći L. Granični prijelaz $L \to \infty$ učinit će dakle, da će y postati varijabla u običnom smislu, t.j. prelaziti će sve realne vrijednosti.

Označimo sada

$$L \cdot C_k = \varphi(y),$$

t.j. svakoj od gore napomenutih vrijednosti od y pripada funkcijska vrijednost $\varphi(y)$, koja iznosi $L\cdot C_k$, ako je $y = \frac{k}{L}$. Ta je dakle funkcija definirana samo za te specijalne vrijednosti od y, ali poslije graničnog prijelaza iz nje postaje funkcija definirana za svaki y. Prema formuli za A_k vrijedi

C_k

$$L\cdot C_k = \varphi(y) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\xi)e^{-2\pi i y\xi}\,d\xi \quad ,$$

gdje smo i u eksponentu pod integralom pisali y mjesto $\frac{k}{L}$.
Uvrstimo li $C_k = \frac{1}{L}\varphi(y)$ u Fourierov red, on dobiva oblik

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{2\pi i yx}\cdot\frac{1}{L} \qquad (y = \frac{k}{L}) .$$

Označimo li $\frac{1}{L} = \Delta y$, to će za $L \to \infty$ Δy ići prema nuli i suma prelazi u integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\, e^{2\pi i yx}dy,$$

dok je istodobno postao

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2\pi i y\xi}\,d\xi .$$

Izraz za $f(x)$ zove se Fourierov integral, a funkciju $\varphi(y)$ možemo nazvati spektrom funkcije $f(x)$, jer kaže, kojom su jakosti zastupani titraji $e^{2\pi i yx}$ za neku frekvenciju y. Vidi se simetrija u odnosu funkcije i njezinoga spektra. Uvrstimo li $\varphi(y)$ u izraz za $f(x)$, možemo pisati

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{2\pi i y(x-\xi)}\,d\xi$$

ili, rastavljajući eksponencijalnu funkciju po Eulerovoj formuli,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\left[2\pi y(x-\xi)\right]d\xi \; +$$

$$+\; i\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\left[2\pi y(x-\xi)\right]d\xi$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin[2\pi(-y)(x-\xi)]\,d\xi =$
$= -\int f(\xi)\sin[2\pi y(x-\xi)]\,d\xi$

napisati

No u drugom članu desno je nutarnji integral liha funkcija od y, jer $\sin[2\pi y(x-\xi)]$ mijenja predznak, ako y mijenja predznak. Taj nutarnji integral je integrand vanjskoga integrala, koji je dakle nula. Prema tome vrijedi

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\left[2\pi y(x-\xi)\right]\cdot d\xi$$

$\int f(\xi)\cos[-2\pi y(x-\xi)]\,d\xi =$
$= \int f(\xi)\cos[2\pi y(x-\xi)]\,d\xi$

Budući, da je nutarnji integral taka funkcija od y, to je za vanjski integral

$$\int_{-\infty}^{0} = \int_{0}^{\infty} \quad \text{, dakle} \quad \int_{-\infty}^{\infty} = 2\int_{0}^{\infty} \quad \text{, tako da je}$$

$$f(x) = 2\int_{0}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\left[2\pi y(x-\xi)\right]d\xi .$$

Rastavimo li cosinus po teoremu adicije, izlazi

$$f(x) = 2\int_0^\infty dy \cos 2\pi yx \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos 2\pi y\xi\, d\xi \;+$$

$$+\; 2\int_0^\infty dy \sin 2\pi yx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin 2\pi y\xi \cdot d\xi$$

ili

$$f(x) = \int_0^\infty F_1(y)\cos 2\pi yx \cdot dy + \int_0^\infty F_2(y)\sin 2\pi yx \cdot dy,$$

gdje je

$$F_1(y) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos 2\pi y\xi \cdot d\xi \quad ,$$

$$F_2(y) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin 2\pi y\xi \cdot d\xi \quad .$$

Ovako se dakle izražava Fourierov integral u realnom obliku, gdje su sada posebno vidljivi neprekinuti spektar cosinusa i neprekinuti spektar sinusa.

Cijeli granični prijelaz, kojim smo došli do Fourierova integrala, nije sasvim jednostavno strogo opravdati. Kao dovoljan uvjet, da se funkcija $f(x)$ može predočiti kao takav Fourierov integral, spominjemo : Funkcija $f(x)$ je po odsječcima derivabilna, a integral $\int |f(x)| \cdot dx$ ima konačnu vrijednost (t.j. funkcija je "apsolutno integrabilna" u intervalu $(-\infty, \infty)$. U točkama diskontinuiteta funkcije $f(x)$, recimo za $x = x_0$, Fourierov integral ima (kao kod Fourierova reda) vrijednost $\frac{1}{2}\left[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\right]$.

Primjer :

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 0 & (x<0) \\ f(x) &= e^{-ax} & (x>0) \end{aligned}\right\} \quad a>0$$

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2\cdot\pi iy\xi}\, . d\xi = \int_0^\infty e^{-a\xi} \cdot e^{-2\pi\cdot iy\xi} \cdot d\xi =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(a+2\cdot\pi\cdot iy)\xi} \cdot d\xi = \frac{1}{-(a+2\cdot\pi\cdot iy)}\left[e^{-(a+2\cdot\pi\cdot iy)\xi}\right]_0^\infty$$

Pretpostavljamo, da je $a > 0$, onda $e^{-a\xi}$ postaje nula za $\xi \to \infty$ dok faktor $e^{-2\cdot\pi\cdot iy\xi}$ ima apsolutnu vrijednost 1 za svaki ξ , tako da izraz u uglastoj zagradi postaje nula za $\xi \to \infty$. Dobijemo dakle

$$\varphi(y) = \frac{1}{a + 2\cdot\pi\cdot iy} = \frac{a}{a^2 + 4\cdot\pi^2 y^2} - i \cdot \frac{2\pi y}{a^2 + 4\pi^2 y^2}$$

Iz formula za $F_1(y)$ i $F_2(y)$ vidi se odmah, da je

$$F_1(y) - i\,F_2(y) = 2\cdot\varphi(y)\,,$$

t.j.

$$F_1(y) = \frac{2a}{a^2 + 4\cdot\pi^2 y^2} \quad ; \quad F_2(y) = \frac{4\cdot\pi\cdot y}{a^2 + 4\cdot\pi^2 y^2}$$

Ovo su dakle spektri za cosinus- i sinus-funkcije, pa vrijedi

$$e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 + 4\cdot\pi^2 y^2} \cos 2\pi yx\,dy + \int_0^\infty \frac{4\cdot\pi\cdot y}{a^2 + 4\,\pi^2 y^2} \sin 2\pi yx\,dy$$

za $x > 0$

dok je za $x < 0$ suma tih integrala jednaka nuli. Nije međutim jednostavno to direktno provjeriti. Vidi se, da je zadana funkcija predočena sumom (integralom) neprekinutog niza sinusa i cosinusa sa svim mogućim frekvencijama y, t.j. funkcija je rastavljena u neprekinuti spektar.

[Potanje vidi Marković I, str. 590. Tamošnje formule (b), (b_1), (b_2) prelaze u naše, ako se stavi $u = 2\cdot\pi\cdot y$, $a(u) = a(2\pi y) = \frac{1}{2\pi} F_1(y)$, $b(u) = b(2\pi y) = \frac{1}{2\pi} F_2(y)$.]

a) Ako je $f(x)$ liha onda je $F_1(y) = 0$, pa je:

$$f(x) = 4\int_0^\infty \sin 2\pi yx \int_0^\infty f(\xi)\sin 2\pi y\xi\,d\xi\,dy.$$

b) Za slučaj da je $f(x)$ taka biti će $F_2(y) = 0$, pa je

$$f(x) = 4\int_0^\infty \cos 2\pi yx \int_0^\infty f(\xi)\cos 2\pi y\xi\,d\xi\,dy.$$

Što može korisno poslužiti kod određivanja spektra neke funkcije. $F_1(y)$ i $F_2(y)$ nazivaju se još kosinusni i sinusni spektar funkcije f, a same vrijednosti nemaju značenje amplitude kosinusne odn. sinusne komponente frekvencije y, nego govore o intenzitetu kojim je zastupljena dotična frekvencija.

III dio

52. Diferencijalne jednadžbe

Diferencijalnom jednadžbom općenito zovemo jednadžbu između neovisnih varijabla, nepoznatih funkcija tih varijabla i derivacija tih funkcija. Mi ćemo se baviti običnim diferencijalnim jednadžbama, t.j. jednadžbama sa samo jednom neovisnom varijablom x i promatrat ćemo jednadžbe, u kojima se pojavljuje samo jedna funkcija y od x i njezine derivacije.

Opći oblik takove obične diferencijalne jednadžbe izgledao bi ovako :

$$P(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

Najviši red derivacija označuje red diferencijalne jednadžbe. Ako je u diferencijalnoj jednadžbi n red najviše derivacije, onda je ta diferencijalna jednadžba n-toga reda.

Riješiti običnu diferencijalnu jednadžbu n-toga reda znači naći funkciju, koja sa svojim derivacijama identično (t.j. za sve vrijednosti neovisne varijable) zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu.

Najjednostavnije su diferencijalne jednadžbe prvoga reda, u kojima se pojavljuje samo derivacija y'. Opći oblik bi glasio

$$P(x, y, y') = 0$$

ili

$$y' = Q(x, y).$$

Specijalni je slučaj te jednadžbe, kada Q ovisi samo o varijabli x, t.j. $y' = F(x)$. S takovom jednadžbom, gdje je y' zavisan samo od x, već smo se sretali prilikom rješavanja integrala. Rekli smo, ako je na pr.

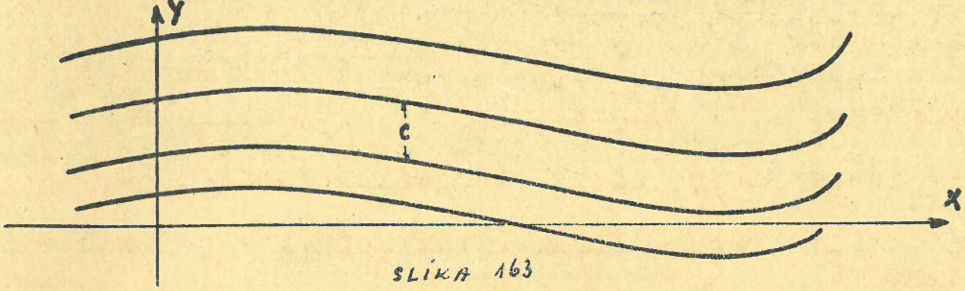
$$y' = ax, \quad \text{da je}$$

$$y = \int ax dx = \frac{a}{2} x^2 + C .$$

gdje je $y = \frac{a}{2} x^2 + C$ rješenje gornje diferencijalne jednadžbe, jer je identički zadovoljava.

Kako vidimo, u rješenju se pojavljuje neka konstanta C te prema tome rješenje ove diferencijalne jednadžbe prvoga reda daje familiju krivulja.

Naime, za svaku vrijednost od C dobijemo po jednu krivulju, koja predstavlja jedno rješenje diferencijalne jednadžbe (jer je ona slika jedne funkcije, koja zadovoljava jednadžbu). Takvo rješenje se zove partikularno rješenje. Odabirući za C različite vrijednosti razabira se, da se time krivulja pomiče paralelno samoj sebi u smjeru osi y (slika 163). Sveukupnost tih partikularnih rješenja određenu funkcijom, koja sadrži po volji odaberivu konstantu, zovemo općim rješenjem diferencijalne jednadžbe. To dakle znači, da je $y = \frac{a}{2} \cdot x^2 + C$ opće rješenje,

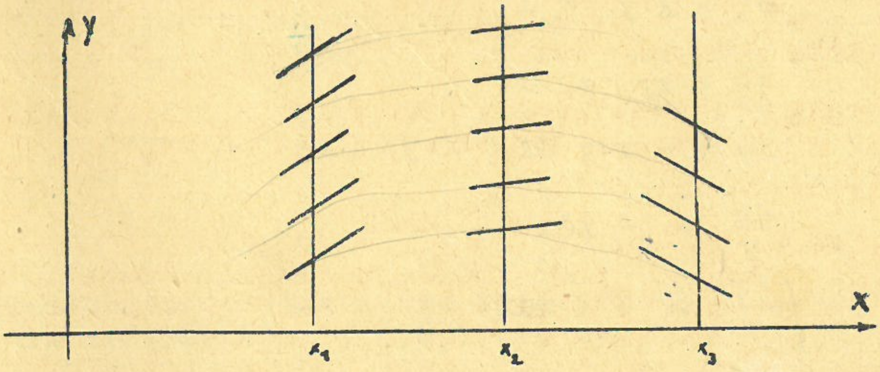


SLIKA 163

dok su, recimo $y = \frac{a}{2} \cdot x^2 + 2$ i $y = \frac{a}{2} \cdot x^2 - 8$ dva partikularna rješenja, gdje je konstanta C dobila specijalne vrijednosti 2 odnosno 8.

Ako je jednadžba općenitijeg oblika $y' = Q(x,y)$, opet će opće rješenje sadržavati po volji odaberivu konstantu, koja se međutim ne će više pojaviti kao aditivni član, nego će biti nekako drukčije sadržana u rješenju. Različito odabrane njezine vrijednosti opet daju funkcije (partikularna rješenja), koje su predočene familijom krivulja. No te krivulje više ne prelaze jedna u drugu paralelnim pomicanjem u smjeru osi y , nego su općenito raznog oblika.

Promotrimo li geometrijsko značenje same diferencijalne jednadžbe $y' = Q(x,y)$, vidimo, da je na temelju te jednadžbe svakoj točki (x,y) pridružen smjer određen derivacijom y'. Označimo li u svakoj točki ravnine dotični smjer kratkim odsječkom pravca, dobijemo polje smjerova. U specijalnom slučaju $y'=F(x)$ će smjerovi točaka na pravcu paralelnom s osi y (dakle za jedan te isti x) biti svi međusobno paralelni, jer odgovaraju istoj vrijednosti od y' (slika 164). Unesu li se u sliku krivulje tako, da su priljubljene tim nacrtanim smjerovima, te će krivulje predočivati rješenja, koja se na taj način mogu približno grafički odrediti. Polazeći od ove ideje može se provesti dokaz egzistencije rješenja, t.j. dokaz, da zaista postoje funkcije, koje zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe. No



SLIKA 164

drugo je pitanje, da li se te funkcije daju izraziti pomoću elementarnih funkcija. To općenito nije moguće, čak nije uvijek moguće rješenje izraziti pomoću integrala takvih funkcija. Običaj je kod diferencijalnih jednadžbi, da se postupak rješavanja zove integriranjem jednadžbe. Integriranje u užem smislu se za razliku zove kvadratura. Ako se dakle rješenje može izraziti pomoću integrala, onda velimo, da se integracija diferencijalne jednadžbe daje svesti na kvadrature. Mi ćemo se baviti najjednostavnijim tipovima diferencijalnih jednadžbi, kod kojih se integracija može svesti na kvadrature i izložiti za to potrebne metode.

53. Separacija varijabla

Imamo li diferencijalnu jednadžbu oblika

$$P(x,y)y' + Q(x,y) = 0,$$

onda treba najprije ispitati, da li je moguće provesti separaciju varijabla. Zato pomnožimo jednadžbu sa dx :

$$P(x,y)\frac{dy}{dx} + Q(x,y) = 0 \qquad /dx$$

$$P(x,y)dy + Q(x,y)dx = 0$$

i pokušajmo je množenjem ili dijeljenjem svesti na oblik

$$P_1(y)dy + Q_1(x)dx = 0,$$

gdje dakle uz dx stoji funkcija samo od x, a uz dy funkcija samo od y. Ako je to moguće, velimo da su se varijable dale separirati. Slijedi dalje, da je :

$$P_1(y)dy = -Q_1(x)dx,$$

a integriranjem dobijemo opće rješenje.

$$\int P_1(y)dy = -\int Q_1(x)dx + C. \qquad (171)$$

Na pr.

$$y' + x\cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$dy = -x\cdot y\cdot dx \qquad /:y$$

$$\frac{dy}{y} = -xdx$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int xdx$$

$$\ln C + \ln y = -\frac{x^2}{2}$$

(Konstanta je označena sa $\ln C$, jer je to za dalji račun zgodno)

$$\ln(C\cdot y) = -\frac{x^2}{2}$$

$$C\cdot y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{C} \quad ;$$

uzmemo li, da je $\frac{1}{C} = C_1$,

$$y = C_1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Kontinuirano ukamaćivanje

Kod eksponencijalnih funkcija u diferencijalnom računu (§8, str.64) upoznali smo se s kontinuiranim ukamaćivanjem.

Rekli smo, da nam formula $A_n^{(\infty)} = A_o e^{\frac{p\cdot n}{100}}$ označuje baš to kontinuirano ukamaćivanje tokom n-godina uz godišnji postotak p. Pokušajmo do tog rezultata doći drugim putem. Uzmimo pri tom druge oznake. Namjesto početne glavnice A_o pišimo y_o, a namjesto glavnice nakon n-godina pišimo y. Namjesto n ćemo pisati t, jer se pitamo, kolika će biti glavnica nakon vremena t. (Vrijeme t bi dakle bilo računano u godinama. Računamo li, recimo u sekundama, morali bi i postotak p zadati za 1 sekundu, a ne godišnje.) Za diferencijal vremena dt (zapravo za mali Δt) povećat će se početna glavnica za dy (zapravo za Δy, koji je za mali Δt vrlo približno jednak dy, tim točnije, čim je Δt manji), koji je za neki određeni postotak p jednak $\frac{y\cdot p}{100}\cdot dt$.

Dakle

$$dy = \frac{y\cdot p}{100}\cdot dt .$$

Provedimo sada separaciju varijabla :

$$\frac{dy}{y} = \frac{p}{100}\cdot dt$$

$$\int\frac{dy}{y} = \frac{p}{100}\int dt + C$$

$$\ln y = \frac{p}{100}\cdot t + C$$

Odredimo ono partikularno rješenje te dif. jednadžbe, koje odgovara zadatku. Za $t = 0$ znamo da je $y = y_o$. Prema tome je

$$\ln y_o = C .$$

Uvrstimo to u rješenje naše dif.jednadžbe :

$$\ln y = \frac{p}{100}\cdot t + \ln y_o$$

$$\ln\frac{y}{y_o} = \frac{p}{100}\cdot t$$

$$\frac{y}{y_o} = e^{\frac{p}{100}\cdot t}$$

$$y = y_o\cdot e^{\frac{p}{100}t}$$

Radioaktivno raspadanje

Imamo li neku količinu radioaktivne tvari, ona će se tokom vremena,uslijed radioaktivnosti, smanjiti. Smanjenje mase ide na račun izbačenih čestica (α-čestica, elektrona, pozitrona i t.d.) kao i na račun energije, koja se javlja prilikom raspadanja. Znamo,da je brzina takvog raspadanja u nekom času upravo proporcionalna preostaloj količini tvari u tom trenutku. Označimo li početnu količinu tvari sa a (ovdje se misli količina tvari od časa kada smo počeli mjeriti), a sa x količinu tvari, koja se raspala nakon nekog vremena t, onda prema gore navedenom pravilu vrijedi, da je

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

gdje nam je $\frac{dx}{dt}$ brzina reakcije [1], k je konstanta proporcionalnosti ili konstanta brzine reakcije.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

$$dx = k(a - x)dt$$

Izvršimo separaciju varijabli.

$$\frac{dx}{a - x} = kdt$$

$$\int\frac{dx}{a-x} = k\int dt + C$$

$$-\ln(a-x) = kt + C$$

Uzmemo li, da je u vremenu $t = 0$ bila i količina raspadnute tvari $x = 0$, dobijemo parikularno rješenje, koje odgovara našem slučaju.

1) Brzina reakcije definirana je količinom raspadnute tvari u jedinici vremena.

Naime za $t = 0$ i $x = 0$ dobijemo

$$- \ln a = C, \quad \text{dakle je}$$

$$- \ln(a - x) = kt - \ln a ,$$

$$- \ln(a - x) + \ln a = kt,$$

$$\ln \frac{a}{a-x} = kt ,$$

$$\frac{a}{a-x} = e^{kt}$$

$$a = a \cdot e^{kt} - x \cdot e^{kt} , \quad \text{odakle je } x$$

$$x\, e^{kt} = a \cdot e^{kt} - a$$

$$x = a(1 - \cancel{a} \cdot e^{-kt}) \tag{172}$$

Time smo dobili količinu raspadnute tvari nakon nekog vremena t. Preostala količina tvari je $a-x$. Ona je iz gornje jednadžbe jednaka

$$a - x = ae^{-kt} . \tag{173}$$

Vrlo često se uzima vrijeme polovičnog raspada, t.j. vrijeme, nakon kojeg se početna količina tvari smanjila na polovicu. To znači vrijeme, kada će biti početna količina jednaka dvostrukoj preostaloj količini, t.j.

$$a = 2(a-x), \quad \text{odakle je}$$

$$\frac{a-x}{a} = \frac{1}{2} .$$

Iz naše jednadžbe dobijemo, da je

$$\frac{a-x}{a} = e^{-kt} \quad , \text{ dakle, pošto je } \frac{a-x}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

$$- \ln 2 = - kt$$

$$\ln 2 = kt .$$

$\ln 2$ možemo izračunati pomoću logaritamskih tablica, jer znamo, da je $\ln 2 = 2{,}303 \cdot \log 2 = 2{,}303 \cdot 0{,}30103 = 0{,}693$ dakle je t ili, pošto je to vrijeme polovičnog raspada, označimo ga sa T,

$$T = \frac{0{,}693}{k} . \tag{174}$$

Iz ovoga slijedi, da je početna količina tvari nakon vremena T pala na polovicu početne vrijednosti. Nakon dvostrukog vremena T raspala se opet polovica ostatka tvari. Dakle nakon 2T raspalo se

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3}{4} \cdot a$$

Nakon 3T smanjila se preostala $\frac{1}{4}a$ na polovinu i ostalo je $\frac{a}{8}$. Iz toga vidimo, da pomoću tog vremena T možemo izračunati i koliko se raspalo. Ovo može na pr. poslužiti, da se približno izračuna starost zemlje.

Bimolekularna reakcija

Kemijske reakcije, gdje dvije različite molekule reagiraju i daju neke nove spojeve, na pr.

$$A + B = C + D$$

zovemo bimolekularnim reakcijama. Znamo, da je brzina reakcije proporcionalna produktu molarnih koncentracija tih tvari. Označimo li sa <u>a</u> količinu u molovima tvari A, a sa <u>b</u> količinu u molovima tvari B , biti će brzina reakcije nakon nekog vremena t, kada je ušlo u reakciju količina x svake tvari (u molovima), jednaka.

$$v = \frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

Ovdje su dakle (a-x) i (b-x) molarne koncentracije tvari A i B nakon vremena t, dakle

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\int dt + C$$

Izračunajmo najprije $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int\left[\frac{M}{(a-x)} + \frac{N}{(b-x)}\right] \cdot dx$$

Odatle M i N izračunamo po poznatoj metodi i dobijemo da je $M = \frac{1}{b-a}$ a $N = \frac{1}{a-b}$

$$I = \int \frac{\frac{1}{b-a}dx}{a-x} + \int \frac{\frac{1}{a-b}dx}{b-x} =$$

$$= -\frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{b-x} =$$

$$= \frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{x-b} =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\ln(x-a) - \ln(x-b)\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b} .$$

Uvrstimo to u rješenje diferencijalne jednadžbe.

$$\frac{1}{a-b}\cdot\ln\frac{x-a}{x-b} = kt + C$$

Uzmemo li, da je u trenutku $t = 0$ reakcija tek počela dakle $x = 0$, dobijemo vrijednost za C

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} = C .$$

Partikularno rješenje jednadžbe, koje odgovara zadatku, glasi dakle

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b} - \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} = kt$$

$$\frac{1}{a-b}\left(\ln\frac{x-a}{x-b} + \ln\frac{b}{a}\right) = kt ,$$

$$\frac{1}{a-b}\cdot\ln\frac{b(a-x)}{a(x-b)} = kt$$

$$\frac{1}{a-b}\cdot\ln\frac{b(a-x)}{a(x-b)} = kt$$

Lako je iz ovoga izračunati x, ako je to poželjno.

Specijalan je slučaj, ako su koncentracije tvari A i B jednake t.j. $a = b$. Dobijemo onda

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

$$\frac{dx}{(a-x)^2} = kdt$$

$$\int\frac{dx}{(a-x)^2} = k\int dt + C ,$$

$$\frac{1}{a-x} = k\cdot t + C ,$$

za $t = 0$ i $x = 0$

$$\frac{1}{a} = C ;$$

dakle partikularno rješenje glasi

$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = kt ,$$

$$\frac{x}{a(a-x)} = kt .$$

Egzaktne diferencijalne jednadžbe

Imamo li diferencijalnu jednadžbu oblika :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 ,$$

gdje je lijeva strana diferencijalne jednadžbe totalni (ili "egzaktni") diferencijal neke funkcije $f(x,y)$, onda se ta diferencijalna jednadžba zove egzaktna. Očito je, da je u tom slučaju $P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ a $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, jer je totalni diferencijal funkcije $z = f(x,y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

Kod nas je $dz = 0$ dakle $z = C$. Nađemo li funkciju $f(x,y)$ bit će dakle $f(x,y) = C$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe. Kod diskusije o višim parcijalnim derivacijama (str.161 i 164) dokazali smo, da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} ,$$

ako postoji derivacija prvog i drugog stupnja i ako su one neprekinute.

Dakle, ako se želimo uvjeriti, da je naša diferencijalna jednadžba egzaktna, onda mora biti zadovoljen uvjet, da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \quad \text{t. j.} \quad \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} .$$

Pokušajmo sada naći opći oblik rješenja takove diferencijalne jednadžbe.

Rekli smo, da je $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$. Integriramo li to, dobijemo

$$f(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \varphi(y) .$$

Ovdje smo namjesto konstante integracije C dodali $\varphi(y)$, jer funkcija f općenito ovisi o varijabli y. Kod integracije po x moramo naime dodati "konstantu" t.j. veličinu, koja je neovisna od x , t.j. od varijable, po kojoj integriramo.

No taj dodani član može ovisiti o ostalim varijablama, koje sadržava funkcija f, u našem slučaju od y, jer bi onda taj član otpao, kad bismo derivirali parcijalno po x.

Deriviramo li naš izraz $f(x,y) = \int_a^x P(x,y)dx + \varphi(y)$ parcijalno po y, dobijemo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Znamo da je $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$, a namjesto $\frac{\partial P}{\partial y}$, možemo pisati $\frac{\partial Q}{\partial x}$, kao smo već vidjeli. Dakle

$$Q(x,y) = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Integriramo li $\int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx$, dobijemo, da je

$$\int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x,y) - Q(a,y) .$$

Uvrstimo li to u gornju jednadžbu, dobijemo

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(a,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \text{ odakle je}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(a,y) \text{ i napokon } \varphi(y) = \int_b^y Q(a,y)dy ,$$

gdje je aditivna konstanta uzeta u obzir time, što je donja granica integrala po volji odaberiva konstanta b.

Opći oblik rješenja naše diferencijalne jednadžbe glasi prema tome

$$f(x,y) = \int_a^x P(x,y)dx + \int_b^y Q(a,y)dy = C . \qquad (175)$$

Za pojednostavnjenje cijelog tog izraza može se obično uzeti, da su donje granice obadvije jednake nuli $a = b = 0$, pa dobijemo

$$C = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy \qquad (176)$$

Time se ne smanjuje općenitost rješenja, jer je po volji odaberiva konstanta, koju mora sadržavati opće rješenje, već na desnoj strani jednadžbe. Može se pokazati, da bi mijenjanje konstanata a i b samo promijenilo konstantu C na desnoj strani jednadžbe, koja je i onako po volji odaberiva. Treba međutim uočiti, da nije uvijek moguće konstante a i b staviti jednako nula, i to onda ne, kada bi integral time postao neizmjeran. U tom se slučaju konstante odaberu drukčije, ali što prikladnije, na pr. jednako 1 ili slično.

Na pr.

$$2x + 3y + (3x + 2y)\cdot y' = 0$$

$$2x + 3y + (3x + 2y)\cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$$

Označimo li sa $P = 2x + 3y$ a sa $Q = 3x + 2y$, možemo ispitati, da li je ta jednadžba egzaktna.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3, \quad a \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3,$$

dakle je zadovoljen uvjet da je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, te je prema tome jednadžba egzaktna. Rješenje bi glasilo ovako :

$$C = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy ,$$

u našem slučaju $P(x,y) = 2x + 3y$, a $Q(0,y) = 2y$, jer moramo za x uvrstiti da je nula, što vidimo iz simbola $Q(0,y)$; dakle rješenje glasi :

$$C = \int_0^x (2x + 3y)dx + \int_0^y 2ydy =$$

$$= 2\int_0^x xdx + 3y\int_0^x dx + 2\int_0^y ydy .$$

Vidimo, da smo y u prvom integralu mogli metnuti pred integral, što je i jasno, jer integriramo po x , pa se kod toga y drži konstantan.

$$C = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x + 3y\left[x\right]_0^x + 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3yx + 2\cdot\frac{y^2}{2} = x^2 + 3xy + y^2$$

Rješenje dakle glasi

$$x^2 + 3xy + y^2 = C .$$

Uzmemo li jednadžbu

$$\frac{1}{x^2y}dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

vidimo, da je egzaktna, jer je $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x^2y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{xy^2}$, no ovdje ne možemo staviti $a = 0$, $b = 0$, jer bi integrali postali neizmjerni. Stavimo dakle na pr. $a = 1$, $b = 1$:

$$C = \int_1^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(1,y)dy = \int_1^x \frac{dx}{x^2 y} + \int_1^y \frac{dy}{1\cdot y^2} =$$

$$= \frac{1}{y}\int_1^x \frac{dx}{x^2} + \int_1^y \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} + 1$$

ili

$$-\frac{1}{xy} = C - 1 .$$

Ako označimo $C - 1 = -C_1$, dobijemo

$$\frac{1}{xy} = C_1$$

ili su $C_2 = \frac{1}{C_1}$

$$xy = C_2$$

t.j. familiju istostranih hiperbola.

Entropija

Za idealni plin vrijedi jednadžba

$$pv = RT ,$$

gdje je p tlak, v volumen jedinice težine plina, (jednog kilograma), i T apsolutna temperatura. U teoriji plinova se pokazuje, da je nutarnja energija idealnog plina proporcionalna s apsolutnom temperaturom, dakle

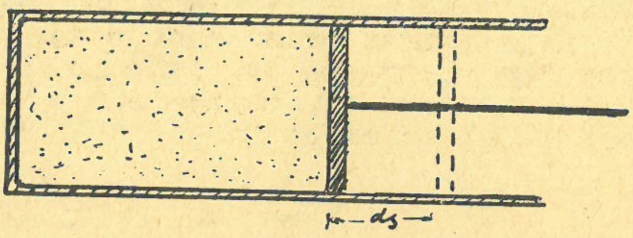
$$u = cT .$$

Promjenimo li uz konstantni volumen tu temperaturu dovodeći neku količinu topline dq, onda je isto tolika promjena nutarnje energije, jer vanjska radnja nije obavljena. Bit će dakle

$$dq = du = cdT .^{*)}$$

No to znači, da je c specifična toplina uz konstantni volumen, koju označujemo sa c_v. Zamislimo sada, da smo i volumen plina promijenili za dv. Provedimo te dvije promjene uzastopce: najprije povisimo temperaturu uz konstantni volumen za dT. Dovedena toplina je $c_v dT$. Zatim povisimo volumen za dv (pustimo plin za toliko ekspandirati). Pri tom se obavlja radnja, koju možemo odrediti, ako plin zamislimo u nekon valjku (slika 165). Ako čep ima presjek P, onda je sila, koja djeluje na nj Pp (p = tlak), a put kod pomicanja je ds, dakle radnja

*) Nutarnju energiju i toplinu zamišljamo mjerenu u mehaničkim jedinicama.



SLIKA 165

Ppds. No Pds je povećanje volumena dv, dakle je radnja pdv. Ako želimo, da temperatura (dakle i nutarnja energija) našeg idealnog plina kod tog povećanja volumena ostane ista, moramo toliko topline dovesti, koliko smo izgubili mehaničke radnje (inače bi se plin kod ekspandiranja ohladio). Ukupno dovedena toplina dq za povišenje temperature (dakle unutarnje energije) i volumena (obavljena mehanička radnja) je dakle

$$dq = c_v dT + p dv \qquad *)$$

ili zbog $p = \frac{RT}{v}$

$$dq = c_v dT + \frac{RT}{v} dv \ .$$

T i v možemo smatrati varijablama, kojim je stanje plina određeno. (Treća varijabla p se dobije iz "jednadžbe stanja", koja za idealni plin upravo glasi $pv = RT$.)

Desna strana ovog diferencijalnog izraza nije egzaktni diferencijal, jer je

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{v}\right) = \frac{R}{v} \ ,$$

t.j. uvjet egzaktnosti nije zadovoljen. Zbog toga ne postoji nikakva funkcija q od T i v, koja bi bila određena stanjem plina, t.j. varijablama T i v. Da je tako, bila bi određena i razlika q_2-q_1 između dva različita stanja, t.j. bilo bi određeno, koliko se topline mora dovesti kod prijelaza od jednog stanja u drugo, bez obzira na koji način je taj prijelaz uslijedio. Na pr. može se najprije povisiti temperatura kod konstantnog volumena v_1 od T_1 na T_2, zatim kod konstantne temperature T_2 povisiti volumen od v_1 na v_2; ili: najprije povisiti volumen kod temperature T_1, a onda povisiti temperaturu.

*) Zapravo je plin kod zagrijavanja za dT povisio tlak na p+dp. Osim toga taj tlak nešto opada kod povisivanja volumena za dv. No razlika poslije množenja sa dv ima red veličine dpdv, t.j. iščezava spram pdv, kada diferencijale zamišljamo vrlo malenim (ili točnije, kada diferencije ΔT i Δv idu prema nuli).

Račun daje, da je ukupna dovedena toplina različita, a različita je i obavljena radnja, tako da je ukupno dovedena energija $u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$ ista. Da nađemo neku funkciju od T i v, koja zaista ovisi samo o tim varijablama, dakle o stanju plina bez obzira na to, kako je do tog stanja došlo, moramo postići, da desna strana postane egzaktni diferencijal. To postizavamo dijeljenjem sa T:

$$\frac{dq}{T} = \frac{c_v}{T}\,dT + \frac{R}{v}\,dv\,.$$

Sad je

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_v}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{R}{v}\right) = 0$$

i uvjet egzaktnosti je zadovoljen. Desna strana, pa i lijeva predstavljaju dakle diferencijal neke funkcije $s(T,v)$, koja ovisi samo o stanju plina (a ne o njegovoj prošlosti) i zove se entropija. Dakle

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{c_v}{T}\,dT + \frac{R}{v}\,dv$$

Integracija daje:

$$s = \int\frac{dq}{T} = \int_1^T\frac{c_v}{T}\,dT + \int_1^v\frac{R}{v}dv + C$$

$$= c_v\ln T + R\ln v + C \quad {}^{*)}.$$

Aditivna konstanta C ostaje neodređena, t.j. entropija je određena do jedne aditivne konstante. (Ta se konstanta određuje tek na temelju trećeg temeljnog stavka termodinamike.)

Na temelju t.zv. drugog temeljnog stavka termodinamike (u Planckovoj formulaciji: nemoguće je konstruirati stroj, koji radi periodički, i ništa drugo ne učini, nego da se ohladi neko spremište topline i diže jedan uteg) može se dokazati, da entropija zatvorenog fizičkog sustava (t.j. na koji ne utječe ostali svijet) može samo rasti ili ostati konstantna, ali ne može padati. (Postoji još i "prvi temeljni stavak", naime stavak o održanju energije, koji za naše svrhe glasi $dq = du + pdv$ i već smo ga upotrebili.) Dublje značenje entropije se razabira u teoriji plinova (na temelju statističke mehanike), gdje se pokazuje, da je entropija veličina, koja je proporcionalna s logaritmom vjerojatnosti stanja dotične tvari. (Na primjer vjerojatnije je, da su molekule plina podjednako razdijeljene u posudi nego da su slučajno sve skupljene u lijevoj polovici. U točnu definiciju vjerojatnosti stanja ovdje ne ulazimo.)

---

*) Konstantu C je trebalo dodati, jer smo donje granice integrala specijalno odabrali, pa oni više ne sadrže po volji odaberivu aditivnu konstantu.

55 **Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda**

Opći oblik takove jednadžbe glasi

$$y' + f(x)\cdot y = \varphi(x)$$

Linearna se zove zato, što se y' i y pojavljuju u prvom stupnju. Ako je $\varphi(x) = 0$, onda se jednadžba zove homogena ili skraćena i rješava se na poznati način separacijom varijabla.

$$y' + f(x)\cdot y = 0$$

$$y' = -f(x)y\ ,$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx\ ,$$

$$\ln y = -\int f(x)dx + \ln C$$

$$\ln y - \ln C = -\int f(x)dx$$

$$\ln\frac{y}{C} = -\int f(x)dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int f(x)dx}$$

$$y = C\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

Da dobijemo rješenje "inhomogene" ili "neskraćene" jednadžbe, t.j. jednadžbe, u kojoj je $\varphi(x) \neq 0$, pokušat ćemo dobiveno rješenje homogene jednadžbe prilagoditi time, da mjesto konstante C stavimo prikladno odabranu funkciju od x, koja neka se zove $C(x)$. Ako je dakle

$$y = C(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}\ ,$$

onda je

$$y' = C'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} - C(x)\cdot f(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

Uvrstimo to u (neskraćenu) diferencijalnu jednadžbu

$$C'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} - C(x)\cdot f(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} + f(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} = \varphi(x)$$

$$C'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} = \varphi(x)$$

$$C'(x) = \varphi(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$$ odakle je $C(x)$

$$C(x) = \int \varphi(x)\, e^{\int f(x)dx} \cdot dx + C_1 .$$

Prema tome smo dobili funkciju $C(x)$, koju treba uvrstiti u opće rješenje homogene diferencijale jednadžbe, da se dobije opće rješenje inhomogene jednadžbe :

$$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx + C_1 \cdot e^{-\int f(x)dx} \qquad (177)$$

Ovaj se postupak rješavanja zove "varijacija konstante".

Tim postupkom se mogu riješiti i t.zv. Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe, koje imaju opći oblik

$$y' + f(x) \cdot y = \varphi(x) \cdot y^n$$

gdje je n bilo kakva konstanta. I ovdje možemo u rješenju homogene jednadžbe

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

smatrati C funkcijom od x, pa time to rješenje prilagoditi prvotnoj jednadžbi. To vodi analogno kao gore do diferencijalne jednadžbe

$$C'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} = \varphi(x) \left[C(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \right]^n ,$$

u kojoj se varijable daju separirati. Time se dolazi i do rješenja Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe.

ili: $u = \dfrac{1}{y^{n-1}}$

$u' = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$

što vodi na l.d.j.

Na pr.

$$xy' - 2y = x^2 - 3 ,$$

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2 - 3}{x}$$

Riješimo prvo homogeno jednadžbu $y' - \frac{2y}{x} = 0$:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 ,$$

$$dy = \frac{2y}{x} \cdot dx ,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx ,$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} + \ln C ,$$

$$\ln y = 2 \cdot \ln x + \ln C,$$

$\frac{1}{(1-n)} u' + f(x)u = \varphi(x)$

$\cancel{u' +} \cancel{\frac{f(x)}{1-n}} \cancel{u} = \cancel{\frac{\varphi(x)}{1-n}}$

$u' + (1-n)f(x)u = (1-n)\varphi(x)$

$$\ln y - \ln C = 2\cdot\ln x \ ,$$

$$\ln\frac{y}{C} = 2\cdot\ln x = \ln x^2 \ ,$$

$$\frac{y}{C} = x^2 \ ,$$

$$y = C\cdot x^2 \ .$$

Izvršimo sada varijaciju konstante, t.j. smatramo C nepoznatom funkcijom od x . Dobijemo

$$y' = C'\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot C \ .$$

Uvrstimo li to u inhomogenu jednadžbu, dobijemo

$$C'\cdot x^2 + 2x\cdot C - \frac{2C\cdot x^2}{x} = \frac{x^2-3}{x} \ ,$$

$$C'\, x^2 = \frac{x^2-3}{x^3} \ .$$ Odatle je C

$$C = \int\frac{x^2-3}{x^3}\,dx = \int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{dx}{x^3} = \ln x + \frac{3}{2\cdot x^2} + C_1$$

Uvrstimo to sada u rješenje homogene jednadžbe :

$$y = C\cdot x^2 = (\ln x + \frac{3}{2x^2} + C_1)\cdot x^2 = x^2\cdot\ln x + \frac{3}{2} + C_1x^2 \ .$$

56 Homogena diferencijalna jednadžba s obzirom na x i y

Neka funkcija od više varijabla, na pr. $f(x,y)$, zove se homogena n-toga stupnja, ako je

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$, gdje je λ bilo kakav broj. n se zove stupanj homogenosti.

Tako su na primjer funkcije

$x^3 + y^3$ i xy^2 homogene 3. stupnja, jer možemo pisati, da je

$$(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 = \lambda^3(x^3 + y^3) \quad \text{i}$$

$$(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3(xy^2)$$

Imamo li diferencijalne jednadžbe oblika

$f(x,y)\, y' + g(x,y) = 0$, gdje su funkcije f i g istog stepena homogenosti, dakle i cijela lijeva strana je homogena s obzirom na x i y, onda takvu jednadžbu rješavamo supstitucijom $y = x \cdot z$; $y' = z + xz'$, gdje je z neka nova nepoznata funkcija od x.

Uvrstimo li to u jednadžbu, dobijemo .

$$f(x,xz)(z + xz') + g(x,xz) = 0$$

pošto su funkcije bile homogene to možemo izlučiti x^n, gdje je n opet stupanj homogenosti :

$$x^n f(1,z)(z + xz') + x^n g(1,z) = 0$$

$$f(1,z)(z + xz') + g(1,z) = 0$$

$$f(1,z)z + f(1,z) \cdot x \cdot z' + g(1,z) = 0$$

$$\left[f(1,z)z + g(1,z)\right] \cdot dx + f(1,z)x \cdot dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{f(1,z)\,dz}{f(1,z)z + g(1,z)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{f(1,z)dz}{f(1,z)z + g(1,z)} + C \qquad (178)$$

odakle integriranjem možemo naći relaciju između z i x, u koju konačno opet uvrstimo $z = \frac{y}{x}$.

Na pr.

$$xy^2 \cdot y' = x^3 + y^3 , \qquad y = x \cdot z$$

$$y' = z + xz'$$

$$x \cdot x^2 \cdot z^2(z + xz') = x^3 + x^3z^3 ,$$

$$x^3z^3 + x^4z^2z' = x^3 + x^3z^3 ,$$

$$x^4z^2 \cdot z' = x^3 ,$$

$$xz^2z' = 1 ,$$

$$z^2z' = \frac{1}{x}$$

$$\int z^2 dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{z^3}{3} = \ln x + \ln C ,$$

$$z^3 = 3 \cdot \ln(x \cdot C) ,$$

$$z = \sqrt[3]{3 \cdot \ln(x \cdot C)}$$

Uvedemo li taj rezultat u supstituciju, dobijemo

$$y = x \cdot \sqrt[3]{3\ln(x\,C)}$$

56. Diferencijalne jednadžbe 2.reda bez veličina x i y'

Opći oblik takove jednadžbe je :

$$y'' = f(y)$$

Takova jednadžba rješava se ovako : y'' možemo pisati u obliku $\frac{dy'}{dx}$, pa imamo, da je

$$\frac{dy'}{dx} = f(y) .$$

Pomnožimo li lijevu i desnu stranu sa dy, dobijemo

$$\frac{dy'}{dx} \cdot dy = f(y)dy ,$$

a pošto je $\frac{dy}{dx} = y'$ dobijemo, da je

$$y'dy' = f(y)dy .$$

Ova transformacija znači, da sada y smatramo neovisnom, a y' ovisnom varijablom.

Integriramo li to, dobijemo, da je

$$\int y'dy' = \int f(y)dy + C_1$$

$$\frac{y'^2}{2} = \int f(y),dy + C_1$$

odatle je y' ,

$$y' = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$$

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2\int f(y)dy}} = dx$$

Integriranjem dobijemo opće rješenje takove diferencijalne jednadžbe :

$$\int \frac{dy}{\pm\sqrt{2\int f(y)dy \; + C_1}} = \int dx = x + C_2 . \qquad (179)$$

Na pr.

Slobodni pad

Po Newtonovom zakonu znamo, da je ubrzanje (akceleracija) **a** zemljine sile privlačenja obrnuto proporcionalno kvadratu udaljenosti od središta zemlje. Znamo da je

$a = \frac{d^2s}{dt^2}$ ili, ako udaljenosti od središta označimo sa y,

$$a = y'' = -\frac{C}{y^2}$$

Negativni predznak je potreban, jer bi pozitivna vrijednost od y'' značila ubrzanje prema gore, t.j. u smislu povećanja od y, dok ubrzanje sile teže djeluje prema središtu zemlje.

Ispustimo li tijelo u udaljenosti y_o od središta, ono će poslije nekog vremena t doći u udaljenost y od središta. Da nađemo ovisnost prevaljenog puta $y_o - y$ i vremena t rješavamo diferencijalnu jednadžbu.

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{C}{y^2},$$

$$\frac{dy'}{dt}\,dy = -\frac{C}{y^2}\,dy,$$

$$y'dy' = -\frac{C}{y^2}\,dy$$

odakle integriranjem dobijemo

$$C_1 + \int y'dy' = -C\int\frac{dy}{y^2},$$

$$C_1 + \frac{y'^2}{2} = \frac{C}{y}$$

Odatle je y'

$$y' = \pm\sqrt{2\left(\frac{C}{y} - C_1\right)}.$$

Time je jednadžba postala 1.reda.

Kako su dva predznaka moguća, moramo ustanoviti, koji odgovara zadatku. Pošto tijelo pada, uzet ćemo negativnu vrijednost, jer se pri padu y smanjuje, dakle je $y' < 0$.

$$y' = -\sqrt{2\left(\frac{C}{y} - C_1\right)}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2\left(\frac{C}{y} - C_1\right)}$$

$$\int\frac{dy}{-\sqrt{2\cdot\left(\frac{C}{y} - C_1\right)}} = \int dt + C_2$$

$$\int \frac{dy}{-\sqrt{2(\frac{C}{y} - C_1)}} = t + C_2$$

Izračunat ćemo sada vrijednost integrala $-\int \frac{dy}{\sqrt{2(\frac{C}{y} - C_1)}}$ supstitucijom $\sqrt{2(\frac{C}{y} - C_1)} = u$;

$$\frac{2C}{y} - 2C_1 = u^2 , \quad dy = -2C \frac{2u \cdot du}{(u^2 + 2C_1)^2}$$

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{2(\frac{C}{y} - C_1)}} = 2 \cdot C \cdot \int \frac{\frac{2u \cdot du}{(u^2 + 2C_1)^2}}{u} =$$

$$= 4 \cdot C \int \frac{du}{(u^2 + 2C_1)^2} = \frac{C}{C_1^2} \cdot \int \frac{du}{\left[\left(\frac{u}{\sqrt{2C_1}}\right)^2 + 1\right]^2}$$

daljnjom supstitucijom $\frac{u}{\sqrt{2C_1}} = r$; $du = \sqrt{2C_1}dr$ dobijemo

$$\frac{C}{C_1^2} \int \frac{du}{\left[\left(\frac{u}{\sqrt{2C_1}}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{C \cdot \sqrt{2C_1}}{C_1^2} \int \frac{dr}{(r^2 + 1)^2} = I$$

Prije izloženim metodama (§ 41, strana 215) dobijemo za taj integral I.

$$I = \frac{C \cdot \sqrt{2C_1}}{C_1^2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} r + \frac{r}{2(1+r^2)} \right]$$

Na temelju izvršenih supstitucija vrijedi

$$r = \frac{u}{\sqrt{2C_1}} = \frac{\sqrt{2(\frac{C}{y} - C_1)}}{\sqrt{2 \cdot C_1}} = \sqrt{\frac{\frac{C}{y} - C_1}{C_1}}$$

Prije nego što to uvrstimo u rješenje izračunat ćemo konstante C i C_1 .

U jednadžbi $y'' = -\frac{C}{y^2}$ stavit ćemo $y = R$, t.j. uzet ćemo onaj čas , kada se tijelo nalazi na površini zemlje. Znamo, da onda y'' ima vrijednost $-g$ ($g = 9{,}81\ m/sek^2$), jer je g ubrzanje sile teže na površini zemlje.

Prema tome je $\frac{C}{R^2} = g$ ili $C = g \cdot R^2$

Iz jednadžbe $\frac{y'^2}{2} = \frac{C}{y} - C_1$ izračunat ćemo C_1 tako, da uzmemo onaj čas, kada je tijelo još na miru, t.j. u času, kada su ga ispustili. U tom je momentu brzina $y' = 0$ a y ima svoju početnu vrijednost y_0. Iz toga izlazi

$$0 = \frac{C}{y_0} - C_1 \qquad \text{i}$$

$$C_1 = \frac{C}{y_0} = \frac{gR^2}{y_0},$$

Sada možemo izračunati vrijednost za r

$$r = \sqrt{\frac{\frac{C}{y} - C_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{\frac{gR^2}{y} - \frac{gR^2}{y_0}}{\frac{gR^2}{y_0}}} = \sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} .$$

Koeficijent pred zagradom možemo također izraziti pomoću naših relacija, pa dobijemo, da je

$$\frac{C\cdot\sqrt{2C_1}}{C_1^2} = \frac{gR^2\sqrt{2\frac{gR^2}{y_0}}}{\frac{g^2R^4}{y_0^2}} = \frac{\sqrt{2g}\cdot y_0^2}{g\sqrt{y_0}\cdot R} = \frac{2\cdot y_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\cdot R} .$$

Uvrstimo li to sve u naš integral, dobijemo

$$I = \frac{2\cdot y_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\cdot R}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} + \frac{\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)}}{2\left[1 + y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)\right]}\right\}$$

$$= \frac{y_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\cdot R}\,\mathrm{arctg}\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} + \frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\cdot R}\cdot y\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} .$$

Ovo rješenje integrala mora biti jednako $t+C_2$

$$\frac{y_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\,R}\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} + \frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}R}\cdot y\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} = t+C_2,$$

ako je $t = 0$, onda je $y = y_0$, dakle $C_2 = 0$,

$$\frac{y_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\cdot R}\,\mathrm{arctg}\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)} + \frac{y_0}{\sqrt{2g}\cdot R}\,y\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}} = t .$$

Time je vrijeme t izraženo u ovisnosti od y. Izvedemo li sada aproksimaciju, da je y blizu y_0 i da y_0 nije mnogo veći od polumjera R, dobijemo, da je

$$\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}}=\sqrt{\frac{y_0-y}{y_0\cdot y}}=\frac{1}{\sqrt{y_0\cdot y}}\sqrt{y_0-y}\doteq\frac{1}{R}\sqrt{y_0-y}\quad \text{jer je}$$

$$y\doteq y_0\doteq R\,.\quad \mathrm{arctg}\sqrt{y_0\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right)}=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{y_0(y_0-y)}{y_0\cdot y}}\doteq$$

$$\doteq \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{y_0-y}{R}}\doteq\sqrt{\frac{y_0-y}{R}}$$ jer je argument ar-kustangensa jako malen, što se vidi iz toga, što je y_0-y (ne preveliki) prevaljeni put a R je (golemi) polumjer zemlje. Uvrstimo li ta približenja u rješenje, dobijemo :

$$\frac{y_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{2g}\cdot R}\sqrt{\frac{y_0-y}{R}}+\frac{y_0}{\sqrt{2g}\cdot R}\cdot\frac{y\sqrt{y_0-y}}{R}=t$$

ili, ako je $y\doteq y_0\doteq R$,

$$\frac{\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{2g}}+\frac{\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{2g}}=t$$

$$2\,\frac{\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{2g}}=t$$

$$\sqrt{y_0-y}=\sqrt{2g}\cdot\frac{t}{2}$$

$$y_0-y=2g\cdot\frac{t^2}{4}$$

$y_0-y=\frac{g}{2}t^2$, gdje nam y_0-y označuje prevaljeni put. Time smo dobili poznatu formulu za slobodni pad.

57. Linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima.

a.) Homogena ili skraćena .

Opći oblik takve jednadžbe je

$$y''+a_1\cdot y'+a_2y=0$$

Kod rješenja linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog stepena vidjeli smo, da je opće rješenje bilo u vezi sa $e^{-\int f(x)dx}$ dakle nekom funkcijom $e^{\phi(x)}$ odnosno ako je koeficijenat f(x) konstanta, s funkcijom e^{rx} , gdje je r neka konstanta.

Pokušajmo i sada naći rješenje oblika $y = e^{rx}$, gdje je r neka konstanta.

Uvrštenjem u našu jednadžbu, dobijemo

$$r^2 \cdot e^{rx} + a_1 \cdot r \cdot e^{rx} + a_2 e^{rx} = 0 \, ,$$

jer je $y' = r \cdot e^{rx}$ a $y'' = r^2 e^{rx}$. Podijelimo li cijelu jednadžbu sa e^{rx}, dobijemo

$$r^2 + a_1 \cdot r + a_2 = 0 \, . \qquad (180)$$

Ova se jednadžba zove karakteristična jednadžba zadane homogene diferencijalne jednadžbe i vidimo, da ima dva rješenja r_1 i r_2. Te dvije vrijednosti smije dakle r imati, ako hoćemo, da e^{rx} bude rješenje naše diferencijalne jednadžbe. Dobili smo tako dva partikularna rješenja

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{i} \quad y_2 = e^{r_2 x} \, .$$

Lako je vidjeti, da takvo rješenje smijemo pomnožiti bilo kakvom konstantom, pa da još uvijek zadovoljava diferencijalnu jednadžbu, a isto tako možemo takva dva rješenja zbrojiti("superponirati"), pa opet dobijemo rješenja. (Ova mogućnost superponiranja partikularnih rješenja uvjetovana je linearnošću diferencijalne jednadžbe i vrijedi i onda, kada koeficijenti nisu konstantni, nego su neke funkcije od x . Samo što onda nije lako naći ta partikularna rješenja, jer više nemaju jednostavni oblik e^{rx}.) Možemo dakle staviti

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 \, e^{r_2 x} \, , \qquad (181)$$

pa smo dobili rješenje, koje sadrži dvije po volji odaberive konstante. To je ujedno i opće rješenje te jednadžbe (što ovdje ne dokazujemo).

Kada karakteristična jednadžba ima dvostruki korijen, dakle $r_1 = r_2$, ona nam daje samo jedno partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe, koje nam još ne daje njeno opće rješenje.

Uvjet, da rješenje karakteristične jednadžbe

$$r_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

bude dvostruko glasi

$$a_1^2 - 4 \cdot a_2 = 0 \, ,$$

pa je dakle onda

$$r_1 = -\frac{a_1}{2}$$

dvostruko rješenje. Vrijedi dakle

$$2 \cdot r_1 + a_1 = 0, \qquad r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 = 0 .$$

Ovo prvo, jer je $r_1 = -\frac{a_1}{2}$, a drugo, jer je r_1 rješenje karakteristične jednadžbe.

Pokušajmo sada opće rješenje diferencijalne jednadžbe postaviti u obliku

$$y = u \, e^{r_1 x}$$

gdje je u nepoznata funkcija od x. Ovaj oblik se može svakako postići, jer ako je opće rješenje $y = \phi(x)$, onda treba samo uzeti $u = \phi(x) \, e^{-r_1 x}$, da se dođe na gornji postavak.

Derivacije izraza $y = u \, e^{r_1 x}$ glase

$$y' = u' \cdot e^{r_1 x} + r_1 u \cdot e^{r_1 x}$$

$$y'' = u'' \cdot e^{r_1 x} + u' \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} + r_1 u' \cdot e^{r_1 x} + r_1^2 \cdot u \cdot e^{r_1 x}$$

Uvrstimo li to u našu diferencijalnu jednadžbu, dobijemo

$$u'' \cdot e^{r_1 x} + u' r \cdot e^{r_1 x} + r_1 u' \cdot e^{r_1 x} + r_1^2 u \cdot e^{r_1 x} + a_1 u' \cdot e^{r_1 x} +$$

$$+ a_1 r_1 u \cdot e^{r_1 x} + a_2 u \cdot e^{r_1 x} = 0 ,$$

$$e^{r_1 x} \left[u'' + u'(2 \cdot r_1 + a_1) + u(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) \right] = 0 .$$

Vidimo, da su koeficijenti uz u' i u jednaki nuli, pa ostane, da je

$$u'' = 0$$

odakle je

$$u' = C_1 ,$$

$$u = C_1 x + C_2 .$$

Time je dokazano, da u slučaju dvostrukog korijena opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$y = (C_1 x + C_2) \, e^{r_1 x} = C_1 x \cdot e^{r_1 x} + C_2 e^{r_1 x} . \tag{182}$$

Na pr.

1.) $$y'' + 4y' \mp 7y = 0$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$r^2 + 4\cdot r - 7 = 0 ,$$

odakle su r_1 i r_2

$$r_{1/2} = -2 \pm \sqrt{11}$$

Rješenje te jednadžbe dakle glasi

$$y = C_1\, e^{(-2 + \sqrt{11})x} + C_2\, e^{(-2 - \sqrt{11})x} .$$

2.) $$y'' + 2y = 0$$

$$r^2 + 2 = 0$$

$$r_{1/2} = \pm \sqrt{2}\cdot i$$

$$y = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}\cdot i\cdot x} + C_2\cdot e^{-\sqrt{2}\cdot i\cdot x} .$$

Vidimo, da smo dobili kompleksno rješenje, što dalje možemo razviti po Eulerovoj formuli, koja glasi

$$e^{ikx} = \cos kx + i\cdot \sin kx ,$$

$$e^{-ikx} = \cos kx - i\cdot \sin kx .$$

Bit će dakle

$$y = C_1(\cos \sqrt{2}x + i\cdot \sin \sqrt{2}x) + C_2(\cos \sqrt{2}x - i\cdot \sin \sqrt{2}x)$$

$$y = \cos \sqrt{2}x\,(C_1 + C_2) + \sin \sqrt{2}x\,(C_1 i - C_2 i) .$$

Stavimo li $C_1 + C_2 = M$, a $C_2\, i - C_1 i = N$, dobijemo nove integracione konstante i rješenje dobiva oblik

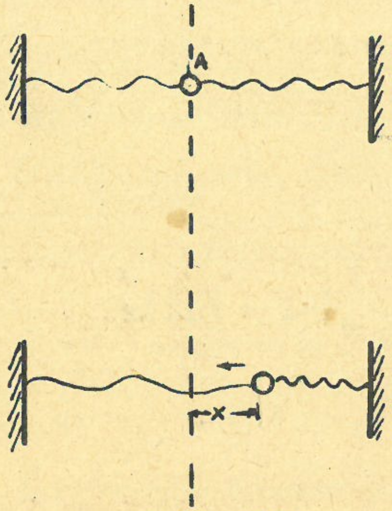
$$y = M\cdot \cos \sqrt{2}x + N\cdot \sin \sqrt{2}x .$$

Titranje

Pomaknemo li iz stanja ravnoteže neko tijelo mase m (slika 166), koja je pričvršćena između dvije elastične opruge, nastaje titranje.

Sila koja vuče natrag ka točki A proporcionalna je daljini mase m od A.

$$P = -kx$$



SLIKA 166

Uzeli smo negativni predznak, jer sila elastičnog pera vuče masu lijevo, ako je masa pomaknuta na desno i obrnuto. P dakle ima obrnuti predznak od x . Znamo da je P = m·a . U našem slučaju

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ili kako}$$

kraće pišemo $\ddot{x}$; dakle

$$-kx = m\cdot\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Postavimo karakterističnu jednadžbu

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$r_{1/2} = \pm\, i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Rješenje dakle glasi

$$x = C_1e^{\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot i t} + C_2e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot i\cdot t}$$

Po Euler-ovoj formuli slijedi dalje :

$$x = C_1\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + i\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right] + C_2\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - i\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right] =$$

$$= \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\cdot(C_1 + C_2) + \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\,(C_1i - C_2i) =$$

$$= B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + D\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad = B\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$$

Naći ćemo sada partikularno rješenje koje odgovara našim zahtjevima, specijalizirajući vrijednost konstanata B i D .

Uzmemo li moment, kada se je masa nalazila u točki A kao početni, onda je u tom momentu t = 0, a x je također nula $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, te je prema tome

$$B = 0$$

Dobijemo dakle jednostavnije rješenje

$$x = D\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

U momentu $t = 0$ dali smo tijelu neku brzinu v_0. Znamo, da je $\frac{dx}{dt} = v$ ili kratko $\dot{x} = v$,

$$\dot{x} = D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$$

kako je $t = 0$, to je $\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = 1$ i $D = \dot{x}\sqrt{\frac{m}{k}}$. $\dot{x}$ je ovdje početna brzina v_0; dakle $D = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$, a rješenje glasi

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \ .$$

$v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$ je amplituda A tog titraja, a $\sqrt{\frac{k}{m}}$ je broj titraja u vremenu 2π. Taj se broj zove kružna frekvencija, koju označujemo sa ω, a jednako je $2\pi f$, gdje je f broj titraja u jedinici vremena.

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega = 2\pi\cdot f$$

$$\boxed{x = A\cdot\sin\omega t}$$

Njihalo

Iz točke O visi na tankoj niti duljine l, kojoj zanemarujemo težinu, tijelo mase m. Pomakne li se tijelo iz položaja ravnoteže OO', teži da se vrati u položaj ravnoteže. Kada se tijelo nalazi u točki A zatvara sa OO' neki kut φ koji je funkcija od t. Sila, koja nastoji, da se tijelo vrati u položaj ravnoteže je $mg\sin\varphi$ (slika 167.) i stoji tangencijalno na luk O'A. Akceleracija je jednaka $l\cdot\ddot{\varphi}$ ($\ddot{\varphi}$ je kutna akceleracija), a sila $P = m\cdot l\ddot{\varphi}$. Prema tome je

$$m\cdot l\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

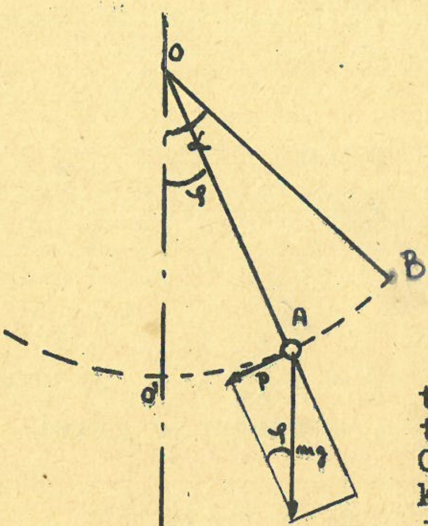
Uzeli smo negativni predznak, jer sila djeluje u smislu smanjivanja kuta φ. Riješit ćemo sada tu diferencijalnu jednadžbu

$$l\cdot\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

t mjerimo od časa prolaza kroz točku O' tijela m, pa je put jednak $l\cdot\varphi$, a odatle $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$



SLIKA 167

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot d\varphi = -\frac{g}{l}\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$\int\dot{\varphi}\cdot d\dot{\varphi} = -\frac{g}{l}\int\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l}\cdot\cos\varphi + C$$

Konstantu C možemo izračunati ako promatramo trenutak, kada smo tijelo upravo ispustili iz točke B*. Onda je brzina bila nula, $\dot{\varphi} = 0$, a kut $\varphi = \alpha$ je imao svoju maksimalnu vrijednost α, $\varphi = \alpha$. Iz zadnje jednadžbe je onda

$$C = -\frac{g}{l}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l}\cdot\cos\varphi - \frac{g}{l}\cdot\cos\alpha$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\cdot\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cdot\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = dt$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cdot\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = \int dt$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} = \sqrt{2\cdot\frac{g}{l}}\,(t + C_1)$$

Promatrajmo dio gibanja u kojem $\varphi(t)$ raste, tj. ne prolazi položaj OO' i ide u desno

~~Ako t praste prasti će i t......~~

Korijen je pozitivan jer promatramo dio gibanja u kojem $\varphi(t)$ raste dakle $\varphi'(t)>0$

Za $t=0$ i $\varphi=0$, u tom slučaju je $C_1=0$.

Integral $\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$ je eliptični integral i ne da se izraziti pomoću elementarnih funkcija, ali se može izraziti kao red potencija. Najprije ćemo ga dovesti na prikladan oblik.

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1 + 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2})}}$$

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

nepotpuni eliptički integral 1. vrste u Legendreovom obliku
k - modul
φ amplituda.

Dakle je

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t + C_1)$$

Izvršimo li sada u našem integralu supstituciju

$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin u$; $\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \sin\frac{\alpha}{2}\cos u\,du$; $\cos\frac{\varphi}{2} =$

$= \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}$ $\quad d\varphi = \dfrac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos u\,du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}}$

$$\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos u$$

Uvrstimo li te vrijednosti u integral dobijemo

$$\int \frac{2\cdot du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t + C_1)$$

Označimo li lijevu stranu sa $f(u)$, to jednadžba glasi $f(u) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t + C_1)$. Recimo, da je u momentu t_1 $u = u_1$, a u momentu t_2 $u = u_2$, t.j. $f(u_2) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t_2 + C_1)$ i $f(u_1) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t_1 + C)$. Odbijemo li te jednadžbe, dobijemo $f(u_2) - f(u_1) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t_2 - t_1)$ ili, po pravilu za izračunavanje određenih integrala,

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\cancel{2}\cdot du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}} = \cancel{2}\sqrt{\frac{g}{l}}(t_2 - t_1) .$$

Uzmimo napose za t_1 i t_2 momente, kada je tijelo u položaju ravnoteže, odnosno kad je postiglo maksimalnu elongaciju (ili "amplitudu") α . To vrijeme je četvrt trajanja punog njihaja, dakle $t_2 - t_1 = \frac{T}{4}$. U momentu t_1 je $\varphi = 0$, dakle $u = 0$, a u momentu t_2 je $\varphi = \alpha$, dakle $u = \frac{\pi}{2}$, t.j.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{T}{4} \quad .$$

Razvijmo sada $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}$ $\left(k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ u red potencija; i to ovako :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}\cdot du$$

Prema binomnom razvoju vrijedi $(1 - k^2\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}\cdot k^2\sin^2 u + \binom{-\frac{1}{2}}{2} k^4\sin^4 u - \binom{-\frac{1}{2}}{3} k^6\sin^6 u + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot k^2\sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4\sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} k^6\sin^6 u + \ldots\ldots$$

a integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\cdot k^2\sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4\sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} k^6\sin^6 u + \ldots\right)\cdot du =$$

$$= \left[u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\cdot du + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\cdot du + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} k^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u\,du + \ldots$$

Vidimo da se pojavljuju integrali $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} u\,du$ koje smo već prije odredili:

$$I_k = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdot\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Uvrštenje u naš integral daje

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot k^2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} k^6\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right]$$

Vrijednosti od $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}$ za pojedine k možemo naći u specijalnim tablicama. Obično se $\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$ označuje sa $F(k,\varphi)$

Prema tome riješenje glasi :

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{T}{4}$$

Mjesto $F(k, \frac{\pi}{2})$ piše se i $K(k)$ dakle, jer je $k = \sin\frac{\alpha}{2}$
$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\alpha}{2})$

ili, u obliku reda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256}\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\ldots\right).$$

Za male amplitude α možemo se zadovoljiti sa prva dva člana reda i uz to mjesto $\sin\frac{\alpha}{2}$ pisati $\frac{\alpha}{2}$, pa dobijemo približnu formulu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Vidi se, da za male amplitude α vrijeme njihanja vrlo malo ovisi o amplitudi α (jer je u zagradi član $\frac{\alpha^2}{16}$ malen spram jedinice), t.j. njihaji su u tom slučaju približno izohroni (jednakog trajanja za razne amplitude). Zanemari li se još i taj član $\frac{\alpha^2}{16}$, dobije se poznata formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

koja se izravno dobije time, da se već u diferencijalnoj jednadžbi $\sin\varphi$ nadomjesti sa φ, što će u slučaju malih kutova φ (dakle i male amplitude) biti dopustivo približenje. Dobije se tako

$$l\ddot{\varphi} = -g\varphi.$$

Ova je jednadžba linearna s konstantnim koeficijentima, pa se spretnije rješava kao takva, umjesto metodom, koju smo gore upotrebili.

Karakteristična jednadžba glasi

$$lr^2 = -g$$

$$r = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

dakle $\varphi = A\cdot e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + B\cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} = M\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + N\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$.

Uzmemo li za $t = 0$ $\varphi = 0$, t.j. vrijeme brojimo od momenta, kada njihalo prođe kroz položaj ravnoteže, izlazi $M = 0$, dakle

$$\varphi = N \cdot \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\ .$$

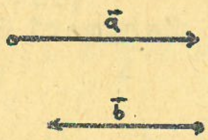
Vidimo, da je φ kao funkcija od t izražen sinusom dakle periodičnom funkcijom. Za $\sin ax$ znamo, da ima periodu $\frac{2\pi}{a}$, jer argument ax sinusa naraste za 2π, kada x naraste za $\frac{2\pi}{a}$, a funkcija sinus ima period 2π.

Period T od $\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ je dakle $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, t.j. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ je trajanje punog njihaja.

Titranje u mediju s otporom proporcionalnim s brzinom

(prigušeno titranje)

Kod titranja razmatrali smo, kako se vlada čestica s masom m, ako smo je pomaknuli iz točke ravnoteže. Prilikom toga razmatranja nismo uzeli u obzir otpor uzduha ili kakvog drugog sredstva. Sada ćemo razmatrati utjecaj toga otpora, koji će djelovati u protivnom smjeru brzine. Na pr. ako je smjer brzine, koju pokazuje naš vektor $\vec{a}$ od točke A u desno, onda je smjer otpora u suprotnom smjeru, koji pokazuje vektor $\vec{b}$.



SLIKA 168

Sada možemo postaviti diferencijalnu jednadžbu.

Sila, kojom pero djeluje na česticu, proporcionalna je s elongacijom x i obrnutog predznaka, dakle $-kx$. Sila, kojom medij djeluje na česticu, neka je proporcionalna s brzinom (to je za male brzine redovito tako), a predznak joj je protivan od predznaka brzine, t.j. ta sila je jednaka $-a\dot{x}$, gdje je a neka konstanta. Ukupno dakle $-kx - a\dot{x}$. Ta je sila jednaka produktu mase m i ubrzanja $\ddot{x}$, t.j. diferencijalna jednadžba glasi

$$m\ddot{x} = -kx - a\dot{x}$$

Drugčije pisano

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = 0$$

ili

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\cdot\dot{x} + \frac{k}{m}\cdot x = 0$$

Kako vidimo, dobili smo homogenu diferencijalnu jednadžbu, koju ćemo riješiti na nama poznati način.

Karakteristično jednadžba glasi :

$$r^2 + \frac{a}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

$$r_{1,2} = - \frac{a}{2\cdot m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Kod problema nepriguženog titranja pojavio se razlomak $\sqrt{\frac{k}{m}}$ i vidjeli smo, da on znači kružnu frekvenciju ω_o; prema tome je $\frac{k}{m} = \omega_o^2$, gdje je i sada ω_o kružna frekvenciju nepriguženog titraja . $\frac{a}{2\cdot m}$ označit ćemo sa δ . Prema tome naša rješenja izgledaju ovako

$$r_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}$$

Diskutirat ćemo, rješenje za razne vrijednosti od δ^2 i ω_o^2:

a) $\delta^2 < \omega_o^2$ $\quad r_{1/2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\,\omega_1$

ako smo izraz $\omega_o^2 - \delta^2$ označili sa ω_1^2.

b) $\delta^2 > \omega_o^2$ $\quad r_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} = -\delta \pm \omega$

ako smo $\delta^2 - \omega_o^2$ nazvali ω^2.

c) $\delta^2 = \omega_o^2$ $\quad r_{1/2} = -\delta$.

a) Promatrat ćemo prvo ~~prvi~~ slučaj, gdje je $\delta^2 < \omega_o^2$, t.j. kružna frekvencija nepriguženog titranja veća je od δ^2, koji zavisi od a . U tom slučaju rješenje naše diferencijalne jednadžbe glasi

$$x = A\cdot e^{(-\delta + i\cdot\omega_1)t} + B\cdot e^{(-\delta - i\cdot\omega_1)t}$$

$$= A\cdot e^{-\delta t} e^{i\cdot\omega_1 t} + B\cdot e^{-\delta t} e^{-i\cdot\omega_1 t}$$

$$= e^{-\delta t}(A\cdot e^{i\omega_1 t} + B\cdot e^{-i\cdot\omega_1 t})$$

Pomoću Euler-ovih formula dobijemo ovaj oblik rješenja :

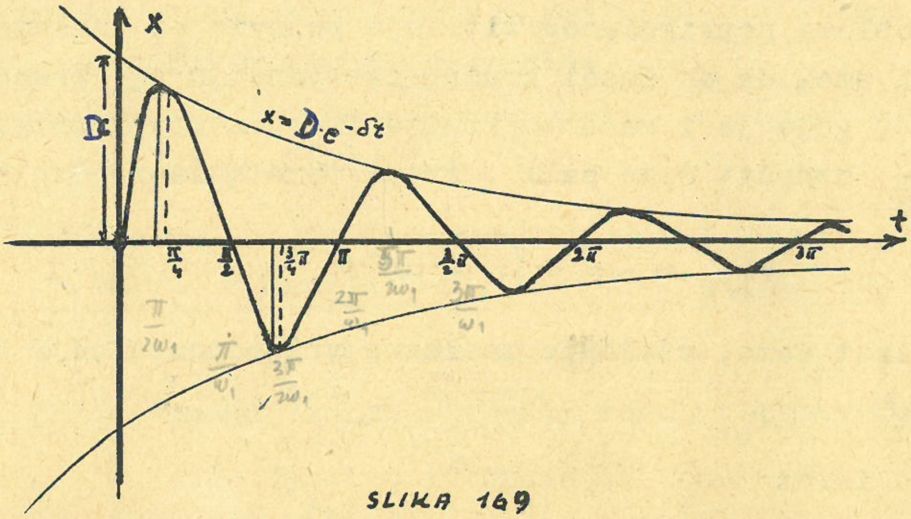
$$x = e^{-\delta t}(A\cdot\cos\omega_1 t + Ai\cdot\sin\omega_1 t + B\cdot\cos\omega_1 t - Bi\cdot\sin\omega_1 t)$$

$$= e^{-\delta t}(C\cdot\cos\omega_1 t + D\cdot\sin\omega_1 t)$$

Kao prikladno partikularno rješenje uzet ćemo ono za koje je u trenutku $t = 0$ i $x = 0$, pa dobijemo

$$x = D\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin\omega_1 t$$

Vidimo, da će to biti titranje, samo što amplituda neće biti konstantna, nego neka funkcija vremena u našem slučaju funkcija $e^{-\delta t}$. Grafički možemo predočiti ovo prigušeno titranje na ovaj način. Rekli smo, da nam $D \cdot e^{-\delta t}$ znači amplitudu, a $\sin \omega_1 t$ je periodična funkcija, gdje nam ω_1 znači broj titraja u vremenu $2 \cdot \pi$. Uzet ćemo na pr., da je $\omega_1 = 2$. Onda nam slika 169 predstavlja graf.



SLIKA 169

Ako pogledamo sliku vidimo, da maximum naše funkcije u svojim ekstremima ne dira krivulju amplitude, nego je pomaknuta nešto u lijevo spram dotičnih dirališta.

Sama dirališta su na onim mjestima, gdje je sinus jednak 1 ili -1, t.j. odgovaraju ekstremima same sinusfunkcije. Dokazat ćemo, da su razlike apscisa pravih ekstrema iste kao i razlike apscisa tih dirališta. Apscise dirališta su dakako $\frac{\pi}{2\omega_1}$, $\frac{3\pi}{2\omega_1}$, $\frac{5\pi}{2\omega_1}$, ..., jer za te apscise sama sinus-funkcija $\sin \omega_1 t$ ima svoje ekstreme. Razlika apscisa susjednih ~~ekstrema~~ dirališta je dakle $\frac{\pi}{\omega_1}$.

Odredimo sada prave ekstreme funkcije $x = D \cdot e^{-\delta t} \sin \omega_1 t$.

$$\dot{x} = -D\delta e^{-\delta t} \sin \omega_1 t + D \cdot e^{-\delta t} \cdot \omega_1 \cos \omega_1 t = 0$$

$$-\delta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t = 0$$

$$\operatorname{tg} \omega_1 t = \frac{\omega_1}{\delta}$$

Ovo je transcendentna jednadžba, iz koje se vrijednosti od t mogu odrediti postupkom aproksimacije. Ako je na pr. t_0 najmanja vrijednost, koja zadovoljava jednadžbu, zadovoljavat će zbog periodičnosti tangensa ($x = \operatorname{tg} t$ ima period π, $x = \operatorname{tg} \omega_1 t$ ima period $\frac{\pi}{\omega_1}$) i vrijednosti $t_0 + \frac{\pi}{\omega_1}$, $t_0 + \frac{2\pi}{\omega_1}$, $t_0 + \frac{3\pi}{\omega_1}$, ... tu jednadžbu. Razlika apscisa susjednih ekstrema opet je $\frac{\pi}{\omega_1}$.

Same apsolutne ekstremne vrijednosti funkcije u tim točkama (dakle bez obzira na predznak) bit će po redu

$D \cdot e^{-\delta t_0}\left|\sin \omega_1 t_0\right|$, $D\, e^{-\delta(t_0+\frac{\pi}{\omega_1})}\left|\sin \omega_1 (t_0 + \frac{\pi}{\omega_1})\right|$,

$D \cdot e^{-\delta(t_0+\frac{2\pi}{\omega_1})}\left|\sin \omega_1 (t_0+ \frac{2\pi}{\omega_1})\right|$, ...

a budući da je

$$\sin \omega_1 t_0 = -\sin(\omega_1 t_0 + \pi) = -\sin \omega_1 (t_0+\frac{\pi}{\omega_1}) =$$

$$= +\sin \omega_1 (t_0+\frac{2\pi}{\omega_1}) = -\sin \omega_1 (t_0+\frac{3\pi}{\omega_1}) = \ \ldots\ ,$$

bit će dakle apsolutne vrijednosti svih tih sinusa iste. Načinimo dakle omjer dvaju uzastopnih ekstrema, recimo prvog i drugoga.

$$\frac{D \cdot e^{-\delta t_0}\left|\sin \omega_1 t_0\right|}{D \cdot e^{-\delta(t_0+\frac{\pi}{\omega_1})}\left|\sin \omega_1 (t_0+\frac{\pi}{\omega_1})\right|} = \frac{e^{-\delta t_0}}{e^{-\delta(t_0+\frac{\pi}{\omega_1})}} = e^{\delta \cdot \frac{\pi}{\omega_1}}$$

Uzmemo li napose omjer dvaju uzastopnih maksima (između kojih je jedan minimum), dobijemo kao omjer $k = e^{\delta \frac{2\pi}{\omega_1}}$. Ovaj omjer ćemo označiti sa k i zovemo ga konstantom prigušenja. Sam eksponent $\ln k = \delta \frac{2\pi}{\omega_1} = \vartheta$ zovemo logaritmičkim dekrementom. Maksimalne elongacije amplitude obično se daju dobro mjeriti (na pr. kod titranja kazaljke t.zv. balističkog galvanometra, ili kod njihanja jezičca na vagi i t.d.), pa se iz njih može lako odrediti omjer k i iz njega $\ln k = \delta \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \vartheta$. Budući da ω_1 dobijemo brojanjem titraja u sta- -novitom vremenu, može se odrediti i konstanta δ .

U slučaju b) $\delta^2 > \omega_0^2$ govorimo o aperiodičkom titranju. Ovdje je rješenje

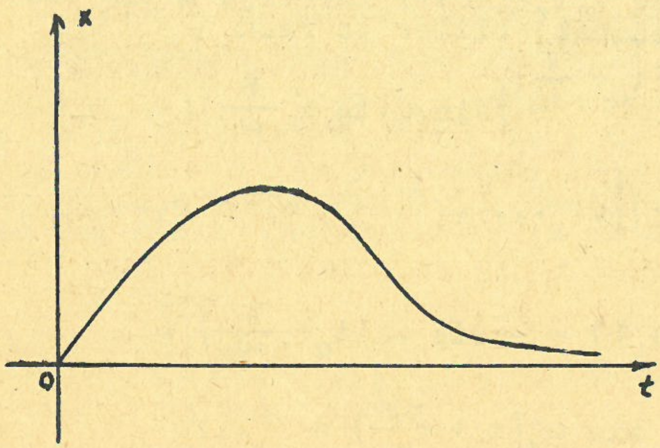
$$x = A\, e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t} + B \cdot e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}$$

što uz uvjet, da je za $t = 0$ i $x = 0$, daje $A + B = 0$, dakle

$$x = A(e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t} - e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}) =$$

$$= 2Ae^{-\delta t} \cdot \mathrm{sh}\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\, t\ .$$

Ovdje uopće nema "titranja", nego se masa polako vraća u položaj ravnoteže. U slučaju c) $\delta = \omega_0$ izlazi zbog dvostrukog korijena karakteristične jednadžbe



SLIKA 170

$$x = (At + B)e^{-\delta t}$$

ili iz $x = 0$ za $t = 0$

$$x = At\,e^{-\delta t}$$

Oblik krivulje je sličan kao kod aperiodičnog titranja. Ovo je dakle granični slučaj aperiodičnog titranja.

59. Linearne diferencijalne jednadžbe višega reda s konstantnim koeficijentima

Jednadžba

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n y = 0$$

zove se homogena ili skraćena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima. Da nađemo partikularno rješenje, pokušamo uvrstiti $y = e^{rx}$. Dobijemo

$$r^n \cdot e^{rx} + a_1 r^{n-1} \cdot e^{rx} + \ldots + a_n e^{rx} = 0$$

ili

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0 \qquad (183)$$

Ovo se zove karakteristična jednadžba. Ako ta jednadžba ima n različitih korijena, dobijemo n partikularnih rješenja $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$, ..., $e^{r_n x}$. Zbog linearnosti jednadžbe možemo ta rješenja superponirati pomnoživši ih prethodno po volji odaberivim konstantama, pa tako dobijemo opće rješenje

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots\ldots + C_n e^{r_n x} \qquad (184)$$

Vidimo, da to rješenje sadržava n konstanta, kako je to uvijek kod dif. jedn. n-toga reda. Ako su koji od korijena kompleksni, treba dotične eksponencijalne funkcije izraziti pomoću trigonometrijskih funkcija. Na pr. za $r = a + bi$ bit će

$$e^{rx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}\, e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx).$$

Ima li karakteristična jednadžba višestrukih korijena, ne dolazimo na taj način do općeg rješenja, jer je premalo međusobno neovisnih partikularnih rješenja (manje od n). No možemo tada naći još daljih rješenja. Ako je, recimo, korijen r_k dvostruk , bit će ne samo $e^{r_k x}$ nego i $x \cdot e^{r_k x}$ rješenje, tako da od toga korijena ulazi u opće rješenje izraz $(C_k + D_k x)e^{r_k x}$. Ako je korijen trostruk, treba staviti $(C_k + D_k x + E_k x^2)e^{r_k x}$ u opće rješenje i t.d. Općenito s-strukom korijenu karakteristične jednadžbe odgovara izraz $(C_k + D_k x + E_k x^2 + \ldots + N_k x^{s-1})e^{r_k x}$ u općem rješenju.

Na pr.

$$y^{(6)} - 3y^{(5)} + 6y''' - 3y'' - 3y' + 2y = 0 .$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$r^6 - 3r^5 + 6r^3 - 3r^2 - 3r + 2 = 0$$

kao mogući racionalni korijeni dolaze u obzir mjere od 2 (koeficijent od r^0), dakle +1, -1, +2, -2. Lako se vidi, da +1, -1 i +2 zadovoljavaju jednadžbu, t.j. izlaze korijeni

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 2 \; ,$$

a jednadžbu možemo podijeliti sa $(r-1)(r+1)(r-2) = r^3 - 2r^2 - r + 2$. Dioba daje $r^3 - r^2 - r + 1$. Preostaje dakle riješiti jednadžbu

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$$

Mogući racionalni korijeni su +1 i -1 i vidi se, da obadva zadovoljavaju jednadžbu, dakle

$$r_4 = 1, \quad r_5 = -1.$$

Podijelimo li sa $(r-1)(r+1) = r^2 - 1$, izlazi $r-1$, t.j. ostaje

$$r - 1 = 0$$

ili

$$r_6 = 1 \; .$$

Vidimo, da je $r_1 = r_4 = r_6 = 1$, $r_2 = r_5 = -1$, $r_3 = 2$. Imamo dakle trostruki korijen 1, dvostruki korijen -1 i jednostruki korijen 2. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi prema tome

$$y = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2)e^x + (B_1 + B_2 x)e^{-x} + C \cdot e^{2x}$$

Imali li na desnoj strani jednadžbe neku funkciju *od x,*

dakle

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

govorimo o inhomogenoj ili neskraćenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima, I ovdje se može, kao kod jednadžbi 1. reda, nadomjestiti konstante u općem rješenju skraćene jednadžbe takvim funkcijama, da rješenje zadovoljava neskraćenu jednadžbu. Ta se metoda opet zove metoda varijacije konstanata, ali je kod jednadžbi višega reda nešto kompliciranija, pa je ovdje ne izlažemo. Druga je mogućnost, da se nađe neko partikularno rješenje neskraćene jednadžbe, pa ga se pribroji općem rješenju skraćene i tako dobije opće rješenje neskraćene jednadžbe. Da je to ispravno, može se uvidjeti ovako. Neka je y_h neko rješenje homogene jednadžbe, t.j. vrijedi

$$y_h^{(n)} + a_1 y_h^{(n-1)} + \dots + a_n y_h = 0$$

i neka je y_i neko rješenje inhomogene jednadžbe, t.j. vrijedi

$$y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \dots + a_n y_i = f(x)$$

Onda je njihov zbroj $y_h + y_i$ rješenje inhomogene jednadžbe. Uvrstimo li naime taj zbroj u inhomogenu diferencijalnu jednadžbu, izlazi na lijevoj strani

$$(y_h + y_i)^{(n)} + a_1 (y_h + y_i)^{(n-1)} + \dots + a_n (y_h + y_i) =$$

$$= \underbrace{y_h^{(n)} + a_1 y_h^{(n-1)} + \dots + a_1 y_h}_{0} + \underbrace{y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \dots + a_1 y_i}_{f(x)}$$

Vidi se, da je vrijednost lijeve strane $f(x)$, da je dakle $y_h + y_i$ zaista rješenje inhomogene jednadžbe.

Uzmimo dakle sada opće rješenje y_{oh} homogene jednadžbe i pribrojimo mu jedno partikularno rješenje y_{pi} inhomogene jednadžbe. Zbroj $y_{oh} + y_{pi}$ zadovoljavat će prema gornjem inhomogenu jednadžbu. Ako je time zaista dobiveno opće rješenje inhomogene jednadžbe, kako smo to ustvrdili, onda mora biti moguće shodnim odabiranjem konstanata u $y_{oh} + y_{pi}$ dobiti bilo koje partikularno rješenje inhomogene jednadžbe. Neka je $\overline{y_{pi}}$ bilo koje takvo partikularno rješenje, koje se razlikuje od upotrebljenog rješenja y_{pi}. Vrijedi dakle

$$\overline{y_{pi}}^{(n)} + a_1 \overline{y_{pi}}^{(n-1)} + \dots + a_n \overline{y_{pi}} = f(x) .$$

Uvrstimo sada u lijevu stranu naše diferencijalne jednadžbe razliku $\overline{y_{pi}} - y_{pi}$, t.j. razliku naših dvaju partikularnih rješenja inhomogene jednadžbe. Izlazi

$$(\bar{y}_{pi} - y_{pi})^{(n)} + a_1(\bar{y}_{pi} - y_{pi})^{(n-1)} + \ldots + a_n(\bar{y}_{pi} - y_{pi}) =$$

$$= \underbrace{\bar{y}_{pi}^{(n)} + a_1\bar{y}_{pi}^{(n-1)} + \ldots + a_n\bar{y}_{pi}}_{f(x)} - \underbrace{(y_{pi}^{(n)} + a_1 y_{pi}^{(n-1)} + \ldots + a_n y_{pi})}_{f(x)} = 0.$$

Izraz je dakle jednak nuli, a to znači, da je ta razlika neko partikularno rješenje y_{ph} <u>homogene</u> jednadžbe, t.j.

$$\bar{y}_{pi} - y_{pi} = y_{ph}$$

ili

$$\bar{y}_{pi} = y_{ph} + y_{pi} \tag{185}$$

Po volji odabrano partikularno rješenje $\bar{y}_{pi}$ inhomogene jednadžbe može se dakle prikazati kao zbroj našeg prvotnog upotrebljenog partikularnog rješenja y_{pi} inhomogene jednadžbe i nekog shodno izabranog partikularnog rješenja y_{ph} homogene jednadžbe. No y_{ph} se može dobiti iz y_{oh} shodnim odabiranjem konstanta, t.j. i $\bar{y}_{pi} = y_{ph} + y_{pi}$ se dobije iz $y_{oh} + y_{pi}$ shodnim odabiranjem konstanata. $y_{oh} + y_{pi}$ je dakle zaista opće rješenje inhomogene jednadžbe, jer se bilo koje partikularno rješenje iz njega dobije specijalizacijom konstanata.

Budući da opće rješenje homogene jednadžbe već znamo naći, treba sada pokazati, kako se može naći jedno partikularno rješenje inhomogene jednadžbe. Za to dajemo pravilo za slučaj, kada je funkcija f(x) osobito jednostavna. Formulirat ćemo to pravilo najprije sasvim općenito, a zatim ga objasniti na jednostavnijim slučajevima.

* Neka je dakle f(x) oblika

$$f(x) = (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m)e^{rx} \tag{186}$$

gdje je barem $A_0 \neq 0$, m je ma koji pozitivan broj ili nula, a r je s-struki korijen karakteristične jednadžbe (slučaj $s = 0$ znači, da r <u>nije</u> korijen te jednadžbe): onda se partikularno rješenje može postaviti u obliku

$$y_{pi}(x) = x^s(c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m)e^{rx} \tag{187}$$

Uvrštenjem u diferencijalnu jednadžbu i izjednačenjem koeficijenata jednako visokih potencija od x lijevo i desno dobije se sustav linearnih jednadžbi, iz kojih se mogu izračunati nepoznate konstante $c_0, c_1, \ldots, c_m$. <u>Ako je f(x) zbroj od više izraza, dakle na pr.</u>

$y_{oh} + $

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) ,$$

gdje su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ izrazi poput gornjih, ali s različitim eksponencijalnim funkcijama e^{r_1x} i e^{r_2x} pomnoženim s nekim polinomima varijable x (koje mogu, ali ne moraju biti različitoga stupnja), onda se najprije traži rješenje y_{pi1} kao da u jednadžbi na desnoj strani samo $f_1(x)$, zatim rješenje y_{pi2}, kao da je desno samo $f_2(x)$. Konačno se zbroji $y_{pi1} + y_{pi2}$ i time je dobiveno traženo partikularno rješenje funkcije $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Ako se mjesto e^{rx} pojavljuje $\sin x$ ili $\cos x$ u funkciji $f(x)$, taj se slučaj može svesti na gornji tako, da se $\sin x$ i $\cos x$ izraze pomoću eksponencijalnih funkcija. Ipak dajemo i izravno pravilo za taj slučaj.

Ako je dakle $f(x)$ oblika

$$f(x) = (A_0x^m + \ldots + A_m)\cos\rho x + (B_0x^m + \ldots + B_m)\sin\rho x ,$$

gdje su $i\rho$ i $-i\rho$ s-struki korijeni karakteristične jednadžbe (odnosno za $s = 0$ nisu korijeni te jednadžbe), i ako je barem jedna od konstanata A_0, B_0 različita od nule, onda možemo staviti

$$y_{pi}(x) = x^s(c_0x^m + \ldots + c_m)\cos\rho x + x^s(d_0x^m + \ldots + d_m)\sin\rho x .$$

$i\rho$ i $-i\rho$ kao konjugirano kompleksne vrijednosti istodobno su s-struki korijeni karakteristične jednadžbe, jer pretpostavljamo, da su koeficijenti te jednadžbe realni. Izraz za y_{pi} ne pojednostavnjuje se, ako su u funkciji $f(x)$ samo članovi sa sinusom ili samo članovi sa kozinusom. Ako je $f(x)$ zbroj od više izraza kao gore (sa različitim ρ), opet se za svaki posebno odredi pripadno rješenje i ta se rješenja zbroje. Koeficijenti $c_0, \ldots c_m$, $d_0, \ldots, d_m$ dobiju se dakako opet uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu i izjednačivanjem jednako visokih potencija od x na obim stranama jednadžbe. U obrazloženje ovih pravila ne ulazimo.

Primjer:

1) $$y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$$

Rješenje homogene jednadžbe glasi

$$y_{oh} = (Ax + B)e^x ,$$

jer je $r = 1$ dvostruki korijen karakteristične jednadžbe $r^2 - 2r + 1 = 0$. Partikularno rješenje glasi

$$y_{pi} = x^2(c_0x + c_1)e^x ,$$

jer je $s = 2$ (koeficijenat od x u e^x je 1, a to je dvostruki korijen karakteristične jednadžbe), a $m = 1$, t.j.

faktor od e^x je x, t.j. linearna funkcija (mogla bi glasiti i $x + 3$ ili slično). Radi uvrštenja u diferencijalnu jednadžbu računamo derivacije:

$$y'_{pi} = (3\cdot c_o x^2 + 2\cdot c_1 x)e^x + (c_o x^3 + c_1 x^2)e^x =$$

$$= \left[c_o x^3 + (3\cdot c_o + c_1)x^2 + 2\cdot c_1 x\right]e^x$$

$$y''_{pi} = \left[3\cdot c_o x^2 + (6\cdot c_o + 2\cdot c_1)x + 2\cdot c_1\right]e^x + \left[c_o x^3 + (3c_o + c_1)x^2 + 2c_1 x\right]e^x =$$

$$= \left[c_o x^3 + (6\cdot c_o + c_1)x^2 + (6\cdot c_o + 4\cdot c_1)x + 2\cdot c_1\right]e^x$$

Uvrštenje daje, pošto se izraz sredi po potencijama od x i jednadžba podijeli sa e^x,

$$+ 6\cdot c_o x + 2\cdot c_1 = x .$$

Uspoređivanje koeficijenata daje jednadžbe

$$6\cdot c_o = 1, \quad 2\cdot c_1 = 0, \quad \text{dakle}$$

$$c_o = \frac{1}{6}, \quad c_1 = 0$$

Traženo partikularno rješenje dakle glasi

$$y_{pi} = \frac{1}{6}\cdot x^3 e^x ,$$

a opće rješenje naše jednadžbe će biti

$$y_{oi} = (Ax + B)\cdot e^x + \frac{1}{6}\cdot x^3 e^x =$$

$$= \left(\frac{1}{6}x^3 + Ax + B\right)e^x$$

Jednadžba

2) $$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 ,$$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2 ,$$

$$y_{oh} = A\cdot e^x + B\, e^{2x}$$

$$y_{pi} = c_o \sin x + d_o \cos x ,$$

(jer je $\rho = 1$, a $i\rho$ nije korijen karakteristične jednadžbe, dakle $s = 0$, a $m = 0$).

$$y'_{pi} = c_o \cos x - d_o \sin x ,$$

$$y''_{pi} = - c_o \sin x - d_o \cos x$$

Uvrštenje daje

$$(-c_o + 3\cdot d_o + 2\cdot c_o)\sin x + (-d_o - 3\cdot c_o + 2\cdot d_o)\cos x = \sin x$$

ili

$$(c_o + 3\cdot d_o)\sin x + (d_o - 3\cdot c_o)\cos x = \sin x$$

Koeficijenti članova sa sin i članova sa cos moraju se posebno izjednačiti, dakle

$$c_o + 3\cdot d_o = 1\ , \quad d_o - 3\cdot c_o = 0,$$

t.j.

$$c_o = \frac{1}{10}\ , \quad d_o = \frac{3}{10}$$

$$y_{pi} = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

$$y_{oi} = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x\ .$$

Umetak

60. Parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

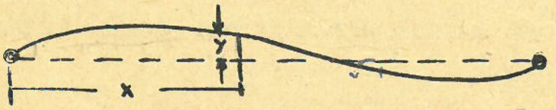
Ako se u nekoj diferencijalnoj jednadžbi pojavljuju parcijalne derivacije (ako dakle tražena funkcija ovisi o više varijabla), govorimo o parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi. Kao što je kod običnih diferencijalnih jednadžbi opće rješenje sadržavalo po volji odaberive konstante, tako će kod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi opće rješenje sadržavati po volji odaberive funkcije. Ilustrirat ćemo to na primjeru napete žice, koja titra.

Promatrajmo dakle žicu, koja je napeta između dvije točke silom S . Masa po jedinici duljine neka je ρ . Da problem pojednostavnimo, pretpostavit ćemo:

1) Napetost je velika spram djelovanja sile teže, tako da silu teže zanemarujemo.

2) Elongacije titraja, t.j. odvajanja od položaja ravnoteže, su malene, tako da možemo smatrati, da svaka čestica žice titra transverzalno t.j. okomito na spojnicu krajnjih točaka.

3) Titranje se događa u jednoj ravnini (u ravnini slike).



SLIKA 171

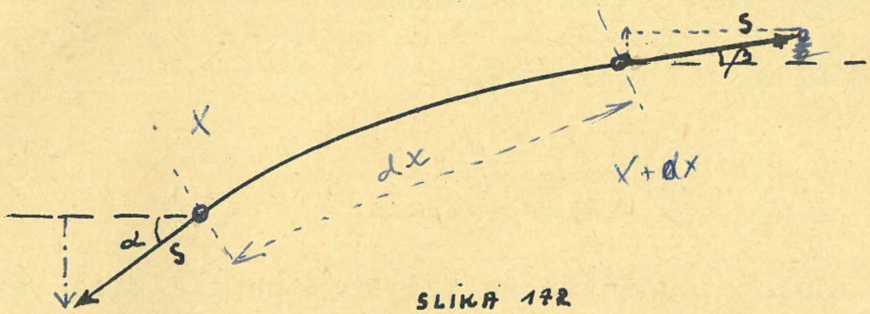
Zamislimo dakle neki položaj te žice. Elongacija na nekom mjestu neka je y, koji je dakle funkcija od x, jer će na raznim mjestima biti općenito razne elongacije. No osim toga se elongacija i vremenski mijenja, jer žica titra, t.j. y je funkcija vremena t.

Bit će dakle

$$y = f(x,t)$$

Odaberemo li neku vrijednost od t, to će funkcija prikazana kao krivulja značiti oblik žice u tom momentu.

Promatrajmo sada gibanje nekog djelića te žice, kojemu krajnje točke imaju koordinate x i $x + dx$.



SLIKA 172

Na krajevima toga dijela djeluje sila napetosti S (smatramo, da se za male elongacije S nije bitno promijenio). No te dvije sile djeluju pod različitim kutovima spram osi x, jer je žica savinuta. (Smatramo, da se žica sama ne opire savijanju, da je dakle savršeno gipka.) Budući da promatramo gibanje u smjeru osi y, zanima nas, koja je y-komponenta rezultante svih sila, koje djeluju na taj dio žice. Treba dakle zbrojiti y-komponente svih sila. Desna sila ima y-komponentu $S\sin\beta$, a lijeva $-S\sin\alpha$ (minus, jer djeluje prema dolje). Ukupno dakle $S(\sin\beta - \sin\alpha)$. No budući da su elongacije malene, bit će žica i vrlo malo nagnuta spram osi x, dakle kutovi α i β maleni. Možemo stoga zamijeniti sinus s tangensom i pisati za y-komponentu rezultante $\sin\alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha$; $\sin\beta \doteq \operatorname{tg}\beta$

$$S(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) .$$

$\operatorname{tg}\alpha$ je derivacija od y po x na mjestu s apscisom x, t.j. (t je držan konstantan, jer se radi o obliku krivulje u nekom momentu),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Na mjestu $x + dx$ ta se derivacija promijenila. Ako smatramo $\operatorname{tg}\alpha$ funkcijom od x onda je njegov prirast od točke s apscisom x do točke $x + dx$ jednak

$$d\,\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\,\operatorname{tg}\alpha}{dx}\,dx \quad . \quad \text{No } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ovisi još o } t,$$

koji je držan konstantno. Moramo stoga ~~pisati~~ pisati parcijalnu derivaciju. Prirast od $\operatorname{tg}\alpha$ je dakako $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$, t.j. vrijedi

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial\,\operatorname{tg}\alpha}{\partial x}\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx$$

množenje!

Time je y-komponenta rezultante određena sa $S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$. Ona mora biti jednaka masi našeg djelića, puta njegovo ubrzanje $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (druga derivacija elongacije po vremenu uz konstantni x, t.j.na tom mjestu žice).

Masa po jedinici duljine je ρ, a duljinu našeg djelića možemo uzeti da je dx, jer je taj djelić gotovo paralelan s osi x. Njegova je dakle masa $\rho\,dx$. Dobijemo

$$S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \rho\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ili

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{S}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Ovo je diferencijalna jednadžba za titranje napete žice. Veličinu $\frac{S}{\rho}$ označit ćemo sa v^2, tako da jednadžba dobije oblik

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Da nađemo opće rješenje te diferencijalne jednadžbe, uvest ćemo nove nezavisne varijable: stavljamo

$$x + vt = X\,,$$

$$x - vt = Y$$

ili, riješeno po x i t

$$x = \frac{X+Y}{2}\,,$$

$$t = \frac{X-Y}{2v}$$

Elongacija y, koja je dosada bila funkcija od x i t, $y = f(x,t)$, postat će dakle neka funkcija od X i Y, dakle

$$y = f\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2v}\right) = \varphi(X,Y)$$

Možemo sada derivaciju $\frac{\partial y}{\partial x}$ računati posredno iz $y = \varphi(X,Y)$, smatrajući da su X i Y funkcije od x i t, t.j. derivirati y kao složenu funkciju. Pri tom se dakako t drži konstantan. Izlazi

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}\,.$$

No iz naših jednadžbi transformacije $X = x + vt$, $Y = x - vt$ vidimo, da je

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 1, \quad \text{dakle}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} .$$

Analogno dobijemo, ako držimo x konstantan,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} .$$

Zbog

$$\frac{\partial X}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = -v$$

izlazi

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y}\right) .$$

Pišemo li mjesto φ opet slovo y, možemo dobivene jednadžbe pisati i ovako :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y} , \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v\left(\frac{\partial y}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial Y}\right) . \qquad \frac{\partial}{\partial t} = v\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y}\right)$$

Da izrazimo drugu derivaciju $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, treba samo računati $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, t.j. prvu dobivenu jednadžbu primijeniti na funkciju $\frac{\partial y}{\partial x}$ mjesto na funkciju y . Dakle

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

ili uvrštenjem vrijednosti za $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y}\right) ,$$

t.j.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} .$$

Analogno u drugoj jednadžbi (za $\frac{\partial y}{\partial t}$) mjesto y pišemo $\frac{\partial y}{\partial t}$ i dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = v\left(\frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial Y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

ili uvrstivši izraz za $\frac{\partial y}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v\left\{\frac{\partial}{\partial X} \cdot v\left(\frac{\partial y}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial Y}\right) - \frac{\partial}{\partial Y} \cdot v\left(\frac{\partial y}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial Y}\right)\right\} ,$$

t.j.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} \right)$$

Time je transformacija varijabla provedena. Uvrštenje izraza za $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ u diferencijalnu jednadžbu daje

$$4\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} = 0$$

ili

$$\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} = 0$$

Diferencijalna jednadžba je ovako dobila osobito jednostavan oblik. Pišemo li je obliku

$$\frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{\partial y}{\partial Y} = 0 ,$$

ona znači, da funkcija $\frac{\partial y}{\partial Y}$ ima parcijalnu derivaciju po X jednaku nuli, t.j. da ona ne ovisi o X. Ona je dakle funkcija samo od Y , i to bilo kakva takva funkcija, dakle

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = \phi(Y) .$$

Integriramo li ovo po Y, dobijemo

$$y = \int \phi(Y)dY + C ,$$

gdje je aditivna konstanta C "konstanta" s obzirom na Y , jer kod deriviranja po Y mora otpasti. No C može ovisiti o varijabli X i to bilo kako, t.j. možemo pisati

$$y = \int \phi(Y)dY + F(X) ,$$

gdje je F po volji odaberiva funkcija. No i prvi član je po volji odaberiva funkcija od Y , jer je $\phi(Y)$ bila po volji odaberiva funkcija. Možemo dakle pisati

$$y = F(X) + G(Y),$$

gdje su F i G po volji odaberive funkcije. Uvodeći stare varijable x i t dopiremo do općeg rješenja naše diferencijalne jednadžbe :

$$y = F(x + vt) + G(x - vt),$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} .$$

Ovo se rješenje zove D'Alembertovo rješenje. Uzmimo napose, da je $F = 0$, dakle

$$y = G(x - vt).$$

To onda znači, da je y zadan, ako znamo koliki je $x - vt$. Odaberemo li ga, na pr.

$$x - vt = A$$

$$x = A + vt,$$

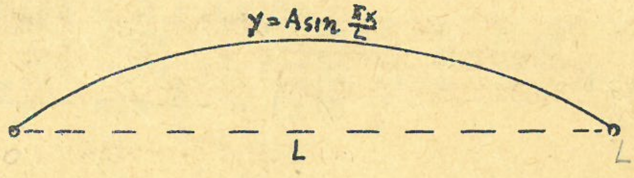
onda mijenjanje varijabla x i t u skladu s tom jednadžbom znači, da x raste linearno s vremenom, t.j. pomičemo se jednoliko uzduž osi x brzinom v. U svim tim točkama je u momentu, kad do njih stignemo, isti y, jer je isti $x - vt$. Ta elongacija dakle u neku ruku putuje s nama, a isto vrijedi za susjedne točke (s drugom vrijednosti od A) koje također svoju elongaciju "nose sa sobom". To znači, da se cijeli oblik žice pomiče brzinom v na desno, kao što se pomiče val na vodi. Analogno je lako vidjeti, da

$$y = F(x + vt)$$

znači val s brzinom $-v$, koji dakle putuje na lijevo. Vidimo, da se čitavo rješenje $y = F + G$ može shvatiti kao superpozicija dvaju valova, koji se pomiču u suprotnim smjerovima brzinom v.

Raspravimo još na jednom specijalnom slučaju, kako se može doći do partikularnog rješenja, koje odgovara konkretnom fizičkom problemu.

Žica u momentu $t = 0$ neka ima oblik sinuslinije $y = A\sin\frac{\pi x}{L}$. L neka je duljina žice, koja je ujedno polovica perioda sinuslinije. Za $x = 0$ i za $x = L$ taj je sinus jednak nuli, kako mora biti, jer je tamo žica pričvršćena. Ovaj nam uvjet dakle daje oblik žice u početnom trenutku. Osim toga neka je u tom momentu brzina svih čestica, dakle $\frac{\partial y}{\partial t}$, jednaka nuli, t.j. mi žicu u taj čas ispuštamo.



SLIKA 173

(Istisnuli smo je, recimo, nekom šablonom u obliku sinuslinije iz njenog položaja ravnoteže.) Ovo su "početni uvjeti". K tomu dolaze "rubni uvjeti", t.j. uvjeti na rubu područja varijabilnosti od x, dakle za $x = 0$ i $x = L$. Tu mora biti trajno $y=0$, jer je na tim mjestima žica pričvršćena. Uzmimo sada opće rješenje

$$y = F(x + vt) + G(x - vt)$$

i stavimo $t = 0$, a $y = A\cdot\sin\frac{\pi x}{L}$:

$$F(x)\ \cancel{F(x)} + G(x) = A\cdot\sin\frac{\pi x}{L}\ .$$

Dalje računamo $\frac{\partial y}{\partial t}$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F(x+vt)}{\partial (x+vt)}\cdot\frac{\partial (x+vt)}{\partial t} + \frac{\partial G(x-vt)}{\partial (x-vt)}\cdot\frac{\partial (x-vt)}{\partial t}$$

ili

$$\frac{\partial y}{\partial t} = vF'(x+vt) - v\,G'(x-vt).$$

Za $t = 0$ mora biti $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, dakle

$$v\cdot F'(x) - v\cdot G'(x) = 0$$

ili

$$F'(x) - G'(x) = 0.$$

Dalje je za $x = 0$ stalno $y = 0$, dakle

$$F(vt) + G(-vt) = 0\ ,$$

a za $x = L$ također $y = 0$, dakle

$$F(L + vt) + G(L - vt) = 0\ .$$

Time su formulirani svi uvjeti.

Iz

$$F'(x) - G'(x) = 0$$

izlazi

$$F(x) = G(x) + C\ .$$

To uvršteno u $F(x) + G(x) = A\sin\frac{\pi x}{L}$ daje

$$2G(x) + C = A\sin\frac{\pi x}{L}$$

ili

$$G(x) = \frac{A}{2}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{C}{2}$$

a sam $F(x)$ je zbog $F(x) = G(x) + C$ jednak

$$F(x) = \frac{A}{2}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{C}{2}\ .$$

Uvrstimo li sada u $F(x)$ mjesto x izraz $x + vt$, a u $G(x)$ izraz $x - vt$, dolazimo do rješenja

$$y = \frac{A}{2}\sin\frac{\pi(x+vt)}{L} + \frac{C}{2} + \frac{A}{2}\sin\frac{\pi(x-vt)}{L} - \frac{C}{2}\ ,$$

dakle

$$y = \frac{A}{2}\sin\frac{\pi(x+vt)}{L} + \frac{A}{2}\sin\frac{\pi(x-vt)}{L} ,$$

čime je određeno titranje žice kao superpozicija od dva sinusna vala, koja putuju u protivnim smjerovima (pri čemu si možemo žicu zamisliti produženu preko njenih krajeva). Lako se vidi, da su svi početni i rubni uvjeti zadovoljeni. Ovo rješenje možemo dovesti i na drugi oblik :

$$\sin\frac{\pi}{L}(x+vt) = \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi vt}{L} + \cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi vt}{L} ,$$

$$\sin\frac{\pi(x-vt)}{L} = \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi vt}{L} - \cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi vt}{L} ,$$

dakle

$$y = A\cdot\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi vt}{L} .$$

Ovdje je elongacija izražena kao produkt dviju sinusfunkcija. Uz konstantni x , dakle na nekom mjestu žice, čestica titra prema funkciji $\cos\frac{\pi vt}{L}$, s amplitudom $A\sin\frac{\pi x}{L}$, koja je nula na krajevima, a najveća u sredini žice. Ovakvo titranje se još zove i "stojni val", a krajevi žice su "čvorovi". Vidi se da se stojni val, koji se ne pomiče, mogao prikazati kao superpozicija dvaju valova, koji putuju u suprotnim smjerovima.

Odredimo još frekvenciju titranja. Bit će

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi v}{L} = \pi\sqrt{\frac{S}{\rho}}\cdot\frac{1}{L} ,$$

dakle

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\rho}} .$$

Tako se iz sile S kojom je žica napeta, duljine L žice i njene mase ρ po jedinici duljine može odrediti broj titraja f u jedinici vremena.

IV. DIO

ZBIRKA ZADATAKA

GRČKI ALFABET

Α α	Β β	Γ γ	Δ δ	Ε ε	Ζ ζ	Η η	Θ ϑ
alfa	beta	gama	delta	epsilon	zeta	eta	theta
Ι ι	Κ κ	Λ λ	Μ μ	Ν ν	Ξ ξ	Ο ο	Π π
iota	kapa	lambda	mi	ni	ksi	omikron	pi
Ρ ρ	Σ σ	Τ τ	Υ υ	Φ φ	Χ χ	Ψ ψ	Ω ω
ro	sigma	tau	ipsilon	fi	hi	psi	omega

Kompleksni brojevi (§ 1)

1. $x = \sqrt[3]{-27}$

$$x_1 = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x_2 = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x_3 = -3$$

2. $x = \sqrt[3]{27}$

$$x_1 = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x_2 = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x_3 = 3$$

3. $x = \sqrt[4]{16}$

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -2$$
$$x_3 = -2i$$
$$x_4 = 2i$$

4. $x = \sqrt[4]{-16}$

$$x_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(1+i)$$
$$x_2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(1-i)$$
$$x_3 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(-1+i)$$
$$x_4 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(-1-i)$$

5. $\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

6. $\sqrt{3+4i} = \pm (2+i)$

7. $\sqrt{-7+24i} = \pm (3+4i)$

8. $\sqrt[3]{i} = -i \ , \ \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

9. $x^2 + (5-2i)x + 5(1+i) = 0 \qquad x_1 = -2+i \qquad x_2 = -3+i$

10. $x^2 + (1-2i)x - 2i = 0 \qquad x_1 = 2i \qquad x_2 = -1$

11. $x = \sqrt[6]{1}\ ;$

$x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

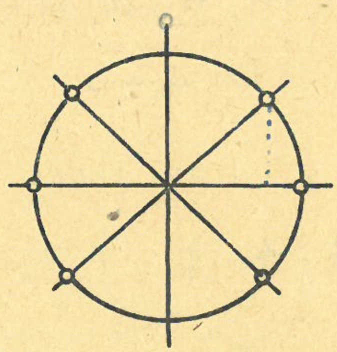
$x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_5 = -1$

$x_6 = 1$



12. Riješi grafički i analitički slijedeću jednadžbu :

$x^5 + 1024 = 0$

$x = \sqrt[5]{-1024}$

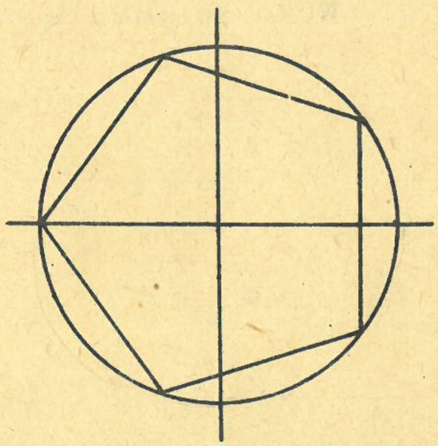
$x_1 = 1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$x_2 = 1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$x_3 = -4$

$x_4 = 1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$x_5 = 1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$



Sljedovi i redovi (§ 2)

? 1. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\sqrt{(n+\alpha)(n+\beta)} - n \right] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

2. $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2}$

? 3. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\sqrt{n(n+1)} - n \right] = \frac{1}{2}$

Nađi limes slijeda:

4. $\sqrt{2} - \sqrt{1},\ \sqrt{3} - \sqrt{2},\ \sqrt{4} - \sqrt{3} \dots \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \dots$

$\lim a_n = 0$

Nađi limes slijeda:

5. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n} = 1$

Neka se nađe suma reda:

? 6. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

$S_n = 1$

Neka se nađe suma reda:

? 7. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$S_n = \frac{1}{4}$

? 8. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots = \frac{1}{2}$; $\frac{m}{2m+1}$

9. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots = \frac{1}{3}$;

? 10. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.6} + \cdots\cdots = \frac{11}{18}$; $\qquad \frac{1}{n(n+3)}$

? 11. $\frac{1}{1.7} + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.11} + \cdots\cdots = \frac{23}{90}$; $\qquad \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

? 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$;

? 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

Derivacije (§5 - §11)

\+ 1. $y = x^3$; $\quad y' = 3x^2$

\+ 2. $y = \frac{x^2}{2}$; $\quad y' = x$.

\+ 3. $y = ax^2 + 2bx + c$; $\quad y' = 2ax + 2b$

\+ 4. $y = x^7 - x^{-3} + x^{\frac{3}{4}}$; $\quad y' = 7x^6 + 3x^{-4} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

\+ 5. $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 2x^5 + 5x + 1$;

$y' = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 6x - 10x^4 + 5$

\+ 6. $y = (x-1)(x-3)$; $\quad y' = 2x - 4$

\+ 7. $y = (3x^2 + 3x - 5)(x^2 - 7x + 1)$; $\quad y' = 12x^3 - 54x^2 - 46x + 38$

\+ 8. $y = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 2)$; $\quad y' = 4x^3 - 18x + 12$

\+ 9. $y = \frac{a}{x}$; $\quad y' = -\frac{a}{x^2}$

\+ ? 10. $y = \frac{a}{x^n}$; $\quad y' = -\frac{an}{x^{n+1}}$ $\qquad y' = \frac{anx^{n-1}}{x^{2n}}$; $y' = \frac{-an}{x^{n+1}}$

11. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

12. $y = x^2 \sqrt{x}$; $y' = \frac{5}{2} x \sqrt{x}$ $\cancel{4 \quad y' = \frac{5}{2} x \sqrt{x^3}}$

13. $y = \dfrac{x^4}{\sqrt[5]{x^2}}$; $y' = \dfrac{18}{5} x^2 \sqrt[5]{x^3}$ → 2

14. $y = \sqrt{ax+b}$; $y' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

15. $y = \sqrt{ax^2+2bx+c}$; $y' = \dfrac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$

16. $y = \sqrt[n]{ax^2+2bx+c}$; $y' = \dfrac{(2ax+b)\sqrt[n]{ax^2+2bx+c}}{n(ax^2+2bx+c)}$

17. $y = (ax+b)^5$; $y' = 5a(ax+b)^4$

18. $y = (5x^2-8x+3)^n$; $y' = n(10x-8)(5x^2-8x+3)^{n-1}$

19. $y = \dfrac{3}{(x^2-2)^2}$; $y' = \dfrac{-12x}{(x^2-2)^3}$

20. $y = x^2(3x-5)^4$; $y' = 2x(9x-5)(3x-5)^3$

21. $y = (3x^2-5x+7)(4x+3)^3$; $y' = (4x+3)^2(60x^2-62x+69)$

22. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

23. $y = \dfrac{ax^2+2bx+c}{dx^2+2ex+f}$; $y' = \dfrac{2\{(de-bd)x^2+(af-cd)x+bf-ce\}}{(dx^2+2ex+f)^2}$

24. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $y' = \dfrac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

26. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2}$

27. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{a+x}}$; $y' = -\dfrac{2a+3x}{2x^2\sqrt{(a+x)^3}}$

28. $y = (ax+b)\sqrt{ax^2+2bx+c}$; $y' = \dfrac{a^3+2a^2x^2+4abx+ac+b^2}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$

29. $y = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{2x}$; $y' = \dfrac{2x^2-x-2}{4x^2\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad \dfrac{1}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$

30. $y = \dfrac{a+x}{a-x}$; $y' = \dfrac{2a}{(a-x)^2}$ $\qquad \dfrac{(a-\cancel{x})1+(a+x)}{(a-x)^2}$

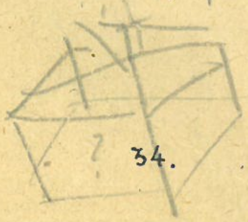
31. $y = \sqrt[3]{3x-2x^2}$; $y' = \dfrac{1-\frac{4}{3}x}{\sqrt[3]{(3x-2x^2)^2}}$ $\qquad 2a$

32. $y = (3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}$;

$y' = \dfrac{5a^3+30ax^2+27x^3}{\sqrt{a^2+3x^2}}$

33. $y = (4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}$;

$y' = 28x\sqrt[3]{3x+7}$



34. $y = \left(\dfrac{2}{3x^2}+\dfrac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}$; $y' = \dfrac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$

35. $y = (8x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$; $y' = \dfrac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}$

36. $y = \sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$; $y' = -\dfrac{2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$

$y = \sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$

$y = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{}$ $\quad y = \frac{x^2}{x}$ $\quad y = x$ $\quad (oo)$

37. $y = \dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $\quad y' = \dfrac{[\sqrt{1+x^2}-x^2]^2}{\sqrt{1+x^2}}$

38. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$; $\quad y' = \dfrac{2[\sqrt{1+x^2}+x]^2}{\sqrt{1+x^2}}$

39. $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$; $\quad y' = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

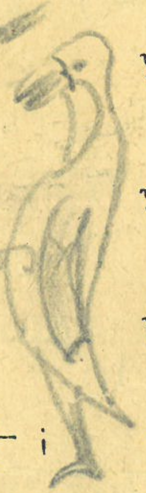
40. $y = \dfrac{(a-2bx)\sqrt{a+bx}}{x\sqrt{x}}$; $\quad y' = -\dfrac{3a^2}{2x^2\sqrt{x(a+bx)}}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{a+bx^2}{a-bx^2}}$; $\quad y' = \dfrac{2abx}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x^4}}$

42. $y = \dfrac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x}$; $\quad y' = -\sqrt{a}\,\dfrac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x^2\sqrt{a+bx}}$

43. $y = \sin 2x$; $\quad y' = 2\cos 2x$

44. $y = \sin^2 x$; $\quad y' = \sin 2x$ $\qquad 2\sin x\cos x = \sin 2x$



45. $y = \sin x^2$; $\quad y' = 2x\sin x^2$

46. $y = \mathrm{tg}\, nx$; $\quad y' = \dfrac{n}{\cos^2 nx}$

47. $y = \dfrac{a-b\cos x}{a+b\cos x}$; $\quad y' = \dfrac{2ab\sin x}{(a+b\cos x)^2}$

48. $y = \arcsin 5x$; $\quad y' = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

49. $y = (\mathrm{arc\,tg}\, x)^2$; $\quad y' = \dfrac{2\,\mathrm{arc\,tg}\, x}{1+x^2}$

50. $y = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{a\sin x - b\cos x}$; $y' = \dfrac{-2ab}{(a\sin x - b\cos x)^2}$

51. $y = \arcsin(2x^2 - 1)$; $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

52. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

53. $y = 3\sin(3x+5)$; $y' = 9\cos(3x+5)$

54. $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$; $y' = 3\sin x\cos x\,(2 - \sin x)$

55. $y = 5\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{x}{5}$; $y' = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{5}}{\cos^2\frac{x}{5}}$

$3 \cdot 2\sin x\cos x - 3\sin^2 x\cos x$

56. $y = \dfrac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{x}$; $y' = -\dfrac{2(x\cos x + \sin x)}{x^2\sin^2 x}$

57. $y = \sin^2\dfrac{x}{3}\cdot\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{3}$; $y' = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2}{3}x$

58. $y = \cos\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\cdot\sin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

59. $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$; $y' = -\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$

60. $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$; $y' = \dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$

61. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+x}$; $y' = \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

62. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

63. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$; $y' = \dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

64. $y = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; $y' = \arcsin x$

65. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

66. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2x}\,\sqrt{1-x}\,(1+x)}$. ?

67. $y = x \operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $\quad y' = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.

68. $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$; $\quad y' = -\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

69. $y = \arcsin\dfrac{3x-2}{\sqrt{2}}$; $\quad y' = \dfrac{3}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$.

70. $y = 2\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$; $\quad y' = \dfrac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

71. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$; $\quad y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

72. $y = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{x-1}$; $\quad y' = \dfrac{\sqrt{5}}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-4}}$.

73. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$; $\quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

74. $y = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}$; $\quad y' = \dfrac{2x^3}{1-x^4}$.

75. $y = \ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\quad y' = \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

76. $y = \ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

77. $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; $\quad y' = -\dfrac{2}{(1+\ln x)^2 \cdot x}$.

78. $y = \ln(\sin x + \cos x)$; $\quad y' = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

79. $y = \ln \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\,(2+2x+x^2)}$.

80. $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$; $\quad y' = -\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$

79. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $\qquad y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

80. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

$$y' = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

81. $y = e^{\cos x}$; $\qquad y' = -\sin x\, e^{\cos x}$

82. $y = \sin x\, e^{\cos x}$; $\qquad y' = (\cos x - \sin^2 x)\, e^{\cos x}$

83. $y = e^x \sin x \cos^3 x$; $\qquad y' = e^x \sin x \cos^3 x\,(1 + \mathrm{ctg}\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x)$.

84. $y = e^{2\sqrt{ax}}$; $\qquad y' = \dfrac{a}{\sqrt{ax}}\, e^{2\sqrt{ax}}$.

85. $y = e^{\sin^2 x}$; $\qquad y' = \sin 2x \,.\, e^{\sin^2 x}$

86. $y = e^{\mathrm{arc\,tg}\, x}$; $\qquad y' = \dfrac{e^{\mathrm{arc\,tg}\, x}}{1+x^2}$.

87. $y = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$; $\qquad y' = 2\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$.

88. $y = a^{\sqrt{x^2+1}}$; $\qquad y' = \dfrac{x \cdot a^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} \ln a$.

89. $y = (\sin x)^{\cos x}$; $\qquad y' = \sin x^{\cos x - 1}\,(\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x)$.

90. $y = x^x$; $\qquad y' = x^x (1 + \ln x)$.

91. $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$; $\qquad y' = \left(\frac{a}{x}\right)^x (\ln a - \ln x - 1)$.

92. $y = \sqrt[x]{x}$; $\quad y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$.

93. $y = (\text{arc tg}\, x)^x$; $\quad y' = (\text{arc tg}\, x)^x \left[\ln \text{arc tg}\, x + \frac{x}{\text{arc tg}\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right]$.

94. $ax + by + c = 0$; $\quad y' = -\frac{a}{b}$.

95. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\quad y' = -\frac{bx}{ay}$.

96. $a^{x-y} - x^y = 0$; $\quad y' = \frac{x \ln a - y}{x \ln (x \cdot a)}$.

97. $\sin x - \cos y = 0$; $\quad y' = -1$

98. $(e^x - 1)(e^y - 1) = 1$; $\quad y' = -\frac{e^x}{e^y}(e^y - 1)^2$.

Minimum i maksimum (§ 12)

1. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$; za $x = \sqrt{2}$ min
   $x = -\sqrt{2}$ max

2. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$; za $x = 3$ min
   $x = -2$ max

3. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$; za $x = 0$ max
   $x = 1$ min

4. $y = \frac{x}{x^2 + 6x + 9}$; za $x = 3$ max

5. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; ZA $x = 1$ max
   $x = -1$ min

6. $y = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 4}$; za $x = 2$ max

$x = -2$ min

7. $y = \dfrac{x}{\ln x}$; za $x = e$ min

8. $y = \dfrac{x^2}{e^x}$; za $x = 0$ min

$x = 2$ max

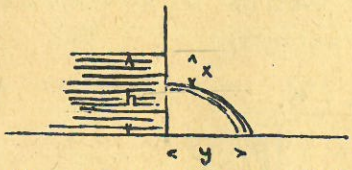
9. Za specifičnu toplinu vode kod temperature t neka vrijedi formula:

$$C_t = 1 - 0{,}0006684 . t + 0{,}00001092\ t^2 ;$$

kod koje temperature je specifična toplina minimum?

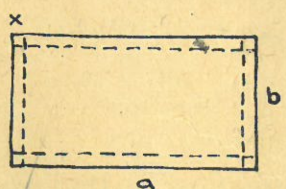
$t = 30{,}6^\circ C$.

10. Neka se odredi visina otvora u posudi s vodom tako, da dobivena parabola bude što šira t.j. da postigne što veću daljinu.



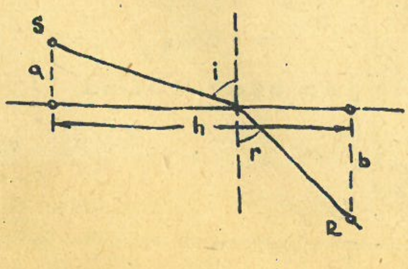
$x = \dfrac{h}{2}$

11. Neka se iz pravokutnika načini kutija najvećega volumena pošto se odrežu kvadrati na vrhovima.



$x = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)$

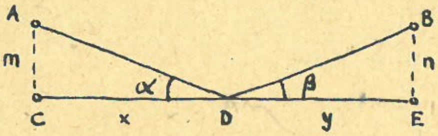
12. Po kojem zakonu mora svjetlost da ide iz tačke S u jednom sredstvu do tačke R u drugom sredstvu ako pretpostavimo da se to zbiva u najkraće vrijeme ./Fermatov princip/ ? — Poznata je brzina svjetla u prvom mediju (v_1) i u drugom mediju (v_2), daljina $\overline{A-B} = h$ i dužine a i b.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

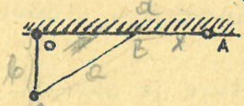
13. Neka se na danom pravcu CE odredi točka D tako, da spojnice AD i DB imaju najmanju sumu.

Rezultat: $\alpha = \beta$

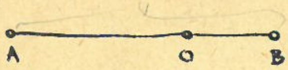


14. Čovjek se nalazi s lađom u udaljenosti od 3 milje od obale (najbliža tačka). On bi htio doći za najkraće vrijeme u točku A, koja je udaljena 5 milja od O. Ako čovjek u satu prevali 5 milja pješke, a lađom 4 milje, onda se pita u kojoj tački on mora pristati.

Čovjek se mora iskrcati 1 milju ispred mesta u koje želi stići.



15. Lađa ima da prođe između 2 izvora svjetla A i B. koja su na 2 brijega. Poznata je jakost svakoga svjetla (α i β) i njihova međusobna udaljenost (a). Kojom točkom mora lađa proći da bude što manje rasvijetljena? Intenzitet rasvjete je upravno proporcionalan jakosti svjetla, a obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti od izvora svjetla. Jakosti rasvjete od jednog i drugog svjetla treba zbrojiti.



$$x = \frac{a\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}}$$

16. Brzina kojom se giba val dužine λ u dubokoj vodi je:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}}$$

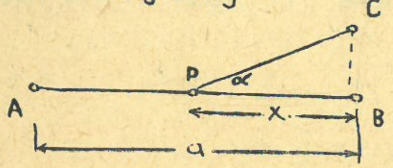
gdje je <u>a</u> konstanta. Kolika mora biti dužina vala da brzina bude najmanja?

$$\lambda = a \qquad v = \sqrt{2} .$$

17. Pod kojim kutem treba baciti tijelo, da bude dužina hica što veća?

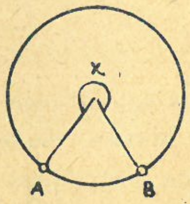
$$D = \frac{c^2 \sin 2x}{g} \qquad (x = 45^\circ)$$

18. Troškovi transporta na cesti AB stoje po kilometru d_1 dinara, a po neprohodnom putu PC d_2 dinara. Gdje treba skrenuti s ceste da bude trošak na putu AP + PC najmanji



$d_1 : d_2 = \cos\alpha$

19. Izreži isječak iz okrugle ploče, da ostatak može biti upotrijebljen za stožastu posudu najveće sadržine.



(Treba izrezati sektor sa središnjim kutem od 66°)

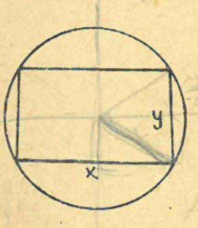
20. Ako je v_0 volumen vode kod 0°C, v volumen kod t°C onda je po Hällström-ovoj formuli za temperature između 0° i 30° C

$$v = v_0 \left(1 - 0{,}000057577 . t + 0{,}0000075601 . t^2 - 0{,}0000003509 . t^3 \right).$$

Neka se dokaže da je volumen najmanji a gustoća najveća ako je:

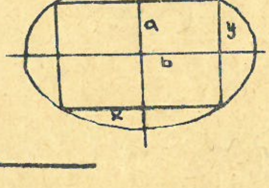
$$t = 3{,}92^\circ \text{ C}$$

21. U krug polumjera $\underline{a}$ neka se upiše pravokutnik sa što većim opsegom.



$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

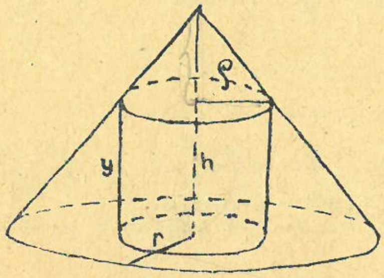
22. Neka se u elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ upiše pravokutnik sa što većom površinom.



$x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \qquad y = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

23. Koji broj zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću ima najmanju sumu (1).

24. Iz stožca (zadano r i v) tako izrezati valjak, da mu volumen bude maximum.



$\varrho = \frac{2}{3} r$

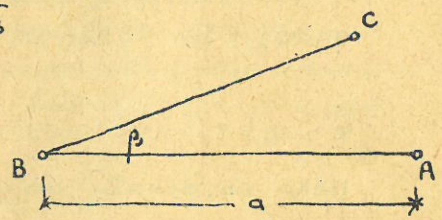
$\rho : r = (v - h) : h$

$\rho = \frac{r(v-h)}{h}$

$\rho^2 \pi h$

25. Iz A u smjeru B giba se auto brzinom V_1. U isto vrijeme kada je auto iz A pošao prema B, pošao je i jedan auto iz B u pravcu C brzinom V_2. Pita se za koje će vrijeme udaljenost između ta dva automobila biti najmanja, ako je zadan kut β i $\overline{AB} = a$.

$$t = \frac{a(V_1 + V_2 \cos\beta)}{V_1^2 + V_2^2 + 2 V_1 V_2 \cos\beta}$$



26. Kišna kapljica početne mase m_0, pada djelovanjem sile teže, jednoliko se isparuje, tako da je gubitak mase proporcionalan vremenu (koeficient proporcionaliteta je k).
Za koliko sekundi će biti, od početka padanja, kinetička energija te kapljice najmanja (otpor zraka se zanemaruje).

$$t = \frac{2 m_0}{3 k}$$

$\rho = \frac{rv}{h} - rv$

$V = \frac{r^2(v-h)^2}{h^2} \cdot \pi \cdot h$

$V = \frac{r^2(v-h)^2}{h} \pi$

$\pi \frac{-h r^2 \cdot 2(v-h) - r^2(v-h)^2}{h^2}$

$\cancel{-2r^3h} + 2h^2r^2 - r^4 + \cancel{2r^3h} - r^2h^2 = 0$

$h^2r^2 = r^4$

$h = \pm r$

Mac Laurinov red /§ 14/.

Razvij u MacLaurinov red slijedeće funkcije:

1. $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$

2. $y = e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$

3. $y = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots\cdots$

4. $y = \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\cdots$

5. $y = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right)$

6. $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \cdots\cdots\right)$

7. $y = \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$

8. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{2x}{1!} - \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} \cdots\cdots\right]$

9. $y = x^2e^x = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \cdots\cdots$

10. $y = e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - + \cdots\cdots$

11. $y = a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \cdots\cdots$

Neodređeni oblici /§ 16/.

Oblik $\frac{0}{0}$.

derivirati

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 - \cos x} = 0.$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = 2.$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{\sqrt{38 - x} - 6} = -384.$

$= \dfrac{e^x + e^{-x}}{1} = \dfrac{1+1}{1} = 2.$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x} = 0.$

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18} = 8.$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}.$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{x} = 1.$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{x^3} = \dfrac{1}{3}.$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = -\dfrac{1}{2}.$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 2.$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x} = 2.$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$

Oblik: $\frac{\infty}{\infty}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x} = 1$

25

17. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln(e^x - e^a)}{\ln(x-a)} = 1$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} = 2$

Oblik: $0 \cdot \infty$

19. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} \cdot \cos \dfrac{\pi x}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

20. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{2}{\pi}$.

21. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin \dfrac{a}{x} = a$.

22. $\lim\limits_{x \to a} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2a} = \dfrac{4a^2}{\pi}$

Oblik: $\infty - \infty$

svesti na razlomak

? 23. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3}$

24. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0$

25 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

26 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$

svesti na nulu

? 27. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{6}$

svesti na opći

28. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right) = -1$; -2

kada bolje pišem od kada imam ... slova

Oblik: 1^{∞} ln

29. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$.

30. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1$.

31. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$. $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

33. $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

34. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{2}$

35. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2} = \frac{1}{e^2}$.

36. $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}$ $e^{-\frac{2a}{\pi}}$

Oblik: ∞^{0}

37. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$.

38. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{\ln x}} = e$.

39. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$.

40. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi} = 1$.

41. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$.

Oblik: 0^0

42. $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1.$

43. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)^{\operatorname{tg} \pi x} = 1.$

Izračunaj pomoću beskonačnih redova limese slijedećih funkcija:

44. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\cos x \cdot \sin x} = \cancel{\dfrac{1}{2}}.$ 0

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}} = \dfrac{1}{2}.$

46 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} + 2\sin x - 4x}{x^5} = \dfrac{1}{30}.$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \dfrac{1}{6}$

48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

49. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1} = 1.$

50. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)^4 - 4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6\sin x - 6x - x^3} = 16.$

51. Neka se odredi koeficijent smera tangente u ~~tački~~ P(0,0) krivulje $y^2 = e^x + 4x^2 - x - 1$. točki

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Tangenta i normala (§ 17) (112.)

1. Odredi tangentu na parabolu $4y = x^2$ u tački $P(2,1)$.

$$y = x - 1 .$$

2. Kroz tačku $P(0,-4)$ povuci tangente na parabolu $4y = x^2$.

$$\pm 2x + y + 4 = 0 .$$ $y+4=0$

3. Kroz tačku $P(2,-1)$ povuci tangente na elipsu $x^2+9y^2=9$.

$$y+1=0 , \quad 4x-5y=13 .$$ $2\sqrt{5}x+\sqrt{15}y+(\sqrt{15}-4\sqrt{5})=0$

$2\sqrt{5}x-\sqrt{15}y-(+4\sqrt{5}-\sqrt{15})=0$

4. Paralelno s pravcem $10x+3y=0$ povuci tangentu na hiperbolu $4x^2-y^2=4$.

$$10x+3y\pm 8=0 .$$

Odredi: tangentu (T), normalu (N), suptangentu (S_t) i subnormalu (S_n) slijedećih krivulja:

1. Hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

$$T = \frac{1}{ax}\sqrt{(x^2-a^2)(e^2x^2-a^4)} ,$$

$$N = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2x^2-a^4} ,$$

$$S_t = \frac{x^2-a^2}{x}$$

$$S_n = \frac{b^2x}{a^2}$$

2. Parabole $y^2 = 2ax$;

$$T = \frac{y}{a}\sqrt{a^2+y^2} ,$$

$$N = \sqrt{a^2+y^2} ,$$

$$S_t = 2x ,$$ $-2x$

$$S_n = a .$$

a. Iz toga slijedi da je subnormala kod parabole konstantna.

b. Subtangenta je 2 puta tako velika kao apscisa, pa prema tome raspolavlja tjeme parabole.

3. Odredi apsolutne vrijednosti T, N, S_t, i S_n u točki $P(-3,4)$

Krivulje $x^2 + y^2 = 25$

$T = \frac{20}{3}$

$N = 5$

$S_t = \frac{16}{3}$

$S_n = 3$.

4. $y = \sin x$

$T = \operatorname{tg} x \sqrt{1+\cos^2 x}$

$N = \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}$

$S_t = \operatorname{tg} x$

$S_n = \sin x \cdot \cos x$.

5. Odredi: T, N, S_t i S_n u tačci $P(3,2)$

Krivulje: $y = x^2 - 4x + 5$;

$T = \sqrt{5}$,

$N = 2\sqrt{5}$

$S_t = 1$,

$S_n = 4$

Asimptote (§ 18).

1. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;

$x = 1$

$x = -1$

$y = x$

2. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$; $\quad x = 1$

$x = -1$

$y = 1$.

3. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2}x$; $\quad y = -x - \dfrac{3}{2}$. $\quad y = -\dfrac{3}{2}x$.

4. $x^2 y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$; $\quad x = a$

$x = -a$

$y = a$

$y = -a$.

5. $x^3 + y^3 = r^3$; $\quad y = -x$.

6. $xy - \alpha x^2 - \beta x = r$; $\quad y = \alpha x + \beta$.

Polumjer zakrivljenosti § 19

Odredi radij zakrivljenosti slijedećih funkcija

1. $y = \dfrac{1}{x}$; $\quad R = \dfrac{\sqrt{(1 + x^4)^3}}{2x^3}$.

u točki $P(1,1)$ $\quad R = \sqrt{2}$.

2. $y = ax^3$; $\quad R = \dfrac{(1 + 9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}{6ax}$.

3. Odredi radij zakrivljenosti funkcije $y = e^{-x^2}$
Za $x = 0$ i odredi koordinate središta zakrivljenosti.

$R = -\dfrac{1}{2}$ $\quad R \; (0, \dfrac{1}{2})$.

4. Odredi R za elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

$$R = -\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} .$$

5. Kako glasi jednadžba kružnice krivine za tačka $P(0,1)$ krivulje

$$y = e^x .$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8 .$$

6. u kojoj točki je krivulja $y = \ln x$ najjače zavinuta.

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

7. Odredi jednadžbu evolute funkcije: $y = \operatorname{ch} x$.

$$\xi = x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x ,$$
$$\eta = 2 \operatorname{ch} x .$$

8. Odredi jednadžbu evolute funkcije : $y = b . e^{\frac{x}{a}}$.

$$\xi = x - a - \frac{b^2}{a^2} e^{\frac{2x}{a}} ,$$
$$\eta = 2be^{\frac{x}{a}} + \frac{a^2}{b} e^{-\frac{x}{a}} .$$

9. $$y^2 = \frac{x^3}{a-x} ; \qquad \xi = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{\eta^2}{8a^2}\left(\eta^2 + \frac{32}{3} a^2\right).$$

10. Odredi koordinate tačke evolute i radij zakrivljenosti parabole $y = x^2 - 6x + 10$ za tačku $P(3,1)$ te parabole.

$$\xi = 3 , \quad \eta = \frac{3}{2} \qquad R = \frac{1}{2} .$$

11. Odredi jednadžbu evolute parabole $y^2 = 2px$.

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3 .$$

Prostorna analitika (§ 20, 21)

1. Kroz tačke $P(1,1,1)$ $(2,2,2)$ povuci ravninu, koja je okomita na ravninu $x + y - z = 0$.

$$x - y = 0$$

2. Odredi udaljenost tačke $P(2,1,1)$ od ravnine $x+y-z-1=0$

$$d=\sqrt{3}\ .$$

3. Odredi točku presjecišta ravnina: $x+y+z-6=0$, $2x-y+z-3=0$; $x+2y-z-2=0$.

$$P\ (1,2,3)\ .$$

4. Dokaži da se ravnine $x+y+2z-4=0$; $x+2y-z-2=0$, $2x-y-z=0$, $x+y+z-3=0$ sijeku u jednoj tačci.

5. Kroz sjecište ravnina $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$, $x+y+z-3=0$ povuci ravninu paralelnu sa ravninom $x+y+2z=0$.

$$x+y+2z-4=0.$$

6. Odredi A, B, C. i D pravca $Ax+By+Cz+D=0$, ako znamo da taj pravac prolazi tačkama $P_1(0,2,3)$, $P_2(1,4,5)$ i $P_3(3,4,7)$.

$$2x+y-2z+4=0\ .$$

7. Neka se odrede jednadžbe rotacionog paraboloida ako

a. parabola $z^2=2px$ rotira oko osi x,

b. —"— $z^2=2py$ " " " y

c. —"— $x^2=2pz$ " " " z.

a. $y^2+z^2=2px$

b. $x^2+z^2=2py$

c. $x^2+y^2=2pz$

8. Odredi vrst plohe

$$x^2+2y^2+2x-4y+2z+1=0\ .$$

Za $x=0$ parabola

Za $y=0$ —"—

Za $z=0$ elipsa

eliptički paraboloid .

9. Odredi vrst plohe

$$x^2 - 4y - 3z = 0$$

Za $x = 0$ pravac

$y = 0$ parabola

$z = 0$ —"—

Parabolni valjak.

10. Izvedi jednadžbu eliptičkog stožca.
Baza u ravnini $z = c$ ima jednadžbu $\frac{x_0^2}{a_2} + \frac{y_0^2}{b_2} = 1$
a vrh je u ishodištu.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} .$$

11. Neka se izvede jednadžba kružnog stošca, kao ploha, koja nastaje rotacijom pravca $z = Ax$ oko osi z.

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{1}{A^2} .$$

12. Odredi tangencijalne ravnine na slijedeće plohe

a. $z = 2x^2 - 4y^2$ u tački $(2,1,4)$

b. $z = xy$ u tački $(1,1,1)$

c. $z = \dfrac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$ u tački $(a,a,-a)$

d. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ u tački $\left(\frac{a\sqrt3}{3}, \frac{b\sqrt3}{3}, \frac{c\sqrt3}{3}\right)$.

e. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ u tački $(1,2,-1)$

f. $(x^2 - x^2)\, xyz - y^5 = 5$ u tački $(1,1,2)$

a. $8x - 8y - z = 4$;

b. $x + y - z - 1 = 0$;

c. $z + a = 0 \begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$;

d. $\dfrac{x\sqrt3}{3a} + \dfrac{y\sqrt3}{3b} + \dfrac{z\sqrt3}{3c} = 1$;

e. $x + 11y + 5z - 18 = 0$;

f. $2x + y + 11z = 25$.

Newtonova metoda i metoda regula falsi (§ 30)

Odredi Newtonovom metodom ili metodom regula falsi korijene slijedećih jednadžbi :

1. $x^3+x^2-2x-1=0$; $x_1=-1,80194$, $x_2=-0,44504$, $x_3=1,24698$.

2. $20x^3-24x^2+3=0$; $x_1=-0,31469$, $x_2=0,44603$, $x_3=1,06865$.

3. $x^3-3x+1=0$; $x_1=-1,87938$, $x_2=0,34729$, $x_3=1,53209$.

4. $x^4-12x+7=0$; $x_1=2,04727$, $x_2=0,59368$.

5. $x^3-5x+1=0$; $x_1=-2,33007$, $x_2=0,20164$, $x_3=2,128$.

6. $x^3+3x^2-4x-1=0$ $x_1=-3,94883$, $x_2=-0,21729$, $x_3=1,16602$.

7. $10x=e^{-x}$; $x_1=0,091$.

8. $10x=10+\sin x$; $x_1=1,088$.

Kardanova formula (§ 42)

Riješi po Kardanovoj formuli slijedeće jednadžbe:

1. $x^3 - 6x - 9 = 0$; $x_1 = 3$,

   $x_2 = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$,

   $x_3 = \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

2. $x^3 + 6x - 7 = 0$; $x_1 = 1$,

   $x_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{27}}{2}$,

   $x_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{27}}{2}$.

3. $x^3 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, $= 1$

   $x_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{15}}{}$.

   $x_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2}$

Odredi tok slijedećih funkcija (max. i min. infleksije, asimtote).

1. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$;

Asimptote $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, infleksije $P(\frac{1}{2}, 0)$, Max. i min. nema.

2. $2y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$;

min $P(0,1)$, asimptote $y = \pm x$.

3. $y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$;

asimptote $x = -1$, ishodište je dvostruka tačka.

10. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$;

Max u tački $P(3,-4,5)$,

min u tački $Q(-3,4,5)$,

Infleksija u tački $R(0,0)$,

Asimptote $x = \pm\sqrt{3}$ i $x+y=0$.

11. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

Max u tački $P(-3,-3\frac{1}{8})$,

min. nema,

Infleksija u točki $Q(0,0)$,

Asimptote $x = -1$ i $y = \frac{1}{2}x - 1$.

12. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$;

Max u točki $P(0,0)$,

min u točki $Q(\sqrt[3]{4}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{4})$,

Infleksija u točki $R(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2})$,

Asimptote $x=1$, $y=x$.

13. $y = \frac{1}{x-2} + 1$

Max nema,

Min nema,

Infleksija nema,

Asimptote $x = 2$,

$y = 1$.

14. $y = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

asimptote $x = \pm 1$, ishodište je dvostruka tačka.

15. $y = \frac{x}{x^2-1}$;

asimptote $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. Ekstrema nema.
infleksija u tačci $P(0,0)$.

16. $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

asimptote $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$
pri $x \cong 2{,}58$, $y \cong -2{,}51$ max
$x \cong 1{,}42$, $y \cong 2{,}60$ min.

17. $y = \frac{1}{x - x^2}$;

asimptote $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.
Max nema
pri $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$ min;
Infleksije nema.

18. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;
asimptote $x = \pm 1$, $y = 1$;
Max u tačci $P(0,0)$
min. nema
Infleksije nema.

19. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$;
Asimptote $x = 0$
Max nema
min u tačci $P(\frac{1}{2}, 3)$
tačka infleksije je u $P(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, 0)$.

Bednik - Bednica

Neodređeni integrali

1. $\int 3{,}4\, x^{-0{,}17}\, dx = 4{,}1\, x^{0{,}83}$.

2. $\int (\sin x + \cos x)\, dx = \sin x - \cos x$.

3. $\int \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x$.

4. $\int (\arcsin x + \arccos x)\, dx = \frac{\pi}{2} x$.

5. $\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x$.

6. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + \frac{4}{7} x \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

7. $\int (x^4 + x^3 + 2x^2 + 3)\, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} x^3 + 3x$.

8. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} \right) dx =$

$$= 2 \ln x - \frac{3}{2x^2} - \frac{4}{3x^3} - \frac{5}{4x^4} .$$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x$.

10. $\int \sin(5x+2)\, dx = -\frac{1}{5} \cos(5x+2)$.

11. $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{2 + 2x^2}} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{ar\,sh} x$.

12. $\int \left(\sqrt{x^3} - 2\sqrt[3]{x^2} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{x^3} + 4\sqrt[3]{x^2} \right) dx =$

$$= x^3 \left[\frac{2}{11} \sqrt{x^5} - \frac{72x}{23\sqrt[6]{x}} + \frac{16}{3} \right] .$$

NORTON GULD

13. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{3+5x^6} = \frac{1}{30}\ln(3+5x^6)$.

14. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(3+5x^6)^5} = -\frac{1}{120(3+5x^6)^4}$.

15. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+5x^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{3+5x^2}$.

16. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{7-3x^2} = -\frac{1}{6}\ln(7-3x^2)$.

17. $\displaystyle\int \frac{3x^2+6x+1}{(x^3+3x^2+x+1)^3}\,dx = -\frac{1}{2(x^3+3x^2+x+1)^2}$.

18. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2\,dx}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^3}{3}$.

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2(\arcsin x)^2}$.

20. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x$.

22. $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Parcijalna integracija.

23. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$.

24. $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$.

25. $\int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx = e^{ax} \dfrac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}$.

26. $\int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = e^{ax} \dfrac{\overset{a}{b} \sin bx - \overset{b}{a} \cos bx}{a^2 + b^2}$.

27. $\int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} x \,(x^2+1) - x\right]$.

28. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}\left[x^2 - \ln(1+x^2)\right]$.

29. $\int x \cdot \sin 2x \cdot dx = \dfrac{\sin 2x - 2x \cos 2x}{4}$.

30. $\int x \cos \frac{x}{2} \, dx = 2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2}$.

31. $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

32. $\int \operatorname{arc\,cos} x \, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2}$.

33. $\int x \, e^{mx} \, dx = \frac{1}{m^2} e^{mx}(mx - 1)$.

34. $\int x^2 e^x \, dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$.

35. $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

Razlomljeni integrali.

36. $\int \dfrac{2x^2 + 41x - 41}{(x-1)(x+3)(x-4)} \, dx = \ln \dfrac{(x-1)^4 (x-4)^5}{(x+3)^7}$.

37. $\int \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)(x+2)(x-3)} \, dx = \frac{1}{6} \ln \dfrac{x^2 (x-3)}{(x+2)^2 (x-1)}$.

38. $\int \dfrac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 4x + \ln \dfrac{x^2 (x-2)^5}{(x+2)^3}$.

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

39. $$\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln \frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+3)^3}}{x+2}.$$

40. $$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}.$$

41. $$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx = \frac{3}{2(x-2)^2} + \ln(x-5).$$

42. $$\int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\,dx = \frac{4}{x+2} + \ln(x+1).$$

43. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

44. $$\int \frac{10x^4 - 17x^3 - 24x^2 + 16x - 14}{2x-5}\,dx = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3x + \frac{1}{2}\ln(2x-5).$$

45. $$\int \frac{x^3 + 9x^2 - 4x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6)}\,dx = -\frac{43}{20}\ln(x-2) + \frac{103}{30}\ln(x-3) + \frac{43}{20}\ln(x+2) - \frac{73}{30}\ln(x+3).$$

46. $$\int \frac{dx}{x^6 - 3x^5} = \frac{1}{243}\left\{ \ln \frac{x-3}{x} + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{81}{4x^4} \right\}.$$

47. $$\int \frac{x^3+1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln(x-1) + 9\ln(x-2).$$

$\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln(x-1) + 9\ln(x-2)$

48. $$\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\,dx = \frac{2}{3}\ln(x-1) + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

49. $$\int \frac{360x^2 - 106x - 47}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1}\,dx = \ln(2x-1)^4(3x+1)^5(4x-1)^6.$$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+3}{2}$.

51. $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2-4}{x^4+x^3-4x^2-4x}\,dx = \ln \frac{x(x^2-4)}{x+1}$.

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}$.

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$.

54. $\displaystyle\int \frac{x^3+15}{x^4-10x^2+9}\,dx = \ln \frac{\left[(x+1)^7(x-3)^7(x+3)^2\right]^{\frac{1}{8}}}{x-1}$.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{128}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{128}\ln(x+1$

$\displaystyle -\frac{1}{256}\cdot\frac{x-3}{x^2-2x+5} - \frac{1}{512}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} - \frac{1}{256}\ln(x^2-2x+5)$.

56. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{2(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$.

57. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

58. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+7} = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}$.

59. $\displaystyle\int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x+3}{2(x^2+1)} + \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

60. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2} = \frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}$.

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{3}{16}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^4-1}$.

62. $$\int \frac{x^5 - x^4 - 26x^2 - 24x - 25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2} = -\left[\frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)} + \frac{1}{16}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} - \mathrm{arctg}\,(x+2)\right].$$

63. $$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

64. $$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Iracionalni integrali

65. $$\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = -\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + x\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

66. $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}\sqrt{(a+bx)^3}\,(3bx-2a),$$

67. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right).$$

68. $$\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt{x^3}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt[3]{x}} - \frac{18}{\sqrt[6]{x}} + \ln x,$$

69. $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 3\ln(\sqrt[3]{x}+1) + 6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}.$$

70. $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1-x}} = \ln(\sqrt[3]{1-x}-1) - \frac{1}{2}\ln\left[\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + 1\right] + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{1-x}+1}{\sqrt{3}}.$$

71. $$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \sqrt{x^2-1} + 2\,\mathrm{arth}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

72. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -x - 4\sqrt{x} - 4\ln\left(\sqrt{x} - 1\right).$

73. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,d = 2\sqrt{x+1} + \ln\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}.$

74. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{3}\left(x + 2a\right)\sqrt{a-x}.$

75. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

76. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}} = \arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}}.$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 7}} = \ln\left(x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 + 5x + 7}\right)$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8 + x - x^2}} = \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{33}}.$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-1}{2}.$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x + \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}\right).$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}} = \frac{1}{3}\ln\left(3x - 1 + \sqrt{9x^2 - 6x + 2}\right).$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}.$

83. $\displaystyle\int \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{7}{2}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right).$

84. $\displaystyle\int \frac{5x - 7}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}\,dx = -\frac{5}{2}\sqrt{5 - 4x - x^2} + 3\arcsin\frac{x+2}{3}.$

85. $$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx = \frac{1}{6}\left(2x^2+x+7\right)\sqrt{x^2+2x-1} - 2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right).$$

86. $$\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{6}\left(2x^2-5x+1\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right).$$

87. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{1}{2}\,(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}\,.$$

88. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x}\,.$$

89. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right).$$

90. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-1}+8\right)\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}\,.$$

91. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = \operatorname{arctg}\frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}\,.$$

92. $$\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right).$$

93. $$\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left[\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right].$$

Trigonometrijski integrali

94. $$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\,.$$

95. $$\int \sin^3 x\cdot\cos^4 x\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\,.$$

96. $\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}$.

97. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x$.

98. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x$.

99. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{3}{2} x$.

100. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x . \cos x + x}{2}$.

101. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2}$.

94.

102. $\int \sin^3 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$.

103. $\int \frac{dx}{\sin^2 x . \cos^2 x} = -2 \operatorname{ctg} 2x$.

104. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$.

105. $\int \sin^2 x . \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x$.

106. $\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{tg} x \right)$.

107. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

108. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

109. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x$.

110. $\int \frac{\sin x \, dx}{3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}} \right)$.

Određeni integrali. Kvadratura.

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

3. $$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = -\ln 2.$$

4. $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}.$$

5. $$\int_a^b x^n\, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

6. $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$$

7. $$\int_a^b \frac{dx}{c+x} = \ln \frac{c+b}{c+a}.$$

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2} - 1$$ $1-\sqrt{2}$

9. $$\int_0^8 \sqrt{\frac{1}{32} x^3}\, dx = 12{,}8.$$

10. $$\int_0^{10} e^x\, dx = e^{10} - 1.$$

11. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

12. $$\int_0^1 \frac{x^3\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right).$$

13. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x \; dx}{(2+\cos x)^2} = \frac{2}{3}.$$

14. $$\int_0^{a} \frac{x^2\,dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\ln 2 .$$

15. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \frac{1}{5} .$$

16. $$\int_0^{1} \frac{x^2 \operatorname{arc.sin} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8} .$$

17. $$\int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3 .$$

18. Odredi površinu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

$$P = ab\pi .$$

19. Odredi površinu koju zatvaraju parabole $x^2 = 2py$ i $y^2 = 2px$, među sobom.

$$P = \frac{4}{3}p^2 .$$

20. Izračunaj površinu omeđenu krivuljom $y = x^2 - 4x + 5$, osi apscisom i pravcima $x = 3$, $x = 5$.

$$P = \frac{32}{3} .$$

21. Izračunaj površinu omeđenu dvjema parabolama $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

$$P = 8 .$$

22. Izračunaj površinu omeđenu krivuljom $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ i pravcima $x = 0$, $y = 0$ i $x = 3$.

$$P = \frac{765}{12}$$

23. Izračunaj površinu koja je omeđena parabolom $y = x^2 - 2x + 2$, njenom tangentom u točki $P(3,5)$ i ordinatom.

$P = 1.$ $P = 8$

24. Specifična toplina za dijamant pri običnim temperaturama računa se prema jednadžbi
$c = 0,0947 + 0,000994t - 0,00000036 \cdot t^2$ Kal/grad.
Koliku količinu topline daje dijamant težine 0,1 g, ako se hladi od 100° na 10° C ?

$Q = 1,33$ kal.

25. Odredi površinu koju zatvaraju krivulje $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i $\boxed{x = 1.}$

$P = e + \frac{1}{e} - 2.$

26. Izračunaj površinu omeđenu krivuljama $y^2 = 2x + 1$ i $x - y - 1 = 0$.

$P = \frac{16}{3}.$

27. Brzina tijela neka je dana formulom $v = \sqrt{1+t}$ m/sek. Odredi put koji je tijelo prešlo nakon 10 sek od početka gibanja.

$S = 23,7$ m.

28. Kod harmonijskog titranja neke tačke zadana je brzina jednadžbama $v = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$
(t = vrijeme, T = period titraja, φ_0 = na početna faza).
Odredi položaj tačke u vremenu t_2, ako znamo, da se u momentu t_1 ona nalazila u položaju x_1.

$$x_2 = x_1 + \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \varphi_0\right).$$

Numerička integracija

1. Površina četvrtine jediničnog kruga je $\frac{\pi}{4}$. Prema tome je $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.
Odredi po trapeznoj formuli približnu vrijednost broja π.

2. Pomoću Simpsonove formule izračunaj vrijednost integrala

$$\int_{1,05}^{1,35} f(x)\,dx$$

ako su zadane slijedeće vrijednosti za x i $f(x)$

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

$P = 0{,}96.$

3. Izračunaj po Simpsonovoj formuli približne vrijednosti integrala

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x^3} \doteq 1{,}090\,,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2-x^4} \doteq 0{,}575\,,$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \doteq 1{,}147.$$

Pomoću integracije razvij u red ove funkcije:

1. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$

2. $\int e^{-x^2}dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!.3} + \frac{x^5}{2!.5} - \frac{x^7}{3!.7} + \dots$

3. $\operatorname{ar\,sh} x = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$

4. $\operatorname{ar\,th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$

5. Razvij u binomni red ove funkcije:

a. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2x^2}{3.6} + \frac{2.5}{3.6.9}\cdot x^3 - \dots + \dots$

b. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \dots$

6. Izračunaj pomoću binomnog reda vrijednost ovih korijena :

a.) $\sqrt[3]{9} = 2{,}080080$,

b.) $\sqrt{11} = 3{,}3166248$,

c.) $\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3.9} - \frac{1}{9.9^2} - \frac{5}{81.9^3} - \frac{10}{243.9^4} - \dots\right)$,

d.) $\sqrt{47} = 7\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{49} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{4}{49^2} - \dots\right)$,

e.) $\sqrt[5]{1000} = 4\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128} - \frac{2}{25}\cdot\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \frac{6}{125}\left(\frac{3}{128}\right)^3 - \dots\right]$,

f.) $\sqrt{3} = \frac{7}{4}\left(1 - \frac{1}{2.49} - \frac{1}{8.49^2} - \frac{1}{16.49^3}\right)$.

488

Volumen rotacionih tjela.

1. Figura omeđena lukovima parabola $y = x^2$ i $y^2 = x$ okreće se oko osi apscise. Izračunaj volumen nastalog tijela.

$$V = 0{,}3\,\pi.$$

2. Izračunaj volumen tijela nastalog okretanjem krivulje $y = e^x$ oko osi x, u granicama $[0\ 1]$.

$$V = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

3. Površina omeđena krivuljom $y = xe^x$ i pravcima $x = 1$ i $y = 0$ okreće se oko osi x. Izračunaj nastali volumen.

$$V = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right).$$

Dvostruki i trostruki integrali.

1. $$V = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} (x + y)\, dy\, dx = \frac{1}{3} r^3 .$$

2. $$V = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{a} dz\,dy\,dx = \frac{\pi a}{2}.$$

3. $$V = \int_{0}^{2}\int_{0}^{+\sqrt{2x-x^2}}\int_{0}^{a} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx = \frac{8}{9}a^2.$$

4. $$V = \int_{-R}^{+R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

Težište

Težište moment tromosti i statički moment.

1. Odredi koordinate težišta plohe ispod krivulja

a.) $y = \sin x$ u intervalu $[0, \pi]$

b.) $y = e^x$ u intervalu $[0, 1]$

c.) $y = \ln x$ u intervalu $[1, 2]$

d.) $y = x^2$ u intervalu $[0, 1]$.

a.) $\xi = \frac{\pi}{2}$; $\eta = \frac{\pi}{8}$,

b.) $\xi = \frac{1}{e-1}$; $\eta = \frac{1}{4}(e+1)$,

c.) $\xi = \frac{8\ln 2 - 3}{8\ln 2 - 4}$; $\eta = \frac{2(\ln^2 2 - 2\ln 2 - 1)}{2\ln 2 - 1}$,

d.) $\xi = \frac{3}{4}$; $\eta = \frac{3}{10}$.

Fourierovi redovi.

1. Razvij u fourierov red ove funkcije :

a.) $f(x) = e^x$ u intervalu $[-\pi, +\pi]$,

b.) $f(x) = \sin x$ -"- —"— $[0, \pi]$,

c.) $f(x) = x$ -"- —"— $[0, \pi]$,

d.) $f(x) = x^2$ -"- —"— $[-\pi, \pi]$,

e.) $f(x) = x^2$ -"- —"— $[0, 2\pi]$.

a.) $$f(x) = e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{17}\cos 4x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{3}{10}\sin 3x - \frac{4}{17}\sin 4x + \ldots\right\}$$

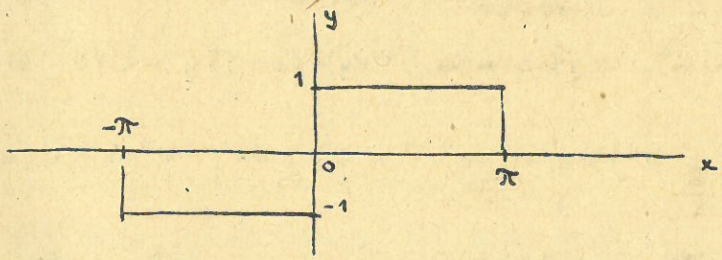
b.) $$f(x) = \sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7}\right),$$

c.) $$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \left(\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 6x\right),$$

d.) $$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{\cos kx}{k^2},$$

e.) $$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

2. Razvij u Fourierov red funkcije prema slici



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\sin(2h+1)x}{2h+1}.$$

3. Razvij u Fourierov red funkciju $f(x) = \pi - x$ u intervalu $[0, \pi]$. Pomoću tog reda izvedi red za π.

$$f(x) = \pi - x = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right);$$

za $x = \frac{\pi}{2}$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

(Leibnizov red)

4. Razvij u Fourierov red samih cosinusa funkciju $f(x) = x$ u intervalu $[0, \pi]$.

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right).$$

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Separacija varijabla

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+1}{x^2+1} = 0$; $\quad \frac{x+y}{1-xy} = c$.

2. $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0$; $\quad \ln xy + x - y = c$.

3. $(x-1)\,y' + y^2 = 0$; $\quad y\,[c + \ln(x-1)] = 1$.

4. $2x^2\,dy = y\,dx$; $\quad y = e^{c - \frac{1}{2x}}$.

5. $(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - yx^2)\,dy = 0$; $\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \pm \ln\frac{y}{x} = e$. C

6. $(x^2 - 3)\,y' - 2\sqrt{3}\,y = 0$; $\quad xy - cx + \sqrt{3}\,y + c\sqrt{3} = 0$.

7. $(e^{x+y} + e^y)\,dy = (e^{x+y} + e^x)\,dx$; $\quad e^y + 1 = c(e^x + 1)$.

8. $y\,e^{2x}\,dx - (1 + e^{2x})\,dy = 0$; $\quad 1 + e^{2x} = cy^2$.

— problemi —

9. Reakcija etil acetat (etilni ester octene kiseline) s natrijevom lužinom odvija se prema jednadžbi:

$CH_3COOC_2H_5 + NaOH = CH_3COONa + C_2H_5OH$.

U početku eksperimanta koncetracija etil acetata bila je $a = 0{,}01$ mol/litri, a koncentracija natrijevog hidroksida $b = 0{,}002$ mol / l. Nakon 23 min. koncentracija etil acetata smanjiće se za 10 % od prvotne količine. Za koje vrijeme će se ona umanjiti za 15 %

14 min.

10. Vodiko peroksid razlaže se pod utjecajem topline ili katalizatora prema jednadžbi

$$H_2O_2 \rightarrow H_2O + O.$$

Za 10 min poslije početka reakcije koncentracija H_2O_2 bila je 0,276 mol/l, za 20 minuta 0,105 mol/l. odredi konstantu brzine reakcije

$$K = 0{,}0514.$$

11. Kod zagrijavanja rastvora dibrom jantarne kiseline ona se razlaže prema jednadžbi.

$$H_2C_4H_2Br_2O_4 = H_2C_4HBrO_4 + HBr.$$

kod temperature 50° C konstanta brzine reakcije jednaka je $k = 0{,}000261$. Početna koncentracija je $a = 0{,}025$ mol /l.

Kolika će biti koncentracija nakon 3 sata ?

$$C_a = 0{,}0368 \text{ mol/l}.$$

12. Odredi konstante brzine reakcije radioaktivnog raspadanja za ove elemente :

a.) Radij (Ra) ako je $T = 1590$ god.,

b.) Radon (Rn) ako je $T = 3{,}825$ dana,

c.) Torijum (Th) ako je $T = 1{,}39 \times 10^{10}$ god.

a.) $k = 1{,}38 \times 10^{-11}$/sek,

b.) $k = 2{,}097 \times 10^{-6}$/sek,

c.) $k = 1{,}2 \times 10^{-18}$/sek.

13. Neka se nađe dali postoji krivulja za koju je duljina tangente od dirališta do x osi konstantna i jednaka 1.

$$\pm x = \sqrt{1-y^2} + \ln y - \ln\left(1 + \sqrt{1-y^2}\right) + C$$

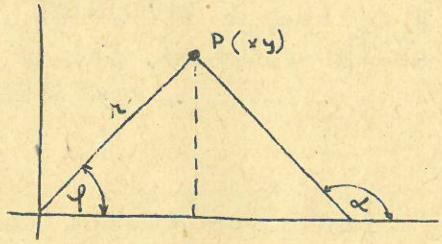
(Ova se krivulja zove traktriks.)

14. Neka se odrede krivulje, koje imaju u svakoj točki suptangentu konstantne duljine a.

$$y = e^{\frac{x-k}{a}}.$$

15. Neka se odredi gibanje točke tako, da je smjer gibanja okomit na radij vektor.

$$x^2 + y^2 = c.$$



16. Neka se nađe krivulja s konstantnom subnormalom.

$$ax - \frac{1}{2}y^2 = C$$

17. Naći sve krivulje, kod kojih je suptangenta konstanta a.

$$y = ce^{\frac{x}{a}}.$$

Homogene dif. jednadžbe

1. $x \cdot \sin\frac{y}{x}\,dy - y\sin\frac{y}{x}\,dx + x\,dx = 0$; $cx = e^{\cos\frac{y}{x}}$

2. $(x^3 - 2y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$; $x^3 + y^3 = cx^2$

3. $(x^2 + 2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy + 5y^2)\,dy = 0$;
$$x^3 + 3x^2y + 9xy^2 + 5y^3 = C.$$

4. $2xy\,dx - (2x^2 + y^2)\,dy = 0$; $y = ce^{\frac{x^2}{y^2}}$.

5. $y^3\,dy + 3y^2x\,dx + 2x^3\,dx = 0$; $y^2 + 2x^2 = c\sqrt{x^2 + y^2}$

6. $(x^2+y^2)\,dx = 2xy\,dy$; $y^2 = x^2 - cx$.

7. $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; $x^2+y^2 = cy$.

8. $y' = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$; $x = c\,e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

9. $\dfrac{xy'-y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; $\sin\dfrac{y}{x} = cx$.

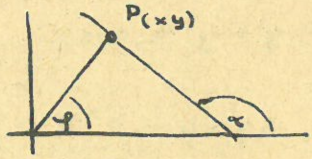
10. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$; $y = x\,e^{1+cx}$.

11. $x^3y' = y(y^2+x^2)$; $x = c\,e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$.

12. $(2x+y)\,dx + x\,dy = 0$; $x^2 + xy = c$.

13. Neka se odrede krivulje, kod kojih tangenta čini sa osi x dva put toliki kut kao radij vektor.

$x^2+y^2 = cx$.



14. Kako glasi jednadžba krivulje, kod koje je aritmetička sredina između suptangente i subnormale jednaka apcisi?

$y^2 = 2px - p^2$.

15. Kako glasi jednadžba krivulje kod koje je otsječak tangente na osi y jednak radij-vektoru?

$x^2 = c^2 - 2cy$

Linearne dif. jednadžbe

1. $\dfrac{dy}{dx} + y\operatorname{cotg}x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y = \dfrac{1}{\sin x}(-\ln\cos x + c)$.

2. $y' - xy = x$; $\quad y = ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

3. $\frac{dy}{dx} + y = 2e^x$; $\quad y = e^x + C.e^{-x}$.

4. $\frac{dy}{dx} - 3\frac{y}{x} = x$.

Neka se nađe krivulja, koja prolazi kroz točku $P(1,0)$.

$$y = x^3 - x^2.$$

5. $y' \cos x + y \sin x = 1$; $\quad y = \sin x + C \cos x$.

6. $y' + y - 2x = 0$; $\quad y = Ce^{-x} + 2x - 2$.

7. $y' + 2y = 4x$; $\quad y = Ce^{-2x} + 2x - 1$.

8. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; $\quad y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$.

9. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$; $\quad y = (x + c)(1 + x^2)$.

10. $y' + y = \cos x$; $\quad y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

11. $xy' + y - e^x = 0$; $\quad$ za $x = a$ $y = b$.

$$y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}.$$

12. Na tjelo mase m djeluje sila proporcionalna s vremenom (koeficijent prop. $= k_1$) od momenta, kada je brzina bila jednaka nula. Protiv toga tijela djeluje sila, koja je proporcionalna brzini (koeficijent prop $= k$).

Odredi zavisnost brzine od vremena.

$$v = \frac{k_1}{k}\left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}}\right).$$

13. Odredi jednadžbu familije krivulja, kojima je početna ordinata bilo koje tangente jednaka apcisi točke dirališta.

$$y = Cx - x \ln x.$$

14. Odredi jednadžbu krivulje kod koje je površina pravokutnika, sa stranicama: apscisa bilo koje točke i početna ordinata tangente povučene u toj točki, konstantna i jednaka a^2.

$$y = Cx - \frac{a^2}{2x}.$$

Egzaktne dif. jednadžbe

1. $(x^2 + y^2 - 1)\,dx + 2xy\,dy = 0;$

$$\frac{x^3}{3} + y^2x - x = c.$$

2. $(x^2 + 2yx)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0;$

$$\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} = c.$$

3. $(x^3 + 3y^2x)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0;$

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c.$$

4. $(x^2 - 3y)\,dx + (y^2 - 3x)\,dy = 0;$

$$\frac{x^3}{3} - 3xy + \frac{y^3}{3} = c.$$

5. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x + 1)\,dy = 0;$

$$x^2 - xy + x + y^2 - y = c.$$

6. $y\,dx + (x + y)\,dy = 0; \quad xy + \frac{1}{2}y^2 = c.$

7. $\left(\frac{y}{x} + \ln y\right)dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right)dy = 0; \quad x^y \cdot y^x = c.$

8. $(2x^2 + 2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy = 0;$

$$\frac{2}{3}x^3 + x^2y + y^2x - y^3 = c.$$

9. $(x^2 + \ln y)\,dx + \frac{x}{y}\,dy = 0; \quad \frac{x^3}{3} + x\ln y = c.$

Diferencijalne jednadžbe višega reda

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$.

2. $y'' - 4y' = 0$; $y = c_1 e^{4x} + c_2$.

3. $y'' + y' - 2y = 0$; $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$.

4. $y''' = y'$; $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$.

5. $y''' - 13y' - 12y = 0$; $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x}$.

6. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$;

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}.$$

7. $y^{IV} = 16y$; $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$.

8. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$; $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$.

9. $64 y^{VIII} + 48 y^{VI} + 12 y^{IV} + y'' = 0$;

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\cos\frac{x}{2} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)\sin\frac{x}{2} + c_7 x + c_8.$$

10. $y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$;

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 \sin x + c_4 x \sin x + c_5 \cos x + c_6 x \cos x.$$

11. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$.

12. $y''' - 8y = 0$; $y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos\sqrt{3}\,x + c_2 \sin\sqrt{3}\,x)$.

13. $y'' - 2y' + 2y = 2x$; $y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x + 1$.

14. $y'' + 2y = x^2 + 1$; $y = c_1 \cos\sqrt{2}\,x + c_2 \sin\sqrt{2}\,x + \frac{x^2}{2}$

15. $y'' + y' - 6y = e^{x}(3 - 4x)$; $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + x e^{x}$

16. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$; $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right)$.

17. $y'' - 6y' + 8y = e^{x} + e^{2x}$; $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{2}x e^{2x}$.

18. $y'' - y = 1 - x^2 + e^{2x}$; $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + x^2 + 1$.

19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^{x}$;

$$y = \left(\frac{1}{60}x^5 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3\right)e^{x}.$$

20. $y'' + 4y = \sin 2x$; $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x$.

21. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$;

$$y = \frac{1}{2}e^{3x}(x^2 - 2x + 2) + C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

22. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;

$$y = \frac{1}{74}(5 \sin x + 7 \cos x) + C_1 e^{1x} + C_2 e^{6x}.$$

$\cancel{C_1 x e^{2x} + C_1 e}$

1.A-9m/L E

S A D R Ž A J

I. DIO

Strana

Diferencijalni račun

II. DIO
Integralni račun

Me

III. DIO
Diferencijalne jednadžbe

IV. DIO

ISPRAVCI

Strana	Redak	
1		Namjesto I.DVORNIK stavi J.DVORNIK
5		Na slici 4 prvu naznačenu racionalnu točku poslije O označi sa M.
6	9	Izraz za D^2 treba glasiti $D^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
11	18	Iza .... kutom φ stavi okruglu zagradu).
11	24	Namjesto ... Gausova ravnina .... stavi.... Gaussova ravnina ....
14	17	U izrazu za $\frac{a+b_i}{c+d_i}$ stavi umjesto $\frac{r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)(\cos\omega + i\sin\omega)}{\rho(\cos^2\omega - i^2\sin^2\omega)}$ izraz $\frac{r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)(\cos\omega - i\cdot\sin\omega)}{\rho(\cos^2\omega - i^2\sin^2\omega)}$
14		U zadnjoj formuli zatvori uglasti zagradu.
16		U slijedu na dnu stranice namjesto $\frac{4}{5}$, stavi $\frac{5}{6}$
18	14	Izraz u zagradi treba da glasi: (čitaj: suma a_n od 1 do ∞)
19	19	Namjesto $a_3 = \frac{7-13}{2}$ stavi $a_3 = \frac{7+13}{2}$
22	19	U formuli 4 zadnji član u brojniku treba staviti u uglastu zagradu.
27	2	Namjesto $q < 1$ stavi $\lvert q\rvert < 1$
29	2	Namjesto S_{2n+1} stavi $S_{2^{n+1}}$
29		Predzadnji redak. Iza ... red za izračunavanje broja.... stavi π .
30		Nazivnici Machinovog reda treba da glase $3\cdot5^3$, $5\cdot5^5$, ... $3\cdot239^3$ $3\cdot239^5$ .... i t.d.
31	9	Izraz $\lvert A(B-b_n) + b_n(A-a_n)\rvert \geqq$ treba da glasi $\lvert A(N-b_n) + b_n(A-a_n)\rvert \leqq$.
34	8	Izraz za η treba da glasi $\eta = -x\sin\varphi + y\sin\varphi$
42	11	Izraz za površinu OAB treba da glasi $P_{t_1} = \frac{1\cdot tg\alpha}{2}$
47	15	Namjesto ... vrijednosti apcise ... stavi .... vrijednosti apscise .....

Strana	Redak	
51	3	Namjesto Konstanat sumanda ... stavi Konstanta sumanda .....
53	11	Namjesto Derivarija kvocijenta ... stavi Derivacija kvocijenta ....
54	22	Izraz za y' treba da glasi $y' = -\frac{7}{x^8}$
64		Na slici 56 označi koordinatne osi sa x i y .
69		Zadnji redak. Izraz za $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ treba glasiti $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}$.
73	7	Izraz za y' treba da glasi $y' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}$
81	34	Namjesto .... f(a) = 0 stavi... f'(a) = 0
82	9	Iza ... vrijednosti u točki ... stavi E.
86	25	Formulu za poopćeni Rolleov teorem označi sa (73)
88	14	Formulu za poopćeni teorem o srednjoj vrijednosti označi sa (74).
88	15	Izraz treba glasiti b - a = h
89	26	Formulu za Mac-Laurinov red označi sa (75).
90		Eulerovu relaciju označi sa (76).
91		Moivreovu relaciju označi sa (77).
92	24	Namjesto AD = AC treba staviti AD = DC
92		(Na dnu stranice) namjesto. Zbog $b > a$ stavi Zbog $b > 0$
101	11	Namjesto Potpuna diskusija ... stavi Potpunu diskusiju ....
104		Formula $f(a+h) - y = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+1)}(a+ \vartheta h)$ treba glasiti $f(a+h) - y = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(a+\vartheta h)$.
108		Ispred naslova Jednadžba tangente i normale stavi 17.
112		Ispred naslova Asimptote krivulja stavi 18.
119	8	U izrazu za R treba brojnik staviti na potenciju 3/2.
119	26	U izrazu za R treba brojnike staviti na potenciju 3/2.

Strana	Redak	
121	23	Namjesto ... što se jadno vidi ... stavi što se jasno vidi....
123	36	Namjesto ...podijelivši prethodno jednadžbu sa .... stavi ... podijelivši prethodno jednadžbu sa λ ......
128	28	Izraz za z treba glasiti $z = z_1 + \xi$
131	8	Namjesto ... čunja (a,b,c).... stavi ... čunja B(a,b,c).....
131		Na slici 103 treba označiti točku C.
132	1	Namjesto ... jednadžu ... stavi jednadžbu....
132	25	Namjesto ... sasvim analogno ... stavi ..... sasvim analogne .....
149		Izraz za totalni diferencijal treba glasiti $dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$
164		Ispred naslova Grafičko deriviranje stavi 29.
165		Ispred naslova Metoda sekante i metoda tangente stavi 30.
168		Ispred naslova, Neodređeni integral, stavi 31.
170		Ispred naslova Opća pravila ~~deriviranja~~ integriranja,stavi 32.
174		Ispred naslova Određeni integral, stavi 33.
177		Jednadžba na dnu stranice treba glasiti : $F(x) = \int_a^b f(\xi)d\xi$
188		Jednadžba za V treba konačno glasiti $V = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{y^2}{2}$
192		U rezultatu za s treba zatvoriti uglastu zagradu .
193	27	Namjesto ... za takav luk znamo da je $r{:}d\gamma$ ... treba stajati....za takav luk znamo, da je $r \cdot d\gamma$ .....
197		Zadnja dva reda treba umetnuti prije izraza, koji glasi $mx \frac{(m-1)x}{1} \frac{(m-2)x}{2} \dots \frac{(m-n+1)x}{n-1}$
198		Drugi član reda za e^x treba glasiti $\frac{x}{1!}$
199	8	Namjesto ... derivaciha .. stavi ... derivacija..
201		Drugi član reda za $\frac{\pi}{4}$ treba glasiti $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right)$

Strana	Redak	
206	8	Namjesto ... za svaki $x \neq 0$, dok za $x = 0$ to ne ... stavi ... za svaki $x \neq 0$, dok za $x = 0$ to ne ....
209	22	Integral treba glasiti $\int\left[P_{m-n}(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}\right] dx$
213		(Na dnu stranice) Izraz za $x_{1,2}$ treba glasiti $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i$
221		Izrazi za thx i cthx treba da glase $\text{thx} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{cthx} = \frac{1+t^2}{2t}$
222	1	Izraz za I_n treba glasiti $I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1}x + (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n$
223	19	Integrand treba glasiti $\sqrt{\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1}$
224	7	Izraz za chu treba glasiti $\sqrt{t^2 - 1}$
225	3	Izraz za dx treba glasiti $dx = \frac{-4u}{(u^2-1)^2} du$
225	13	Namjesto .... integrand je radionalna .... stavi ..... integrand je racionalna ......
225	16	Namjesto $R(u, \sqrt[3]{a+bu})$ stavi $R(u, \sqrt[5]{a+bu})$
228	17	Namjesto $dy \cdot dz \int_{x_1(4,2)}^{x_2(4,3)} dx$ treba staviti $dy \cdot dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx$
229	1	Namjesto $dz \int_{y_1(z)}^{y_2(2)} \int_{x_1(y,2)}^{x_2(y,2)} dx \cdot dy$ stavi $dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx \cdot dy$

Strana	Redak	
231	9	Završetak rečenice treba glasiti: ... volumena V i gustoće μ .
232	23	Rečenica treba glasiti Specijalan je slučaj, da je μ konstantan .....
236		Izraz za ξ treba glasiti $\xi = \dfrac{\int_0^r x\cdot\sqrt{r^2 - x^2}\,dx}{\frac{r^2\pi}{4}}$
241	20	Izraz za v treba glasiti $v = \rho\cdot\omega$
248		Na slici 150 poredak indeksa točaka treba glasiti P_0 , P_1, P_2 i x_0 , x_1 x_2
252	20	Namjesto $T = \frac{1}{3}$ stavi $T = \frac{1}{2}$, a mjesto $\nu = 2$ stavi $f = 2$
255	3	U argumentu za cos manjka π .
256	6	Namjesto .... za $(r + s)2$ ... stavi .... za $(r + s)2\pi$.
257	6	U argumentima za sinuse manjka .
262	3	Izraz treba glasiti $\frac{1}{2}\left[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\right]$
282		Ispred naslova Egzaktne diferencijalne jednadžbe stavi 54.
288		Ispred naslova Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, stavi 55.
290		Ispred naslova Homogena diferencijalna jednadžba s obzirom na x i y , stavi 56.
292		Ispred naslova Diferencijalne jednadžbe 2. reda bez veličina x i y': metni umjesto 56. 57.
296		Ispred naslova Linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima, stavi mjesto 57. 58.
305	8	Namjesto Za malo amplitude ..... stavi Za male amplitude ......
307	1	Namjesto Karakterisično jednadžba ...... stavi Karakteristična jednadžba ....
318	13	Izraz treba glasiti $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Strana	Redak	
319	1	Izraz treba glasiti $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y}$
320	1	Izraz treba glasiti

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} \right)$$