ADALBERTI ANT. BRESZTYENSZKY

BENEDICTINI PANNONII

LECTIONES ACADEMICAE

EX

MATHESI ADPLICATA

in usum

suorum Auditorum

conscriptae.

JAURINI,
TYPIS LEOPOLDI STREIBIG, 1819.

Reverendissimo,

ac

Amplissimo Domino

PAULO HORVÁTH,

Ordinis Sancti Benedicti,

S. Aniani Ep. et Conf. de Tihany

ABBATI,

Archi-Abbatiæ S. Martini de S. Monte
supra Pannoniam,

ac

totius S. Ordinis

Regenti,

Praelato Suo Gratiosissimo

Devoto animo dicat

Auctor.

Amice Auditor!

Ut Te a molestis, atque profectum in literis impedientibus potius, quam promoventibus scriptitationibus (alioquin ad mentem quoque Rationis educationis publicæ) liberem; opusculum hocce ex insignium Mathematicorum, atque Physicorum (puta Ambschell, Caille, Cametti, Döttler, Eytelwein, Fischer, Gehler, Hauser, Horváth, Kästner, Lorenz, Poppe, Scholtz, Vega, Wolff, Zallinger) libris conscripsi. Apis ego hoc in negotio eram. Optima in rem meam excerpsi, atque in unum totum systematicum composui. Plura in eo deprehendes, quam, ut exiguo, per Rationem educationis publicæ concesso, tempore Tibi exponere possim, idque ideo: ut si olim animus Tibi esset ulteriora quoque degustandi, initiola quædam præ manibus haberes, quo fontibus, e quibus ego hauseram, in Tui perfectionem melius, et commodius uti posses. Ex iis, quas adduxi, propositionibus quædam brevius, quam res postulet, expositæ sunt, ut sic attentionem Tuam in collegiis acuerem. Methodo græca per definitiones, axiomata, postulata, hypotheses, lemmata, theoremata, problemata, corollaria, et scholia non sum usus, ut totum systematicum, atque harmonicum acquiras, quod dicta methodo vix obtinetur; secutus sum hac in parte recentiores Scriptores optimos. Eadem methodo quoque practicam Geometriam, atque Architecturam Tuo commodo publici juris facere intendo. Utere itaque hoc opusculo ad Dei gloriam, Tuique perfectionem.

Jaurini die 1. Januarii anno 1819.

A. B.

Pag.	Lin.	*Menda*	*emenda.*
7	18	$\frac{1}{B}\ \frac{1}{b}$	$\frac{1}{B} : \frac{1}{b}$
49	10	si extra	si *Fig.* 11, & 12. extra
50	13	b p;	b p = a b;
66	21	$\frac{MG^3}{2HC}$	$\frac{MG^3}{2HC^2}$
66	23	HC • MC	HC • ML
82	8	ABCK	ABLK
90	1	BE	BF
96	27	$\frac{s^2}{c}$	$\frac{2s}{c}$
104	4	D	C

Conspectus materiarum.

Pag.

PARS II.

De motu in specie corporum gravium.

Appendix ex Catoptrica.

CONCEPTUS
Matheseos adplicatæ.

I. *Mathesis adplicata* extendit, et transfert generalia Matheseos puræ principia, et veritates ad quantitates concretas. Unde ea generatim scientia est quantitatis concretæ.

II. Pro diversitate objectorum, quibus Matheseos puræ principia, et veritates speciatim adcommodat, in diversas distinguitur scientias: et generatim quidem in *Adplicatam physicam*, quæ principia, et veritates Matheseos puræ proprietatibus, et mutationibus corporum naturalium adcommodat; et in *Adplicatam technicam*, quæ dicta principia, et veritates usibus, et necessitatibus hominum adplicat.

III. *Matheseos* proin *adplicatæ physicæ* objectum est sensibilis hic mundus universus: passim tamen quatuor tantum ex eodem capita excerpuntur, quæ mathematice se tractari commode patiuntur. Ea sunt 1. vis, ut, aut caussa motus, aut ejusdem impedimentum, 2. sonus, 3. lumen, 4. quædam totalium universi corporum phænomena. Unde *Mathesis adplicata physica* dicta principia adcommodat 1. dictis viribus corporum, et tum *Mechanica*, 2. Sono et tum *Phonologia*, 3. lumini, et tum *Photologia*, 4. denique totalibus universi corporibus, et tum *Astronomia* audit. Hinc

A. *Mechanicæ* pars ea, quæ de motu agit, generatim dicitur, vel *Phoronomia*, si motum sine relatione ad vires, quibus producitur; vel *Dynamica*, si vires motum corporum producentes consideret: speciatim vero *Stereodynamica*, si de motu corporum solidorum, et *Rhytodynamica*, si de motu fluidorum agat; hujus pars una, quæ de motu fluidorum liquidorum, qualia sunt vinum, crematum, mercurius; præcipue vero aqua, agit, *Hydrodynamica* vocatur; pars vero altera, quæ de motu fluidorum elasticorum, uti est aër, disserit, *Aëro-dynamica* audit. *Mechanicæ* pars altera, quæ de æquilibrio agit, *Statica* nuncupatur, et siquidem agat de æquilibrio solidorum, *Stereostatica*; si vero de æquilibrio fluidorum, *Rhytostatica* generice, speciatim vero *Hydrostatica*, quæ de liquidorum, et *Aëro-statica*, quæ de elasticorum fluidorum agit. Est et alius vocabuli *Mechanicæ* sensus, quo illud scientiam machinarum denotat; hujus pars, quæ de machinis aqua impellendis, aut aquæ attollendæ inservientibus agit, *Hydraulica*, quæ vero de machinis aëre, vaporibus &c. impellendis disserit, *Pneumatica* nuncupatur. Verum hæc *Mechanica practica* ad adplicatam Mathesim technicam rectius refertur.

B. *Phonologia* generatim de sono, quem simpliciter considerat, agit; comparat eundem in *Harmonica*, cujus pars *Tonometria* agit de structura regulæ harmonicæ, sive de monochordo, et ejus variis divisionibus. Ad Phonologiam etiam *Otologia*, seu *Acustica* refertur, quæ de structura auditus sensorii, de imitatione organi auditus, deque instrumentis acusticis &cc. agit.

C. *Photologia*, quæ de lumine agit, si intensitatem lucis in calculum revocet, *Photometria* audit: Si vero visionem per radios vario modo consideratos examinet, generatim quidem *Optica* dicitur; speciatim vero *Protoptrica*, si de radiis ab objecto directe, et immediate in oculos reflexis; *Catoptrica*, si de visione reflexa, sc. ope speculorum; *Dioptrica*, si de visione per radios refractos in diaphano aliquo corpore v. g. aqua, vitro &c.; *Metoptrica* denique, seu *Perspectiva*, si agat de radiis, qui in transitu per diaphanum corpus vestigium in ipso diaphano relinquere censentur.

D. *Astronomia* agit de corporibus totalibus universi, qualia sunt: Sol, planetæ, cometæ, et stellæ fixæ. Et siquidem in situs, magnitudines, figuras, distantias, phænomena, caussas, leges, directionesque corporum totalium systematis mundani inquirat, atque ad calculum revocet, *Mathematica*, secus *Physica* est *Astronomia*. Illa insuper, si de observationibus universi, quale a terra spectatum oculis nostris sese offert, agat, *Sphærica* dicitur; si vero de contemplatione universi, quale intellectu concipitur, agat, *Theorica* audit. Astronomiæ tamquam fundamento innituntur: Geographia mathematica, Hydrographia, Nautica, Chronologia, et Horographia.

IV. *Mathesis adplicata technica* sequentes sub se continet practicas scientias. 1. *Arithmeticam practicam*, seu *politicam*, quæ in diverso usu quotidiano, præcipue mercantili, necessaria. 2. *Geodæsiam*, seu *Geometriam practicam*. 3. *Mechanicam practicam* cum adplicatione ad artes mechanicas. 4. *Opticam practicam*. 5. *Geographiam mathematicam*, quæ telluris figuram, magnitudinem, et inde pendentes affectiones, verbo omnia in tellure dimensionis capacia considerat. Scientia hæc, ad utilitatem ex *physica Geographia* capiendam, summe necessaria est. 6. *Nauticam*, seu scientiam regendarum navium, quo *Hydrographia*, seu scientia maritimas mappas construendi, necessaria. 7. *Chronologiam mathematicam*, quæ de divisione temporis adparenti solis annuo, et lunæ menstruo cursui accommodata agit; docet proin constructionem calendarii, disquirit astronomicos cyclos, et periodos, determinat initia epocharum diversarum nationum, atque sic principia, et data *Chronologiæ historicæ* subministrat. 8. *Horographiam*, quæ divisionem diei in minora tempuscula, horas nempe, et minuta, ex adparente solis, aliorumque corporum cælestium motu diurno docet; et si quidem horologia, quæ ope umbræ solis, aut lunæ horas indicant, in dato quovis plano delineare doceat, *Gnomonica*, vel etiam *Sciaterica* audit. 9. *Metallometriam*, seu artem metatoriam montanisticam, quo *Geometria subterranea* spectat. 10. *Polemologiam*, quo *Pyrotechnia*, et *Tactica* referuntur. 11. *Alsologiam*, quæ ad silvas principia Matheseos adplicare docet. 12. *Architectonicas* quatvor scientias, *Architecturam* nempe *civilem*, *militarem*, *navalem*, et *aquariam*, seu *Hydrotechniam*.

PROPÆDEUMA
Matheseos adplicatæ.

I. Dum in Mathesi ratio caussarum, et effectuum determinatur, *caussa* sumitur pro omni eo, a quo alterius quantitatis magnitudo dependet, seu, ex quo intelligitur, cur aliquid tantum sit, quantum est, et non majus, aut minus; *effectus* vero censetur, cujus magnitudo a caussa, veluti mensura, pendet. Et si quidem plures caussae eodem modo ad effectum concurrant, *homogeneæ*; si vero dispari modo, *heterogeneæ* dicuntur. Caussae denique, quibus crescentibus, effectus crescit, decrescentibus, effectus decrescit, vocantur *caussæ agentes in ratione directa*; caussæ vero, quibus crescentibus, effectus decrescit, decrescentibus, effectus crescit, adpellantur *caussæ agentes in ra-*

tione reciproca, vel *indirecta*, vel *inversa*. Sic v. g. quia a numero, et robore hominum, aut animalium currum trahentium, item a pondere imposito, et longitudine viæ magnitudo, et facilitas translationis currus pendet, translatio currus est effectus productus a caussis enumeratis; et quia homines, equi, boves &cc. eodem modo ad dictum effectum concurrunt, caussæ sunt homogeneæ; verum qvia aliter concurrit numerus, aliter robur animalium, aliter item pondus impositum, et longitudo viæ, idcirco istæ caussæ sunt heterogeneæ; et quidem commoditas viæ, numerus, ac robur animalium sunt caussæ agentes in ratione directa; quia, quo major commoditas viæ, numerus, ac robur animalium, eo major, ac facilior est currus translatio, ac viceversa: at pondus currui impositum, et longitudo viæ, qua currus transferendus, sunt caussæ agentes in ratione reciproca; quo enim majus est pondus impositum, aut quo major conficienda via, eo minor, ac difficilior est (ceteris paribus) currus translatio, et contra. Sic sors quoque, tempus locationis, et fenus sunt caussæ heterogeneæ census, agentes in ratione directa; item altitudo et basis trianguli, parallelogrammi &c. sunt caussæ areæ trianguli, aut parallelogrammi &c. agentes in ratione directa.

2. In ea proportione geometrica, in qua ratio effectuum ex ratione caussarum determinatur, duo casus sumuntur, ita, ut duo

termini proportionis semper ad eandem rem spectent, atque ideo etiam bini sint homogenei, bini vero iis respondentes. Ad terminos hos ordinandos, quamquam varii modi suppetant, nos tamen maxime naturalem adoptamus, nempe, ut primum, et secundum locum homogenei, tertium vero primo, et quartum secundo respondentes occupent; eodem plane modo, quo in Geometria rationem arearum in triangulis, et parallelogrammis &c. exhibuimus; qui quidem ordo etiam in ratione reciproca teneri potest, si nimirum termini unius rationis fiant denominatores fractionum, quarum numerator est unitas, aut quævis alia quantitas constans: Ex Algebra enim constat, ex reciproca $A : a = b : B$

fieri posse $A : a = \frac{1}{B} \frac{1}{b}$ salva proportione.

3. Omnes tamen quatvor proportionis termini in Mathesi adplicata non adhibentur, sed pro iis bini duntaxat, ad eandem rem, eundemque casum spectantes, compendii gratia signo æqualitatis junguntur; (ponendo v. g. $S = CT$, loco $S : CT$, vel potius loco $S : s = CT : ct$) quotiescunque quantitates heterogeneæ in constanti quadam ratione mutantur. Quo in casu, nisi specialiter demonstretur, signum æqualitatis non notat realem æqualitatem, (nam hæ quantitates sunt heterogeneæ, nec communem mensuram habent) sed indicat quantitatem unius membri crescere, vel decrescere ea-

dem ratione, qua crescit, vel decrescit quantitas alterius membri.

4. Compendiariæ hæ expressiones proportionis geometricæ *Formulæ mechanicæ* adpellantur; de quarum tractatione, et variatione, hæc est regula generalis: *Omnes variationes, quæ in proportione geometrica circa binos terminos unius rationis, vel circa binos antecedentes, aut consequentes fieri possunt, salva proportione, eædem in tractatione formularum mechanicarum legitime fiunt*, si quidem formula quævis mechanica binos terminos unius rationis, aut binos antecedentes, vel binos consequentes proportionis geometricæ designet. (præc.)

5. Hinc 1. si sit *v. g.* $s = ct$

erit etiam $c = \frac{s}{t}$ & $t = \frac{s}{c}$ (Alg. 119.)

2. Si quis terminus in formula ponatur constans, h. e. in omni casu idem, seu æqualis, ejus loco unitas substitui potest. Sic *v. g.* si sit s constans in formula $c = \frac{s}{t}$, erit etiam $c = \frac{1}{t}$; nam sensus formulæ est: $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$ (3)

porro S, et s ponitur quantitas constans, h. e. in utroque hic assumto casu eadem, seu æqualis, unde $C : c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$ (Alg. 119.)

et hinc $c = \frac{1}{t}$ (3)

Et universim, etiamsi in æquatione quapiam reali, v. g. $s = ab$, h. e. area parallelogrami æquatur facto ex altitudine in basim, ponatur quantitas quæpiam constans, v. g. in assumto casu altitudo, ejus loco unitas substitui potest, ita, ut sit $s = b$, seu area $\square$ in ratione baseos, si altitudo sit constans; verum etsi hac redactione æquatio simplicior fiat, non tamen jam absolutum valorem, sed rationem duntaxat exhibet.

Et vicissim 3. si in data hypothesi ratio quantitatis per unicam, aut etiam plures heterogeneas exprimitur, dum ea generatim a pluribus pendet, colligitur ceteras, quæ non exprimuntur, esse constantes. Si enim generatim est $c = \frac{s}{t}$, et in quadam hypothesi $c = s$, quantitas t necessario constans est; nam sensus primæ formulæ est:

$$C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$$

et secundæ $C : c = S : s$ (3)

unde fit $\frac{S}{T} : \frac{s}{t} = S : s$

quæ vera proportio non est, nisi $T = t$, h. e. constans fuerit, adeoque æqualis unitati.

4. si sit v. g. $C = \frac{S}{T}$

et $C = \frac{Q}{M}$

fieri poterit etiam $\frac{S}{T} = \frac{Q}{M}$

Nam prioris sensus est: $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$

et posterioris $C : c = \frac{Q}{M} : \frac{q}{m}$

unde $\frac{S}{T} : \frac{s}{t} = \frac{Q}{M} : \frac{q}{m}$

et hinc formula $\frac{S}{T} = \frac{Q}{M}$

Item si sit *v. g.* $V = \frac{C^2}{D}$

et $C^2 = \frac{D^2}{T^2}$

erit etiam ob eandem rationem $V = \frac{D^2}{DT^2} = \frac{D}{T^2}$

aut si sit $V = \frac{D^2}{T^2}$

et $T^2 = D^3$

erit etiam $V = \frac{D^2}{D^3} = \frac{1}{D}$

Denique 5. si sit *v. g.* $A^m = D^n$

fieri potest $A = D^{\frac{n}{m}}$

vel etiam $A^{\frac{m}{n}} = D$ (Alg. 137.)

6. Effectus suis caussis semper proportionales esse, per se evidens est; et si quidem effectus pendeat ab unica caussa, sæpe ex ipsa notione caussæ, et effectus perspicuum fit, an in directa, an in reciproca ratione agat; sæpe tamen nonnisi experientia, et ratiocinio deducitur, uti cum ostenditur, gravitatem corporum esse in ratione directa massæ, et inversa duplicata distantiæ. Si dein effectus pendeat a pluribus, sed homogeneis caussis eodem, non vero opposito modo agentibus, caussæ hæ ut una tantum considerari possunt, quare effectus erit ut summa caussarum homogenearum; quodsi vero dependeat a pluribus homogeneis eodem, et opposito modo agentibus, effectus erit ut summa caussarum homogenearum eodem aliquo modo agentium, minus summa caussarum homogenearum opposito mo-

do agentium, sic v. g. si navis adverso flumine trahenda est, vis contraria fluminis, ceu caussa homogenea opposito modo agens a summa virium, quibus navis trahitur, subtrahenda est. Si itaque effectus ab unica caussa, vel a pluribus homogeneis pendet, haud ægre simplici proportione effectuum ratio exprimitur; at si a pluribus pendet heterogeneis directe, et reciproce agentibus, quæritur, quomodo ratio effectuum relate ad omnes caussas simul concurrentes determinanda sit. Qua quidem de re generale adferemus theorema, quod per totam Mathesim adplicatam amplissimi usus est.

7. Si effectus ejusdem speciei E et e producuntur a pluribus caussis heterogeneis V, T, et v, t directe tantummodo agentibus, erunt ii in ratione composita directa omnium caussarum directe agentium, adeoque erit

$$E : e = VT : vt, \text{ seu } E = VT.$$

Concipiatur enim tertius effectus similis, quantitate tantum a prioribus differens ε, productus a caussis V et t, quarum una effectui E, altera effectui e, communis sit, quoniam eadem caussa V tam in effectum E, quam ε pariter influit, evidens sane est, magnitudinis discrimen horum effectuum pendere a reliquis caussis directis, ita, ut sit

$$E : \varepsilon = T : t \text{ (2 et 6)};$$

quoniam porro caussa t tam in effectum ε, quam e, pariter influit, magnitudo horum effectuum pendet a reliquis caussis directis, ita, ut sit $\varepsilon : e = V : v$,

unde $E\varepsilon : e\varepsilon = VT : vt$ (Alg. 146) seu $E : e = VT : vt$ (Alg. 119)

seu $E = VT$ (3)

Eodem modo demonstratur, si effectus a pluribus, quam duabus caussis heterogeneis producatur, v. g. effectus I a caussis C, T, P, et i, a caussis c t, p; posito enim iterum tertio aliquo homogeneo effectu e, a caussis C, T, et p producto, erit ob rationem prius adductam $I : e = P : p$,

et ob prius demonstrata $e : i = CT : ct$,

adeoque $Ie : ie = CTP : ctp$

seu $I : i = CTP : ctp$

seu $I = CTP$.

8. Si effectus ejusdem speciei v. g. E, et e, producuntur a pluribus caussis heterogeneis reciproce agentibus v. g. D, T, et d, t; erunt ii in ratione composita reciproca omnium caussarum reciproce agentium, adeoque

$$E : e = \frac{1}{TD} : \frac{1}{dt}, \text{ seu } E = \frac{1}{DT};$$

Posito enim, ut prius, tertio quodam homogeneo effectu ε, qui pendeat a caussis D et t æque reciproce agentibus, quarum una effectui E, altera effectui e, communis sit, erit ob rationem eandem

$$E : \varepsilon = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$$

et $\varepsilon : e = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$

adeoque $E\varepsilon : e\varepsilon = \frac{1}{DT} : \frac{1}{dt}$

seu $E : e = \frac{1}{DT} : \frac{1}{dt}$

seu $E = \frac{1}{DT}$.

9. Et hinc Effectus quicunque ejusdem speciei v. g. E et e, producti a pluribus caussis heterogeneis partim directe, v. g. C, M, N, et c, m, n, partim reciproce v. g. F, L, et f, l, agentibus, sunt in ratione composita ex directa caussarum directe, et reciproca caussarum reciproce agentium, adeoque

$$E : e = \frac{CMN}{FL} : \frac{cmn}{fl}, \text{ seu } E = \frac{CMN}{FL}.$$

Posito enim, ut ad huc, tertio homogeneo effectu ε, producto a caussis C, M, N, directe, et f, l, reciproce agentibus, est

$$E : \varepsilon = \frac{1}{FL} : \frac{1}{fl}$$

et $\varepsilon : e = CMN : cmn$

adeoque $E\varepsilon : e\varepsilon = \frac{CMN}{FL} : \frac{cmn}{fl}$

seu $E : e = \frac{CMN}{FL} : \frac{cmn}{fl}$

seu $E = \frac{CMN}{FL}$.

10. Unde generatim: *Effectus quicunque productus a pluribus caussis heterogeneis est in ratione composita directa caussarum directe, et reciproca caussarum reciproce agentium.* Hujus tota vis eo tendit, ut, si nota sit ratio, quam habent singulæ caussæ ad effectum, nempe directum, vel reciprocum, inveniatur ratio, quæ ex omnibus simul caussis concurrentibus consurgit; quapropter omnis labor in eo versatur, ut singuli termini, seu singulæ caussæ, quæ ad effectum concurrunt, recte conferantur, videaturque, utrum directe, an reciproce agant; quod ex idea caussarum, et effectuum elu-

cet, vel aliunde innotescere debet, uti superius Nr. 6. innuimus. Sic v. g. perspicuum est: censum, tamquam effectum, eo magis crescere, quo major est sors, quo longiori tempore exponitur, et quo majus est fenus; hæ igitur caussæ singulæ rationem directam habent; unde census est in ratione composita directa sortis, temporis locationis, et fenoris, seu $c = stf$.

Elementa Mechanicæ.

PARS I.

De motu in genere.

Sectio I.

Notio motus.

11. *Motus* est continua, et successiva loci mutatio; seu translatio entis de loco in locum. Opponitur ei *quies*, seu perseverantia entis in eodem loco. In conceptu itaque motus occurrit primum aliquid, quod movetur, seu mobile; dein caussa, quæ moveat, seu vis motrix; posthæc directio, qua mobile moveatur; tandem spatium, per quod, et tempus, quo movetur; denique celeritas.

12. *Mobile* est illud ens, quod movetur, aut moveri concipitur. Hic, ubi motum in genere consideramus, pro mobili *punctum mathematicum* sumimus.

13. *Vis motrix* generatim hic loci sumitur pro caussa motus; h. e. pro omni eo, quod motum producere, aut impedire nititur.

14. *Directio* in motu est tendentia mobilis versus fixum aliquem terminum. Quod-

si directio toto motus tempore eadem invariata maneat, mobile lineam rectam describit, motusque *rectilineus* est; si vero directio durante motu mutetur, mobile lineam curvam describit, motusque *curvilineus* est: et si quidem continue directio mutetur; curva, quam describit, curva *continua* est, quæ in se redit, si mobile ad idem punctum, ex quo motus sui initium sumsit, revertatur.

15. *Spatium* a mobili percursum est longitudo viæ, seu ipsa linea, quam mobile reipsa percurrit. *Tempus* vero motus est eiusdem duratio, mensura quadam v. g. minutorum, horarum &c. determinata.

16. *Celeritas* est ratio temporis ad spatium. Magnitudo ejus innotescit e collatione spatii percursi cum tempore motus: quo enim majori, aut minori tempore eget mobile, ad idem spatium percurrendum, eo minori, aut majori; et contra, quo majus, aut minus spatium a mobili intra idem tempus percurritur, eo majori, aut minori celeritate intelligitur mobile pollere, ut adeo celeritas sit ut spatium eodem tempore percursum. Sic v. g. dum A uno secundo 4′ conficit; B vero eodem tempore 6′; illud celeritatem ut 4.; hoc ut 6. habere dicitur. Quodvis mobile seorsim, et in se spectatum celeritatem *absolutam*; relate ad aliud acceptum, respectivam habet. Illa pendet a vi motrice, quo enim hæc major, aut minor est, eo major, aut minor est etiam celeritas absoluta. In calculo compendii caus-

caussa celeritas unius minuti secundi potissimum assumitur.

17. Quum omnis motus alicujus vis effectus sit, motus leges a vis agentis natura dependent. Vis vero motrix, vel solummodo unicum activitatis impulsum mobili tribuit, quo peracto cessat, ampliusque in mobile non agit, consequenter *momentanea* est; vel continuos activitatis impulsus mobili tribuit, h. e. continue in mobile agit, adeoque *continua* est. Si *vis momentanea* in mobile agat, æquabilem in eo celeritatem producet; cum enim momentanea vis, peracto unico impulsu, ponatur cessare, nihil erit, quod sequentibus momentis, seu augeat, seu minuat celeritatem mobili communicatam. Si vero *vis continua* in mobile agat, inæquabilem in eo producet celeritatem: cum enim peracto primo impulsu vis continua non cesset, erit sequentibus etiam momentis aliquid, ipsa nempe vis continue agens, quæ celeritatem primo impulsu mobili communicatam augeat; effectus enim primi impulsus ex eo, quod novos acquirat, cessare non potest. Eo ipso autem *vis continua* est *acceleratrix*, quia celeritatem continue auget, et *constans* quidem, seu *uniformiter* talis, si ea non varietur, sed omni momento æqualiter agat, adeoque æqualia etiam celeritatis incrementa producat; secus *inconstans* erit, seu *variabilis*, aut *difformiter talis*.

18. Motus a vi momentanea productus, *uniformis*, vel etiam *æquabilis* dicitur, in quo mobile æqualibus tempusculis æqualia percurrere debet spatia; cum enim celeritas in eo eadem sit; celeritas autem sit, ut spatium eodem tempore percursum (16), spatia quoque eodem tempore percursa æqualia sint, est necesse. Motus vero a vi continua productus, *difformis*, aut etiam *inæquabilis* vocatur, in quo, quia celeritas est inæquabilis, mobile æqualibus temporis partibus inæqualia percurrit spatia. Verum, quia vis continua, acceleratrix est, quæ celeritatem continue auget (præc.), motus quoque *acceleratus* erit; et si quidem in eo æqualibus temporibus æqualia celeritatis incrementa producantur, (quod nonnisi vis acceleratrix constans producere potest), motus *uniformiter acceleratus*, si contra, *difformiter acceleratus* est. Et ex opposito, si mobile, certa primum celeritate æquabili motum, singulis dein momentis partem aliquam celeritatis amittat per impulsus vis alicujus continue, et opposita directione agentis; motus quoque *inæquabilis* erit; at non jam *acceleratus*, sed *retardatus*, quia celeritas ejus continue decrescit; et si quidem singulis momentis partem æqualem celeritatis amittat per impulsus æquales, et directe oppositos, (quod non nisi vis continua acceleratrix constans, sed opposita directione agens, præstare potest; quamque quidam ideo, licet minus recte, *vim retardatricem* vocant), motus erit *uniformiter retardatus*; si oppositum eveniat, *difformiter* talis vocatur. Unde hoc ex respectu generatim motus, vel *æquabilis* est, vel *inæquabilis*; et hic, vel *acceleratus*, vel *retardatus*; uterque vero *uniformiter*, aut *difformiter* talis.

19. At non unica tantum vis motum producere potest, verum etiam plures in idem mobile agentes; quo casu vires, si mobile secundum eandem, aut parallelam directionem movere conantur, *conspirantes*, aut *parallelæ* dicuntur; secus *contrariæ*: et si quidem hæ in una, eademque linea recta agant, *oppositæ* audiunt. Porro si plures in idem mobile, alias quiescens, agant, vel motus consequetur, vel non; si hoc, effectus virium se invicem tollunt, et vires in *æquilibrio* esse dicuntur: si illud, mobile secundum plures directiones uno, eodemque tempore ferri nequit, verum unicam tantum directionem habere potest; eodem itaque modo, ac si unica vis sola motum produxisset. Hæcce unica vis idealis, quæ si realis esset, eundem effectum produceret, quem plures vires realiter agentes producunt, vocatur *resultans*, vulgo *composita*; uti ipse motus *compositus*; vires vero illæ plures, motum hunc producentes, *vires componentes* audiunt. Ex hoc itaque respectu, quivis motus, vel *simplex* est, vel *compositus*: ille ab una vi, atque adeo etiam unica directione producitur; hic vero a duabus, aut etiam pluribus, quæ tamen sem-

per ad duas reduci possunt, uti inferius demonstrabitur.

20. Cum dupla vis duplum eodem tempore effectum, tripla, triplum &c. producere debeat, uti per se evidens est; sequitur effectus, a viribus diversis eodem tempore productos, esse viribus ipsis directe proportionales (1). Item cum eadem vis duplo tempore, duplum effectum, triplo, triplum &c. producat, uti per se patet: sequitur etiam vires easdem temporibus, quibus agunt, directe proportionales effectus producere; atqui vero effectus quicunque productus a pluribus caussis heterogeneis, uti hic a vi, et tempore, est in ratione composita directa caussarum directe agentium (10); eo ipso ergo *effectus sunt in ratione composita directa virium, et temporum, quibus producuntur*, seu literis initialibus exprimendo, $E : e = VT : vt$. Unde sequentes formulæ secundum Numerum 5. derivantur:

I. $e = vt$

II. $v = \frac{e}{t}$

seu, vis est in ratione directa effectus, et inversa temporis; h. e. eo major est vis, quo majorem effectum gignit, et minore tempore indiget.

III. $t = \frac{e}{v}$

IV. $e = t$,

si vis est constans quantitas, adeoque in duobus, aut pluribus casibus æqualis.

V. $e = v$, si tempus est constans.

VI. $v = \frac{1}{t}$, aut $t = \frac{1}{v}$

h. e. si effectus sunt æquales, seu constantes, vires sunt temporibus reciproce proportionales. Denique si vires, et tempora reciprocant, $E = 1$, h. e. effectus sunt constantes, seu æquales.

21. Eo ipso ergo *celeritas* quoque, ut effectus, *est in ratione composita directa vis, et temporis*. Hinc iterum formulæ sequentes:

I. $c = vt$

II. $v = \frac{c}{t}$

III. $t = \frac{c}{v}$

IV. $c = v$, si t est constans.

V. $c = t$, si v est constans.

VI. $v = \frac{1}{t}$, aut $t = \frac{1}{v}$, si c const.

et vicissim VII. $c = 1$, seu constans, si $v = \frac{1}{t}$.

Sectio II.

De motu rectilineo.

CAPUT I.

De motu simplici.

I. Aequabili.

22. Cum in motu æquabili, quovis æquali tempusculo, percurratur æquale spatium, quod est, ut celeritas (16. et 18); ut habea-

tur totum spatium toto aliquo tempore confectum; spatium, singulis æqualibus tempusculis confectum, toties est sumendum, quot æqualia talia tempuscula totum tempus continet; proin spatium singulis æqualibus tempusculis confectum, quod est, ut celeritas, adeoque ipsa celeritas multiplicata per tempus dabit totum spatium motu æquabili percursum: quare *spatium, motu æquabili confectum, æquale est facto ex celeritate in tempus.* a). Hinc

---

a) Cum spatia, et tempora, atque motus quantitates continuæ sint, et celeritates, ut tales considerari possint, poterunt etiam hæ quantitates symbolice repræsentari per *lineas*, quarum longitudo in eadem ratione augetur, vel minuitur, in qua ipsæ quantitates augentur, vel minuuntur. Quare theorema demonstratum, sic quoque demonstrari potest: si linea AD, *Fig.* 1. repræsentet celeritatem cujusdam mobilis motu æquabili progredientis, AB vero tempus, poterit etiam totum spatium ab hoc mobili tempore AB confectum per aream parallelogrammi rectanguli ABCD rite repræsentari. Quodsi enim tempus AB concipiatur divisum in tempuscula infinite parva A, m, n, r, B, eriganturque inde perpendiculares AD, mo, no, ro, BC, atque si tempusculo A respondeat celeritas, ut spatium AD percurrere possit; 2-do tempusculo m, mobile eadem directione percurret spatium DE = AD (18); 3-tio temp. n percurret EF = DE = AD, et sic porro: quia vero perpendiculares AD = mo = no = ro = BC, etiam æqualibus tempusculis correspondentibus spatiis AD = DE = EF &c. æquales sunt, potest spatium DE per perpendicularem mo, spatium EF per no, et sic porro, rite repræsentari; cum itaque eæ perpendiculares, quæ sibi immediate contiguæ concipiuntur, sternant totam assumti parallelogrammi aream, potest totum spatium, toto tempore AB, celeritate AD, æquabiliter percursum per aream parallelogrammi rectanguli rite repræsentari. Hæc itaque spatii per parallelogrammum repræsentatio nihil aliud significat, quam S : ABCD = ct : AB·AD.

I. $s = ct$

II. $c = \frac{s}{t}$

III. $t = \frac{s}{c}$

IV. $s = t$, si c constans.

V. $s = c$, si t constans.

VI. $c = \frac{1}{t}$, si s constans.

vicissim VII. $s = 1$, seu constans, si $c = \frac{1}{t}$ a).

Perse hic intelligitur, quodsi t referat minuta secunda, c designet celeritatem unius minuti secundi, adeoque per Nr. 16. spatium quovis minuto secundo confectum; s vero spatium toto tempore t, seu omnibus minutis sec. sub t comprehensis, percursum. Si vero t referat horas, aut dies &c. c designabit celeritatem unius horæ, aut diei &c., adeoque spatium una hora, aut die &c. confectum; s autem spatium toto tempore t percursum.

---

a) Per formulas has facillimo negotio resolvuntur tria illa de motu problemata, quæ in Algebra sub exemplo duorum cursorum proponuntur, et quorum usus est in Astronomia in determinando puncto, et tempore conjunctionis duorum astrorum; nempe

I. Datis celeritatibus duorum mobilium, et datis intervallis temporum, et locorum, a quibus incipiunt versus eandem plagam moveri, determinare tempus, quo conveniunt.

II. Data celeritate unius mobilis una cum tempore ab initio motus elapso, donec alterum moveri inceperit, invenire celeritatem ab alio adhibendam, ut dato tempore illud prius adsequatur.

III. Datis celeritatibus duorum mobilium, ac dato intervallo locorum, quo distant, et intervallo temporis, quo ex oppositis partibus versus se congrediuntur, invenire tempus, quo sibi occurrunt.

II. *De motu uniformiter accelerato.*

23. Cum in motu uniformiter accelerato vis acceleratrix constans æqualibus temporibus æqualia in motu producat celeritatis incrementa (18), celeritas vero priori aliquo tempusculo jam acquisita ex eo, quod nova accesserit, cessare non possit, necesse est, *celeritatem in mobili hoc motu acto crescere, ut tempus;* seu C = T (21. V); cum porro tempus crescat ordine, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5 - - -, etiam celeritatem in hoc motu juxta seriem numerorum naturalium crescere oportet. Sic si 1. momento temporis in hoc motu producatur unus gradus celeritatis, hunc sequenti momento mobile retinet, et præterea novum ab agente vi acceleratrice constante incrementum, celeritati primi temporis æquale, acquirit; unde celeritas mobilis in fine secundi momenti temporis est, ut $1 + 1 = 2$; tertio momento mobile hos duos celeritatis gradus retinet, et novum iterum ab agente vi, primi momenti æqualem, acquirit; erit itaque tertio momento celeritas, ut $2 + 1 = 3$, et sic porro.

24. Tempusculo itaque infinite parvo vis acceleratrix constans nequit producere, nisi celeritatem infinite parvam; secus, si finitam eo tempusculo jam produceret, cum illa continue agat, et mobile celeritatem acquisitam conservet, tempore finito, utpote summa infinite multorum tempusculorum, celeritas infinita evaderet, quod absurdum. Cum porro celeritas infinite parva, tempusculo infinite parvo producta, celeritatem finitam, quæ prius in mobili erat, non immutet (Alg. 180); movebitur mobile eo tempusculo eadem, seu constanti celeritate, imo, et directione; proin motu æquabili, et rectilineo. *Motus* itaque *mobilis, quacunque celeritate variabili progredientis, tempusculo infinite parvo consideratus, pro motu æquabili, et rectilineo haberi potest.*

25. Licet in motu uniformiter accelerato vis acceleratrix continue agat, quum tamen omnis impressio in tempore fiat, et ad impressionis cujusvis receptionem tempus requiratur, quamlibet vim acceleratricem constantem, ut congeriem indefinite multarum virium momentanee agentium, repræsentare licet, quæ actiones suas successive quidem exserunt; ita tamen, ut inter actionem quamvis priorem, et subsequentem tempusculum utcunque parvum, adeoque infinite parvum, transeat. Si itaque mobile motu uniformiter accelerato feratur tempore t, concipiatur hoc tempus in infinite multa tempuscula infinite parva, eo ipso æqualia, divisum, in quovis tali tempusculo producetur nonnisi celeritas infinite parva (præc.), seu $\frac{c}{\infty}$; quæ in his tempusculis infinite parvis crescet in hac temporis ratione:

$$\frac{c}{\infty}, \frac{2c}{\infty}, \frac{3c}{\infty}, \frac{4c}{\infty}, \frac{5c}{\infty} \text{ - - - - - - } \frac{\infty c}{\infty} \text{ (23)};$$

in qua serie terminus ultimus $\frac{\infty c}{\infty} = c$, significat celeritatem finalem toto tempore t paulatim collectam. Cum vero singulis his tempusculis infinite parvis motus pro æquabili haberi possit (præc.); ac proin celeritas sit, ut ipsum spatiolum æquali tempore percursum (16), termini hujus seriei infinitæ, simul exprimENT spatiola iis tempusculis percursa, ac summa seriei totum spatium s, toto tempore t, motu uniformiter accelerato confectum. Jam vero summa seriei infinitæ, ut numeri naturales crescentis, æquatur dimidio facto ex ultimo termino in numerum terminorum (Alg. 186), seu, cum numerus terminorum sit totum tempus t; dicta summa æquatur $\frac{ct}{2}$; igitur spatium quoque motu unifor. accelerato confectum $s = \frac{ct}{2}$; h. e. *dimidio facto e finali celeritate in tempus;* cum vero in motu æquabili sit $s = ct$ (22), sequitur: *spatium motu unif. accel. confectum esse dimidium illius spatii, quod eodem tempore celeritate finali motu æquabili percurritur;* eo ipso autem *mobile motu unif. accel. motum in fine motus adipiscitur tantam celeritatem, qua eodem tempore motu æquabili conficeret duplum spatii illius, quod motu accelerato confecit.*

Hinc itaque in motu unif. accel. est:

$$\text{I. } s = \frac{ct}{2}.$$

$$\text{II. } c = \frac{2s}{t}.$$

$$\text{III. } t = \frac{2s}{c}.$$

26. Quodsi porro spatia, motu uniformiter accelerato confecta, ponantur S, et s; tempora, quibus percurruntur, T, et t; celeritates, quas in fine motus acquirunt, C, et c; erit

$$C = \frac{2S}{T}$$

$$\& \quad c = \frac{2s}{t} \text{ (præc.)}$$

ergo $C : c = \frac{2S}{T} : \frac{2s}{t} = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$

atqui $C : c = T : t$ (23)

ergo $\frac{S}{T} : \frac{s}{t} = T : t$

seu $S : s = T^2 : t^2 = C^2 : c^2$

h. e. *spatia, motu unif. accelerato confecta, ab initio motus computata, crescunt, ut quadrata temporum, ad ea percurrenda impensorum, vel etiam, ut quadrata celeritatum in fine motus acquisitarum.*

Cum vero tempora crescant ordine numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 - - -; spatia, hoc motu confecta, ab initio motus computata, crescunt ordine quadratorum numerorum naturalium, adeoque ut 1, 4, 9, 16, 25 - - -; igitur mobile hoc motu conficit primo tempore spatium, ut 1, primo, et secundo tempore simul, ut 4, primo, secundo, et tertio simul, ut 9, et sic porro.

27. Cum denique spatium, quod quovis tempore finito percurritur, habeatur, tum per celeritatem, quam mobile jam in principio illius temporis habet, tum per celeritatis incrementum, quod durante eo tempore mobili accedit; celeritates vero, quas mobile in principio cujusvis temporis æqualis jam acquisivit, sint, ut:

$$0c,\ 1c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c\ \text{- - -}\ (23);$$

adeoque spatia, per has celeritates tempore t confecta, sint, ut

$$0ct,\ 1ct,\ 2ct,\ 3ct,\ 4ct,\ 5ct\ \text{- - -}\ (22),$$

et spatia respondentia incrementis celeritatis, quæ mobili intervallis æqualibus temporis t accedunt, sint, ut $\frac{ct}{2}$ (25); sequitur: spatia integra quovis tempore t, tam per celeritates jam acquisitas, quam per earum incrementa eidem tempori respondentia, confecta, esse, ut

$$0ct+\frac{ct}{2},\ 1ct+\frac{ct}{2},\ 2ct+\frac{ct}{2},\ 3ct+\frac{ct}{2},\ 4ct+\frac{ct}{2}\ \text{- -}$$

$$\text{seu}\quad \frac{1ct}{2},\quad \frac{3ct}{2},\quad \frac{5ct}{2},\quad \frac{7ct}{2},\quad \frac{9ct}{2}\ \text{- - -}$$

Cum vero termini hi progrediantur, ut series 1, 3, 5, 7, 9, - - - seu, ut numeri naturales impares, sequitur: *spatia motu unif. accel. confecta, singulis motus temporibus æqualibus seorsim respondentia, crescere ordine, ut numeros naturales impares.* Et alioquin, ut spatium, quovis sequenti seorsim sumto tempore motu hoc percursum, innotescat, spatium, præcedenti toto tempore percursum, subtrahendum est a

spatio, quod, et eodem seorsim sumto, et præcedenti tempore, ab initio motus computato, percurritur; cum autem spatia hujus motus, ab initio computata, se ordine excipiant, ut quadrata numerorum naturalium (præc.), spatiumque primo tempore percursum sit, ut 1; erit spatium secundo tempore seorsim sumto percursum, ut

	$4 - 1 = 3$
tertio tempore seorsim sumto, ut	$9 - 4 = 5$
quarto tempore, ut	$16 - 9 = 7$
quinto, ut	$25 - 16 = 9$

et sic porro; adeoque generatim ut 1, 3, 5, 7, 9 - - - a).

---

a) Veritates de motu unif. accel. geometrice quoque demonstrantur. Si enim in sensu *Numeri* 22. *a)* tempus, quo mobile vi acceleratrice constante agitur, repræsentetur per AB, *Fig.* 2. cathetum nempe trianguli rect. ABC divisam in plura quotcumque, v. g. 4 tempuscula inter se æqualia, Ae = ef = fg = gB, poterunt ordinatæ em, fn, go, BC, basi BC parallelæ, celeritates temporibus suis proportionales referre, erit enim Af : Ae = fn : em, item Ag : Ae = go : em, et sic porro: seu, celeritates em, fn, go, &c. reipsa crescent, uti tempora Ae, Af, &c. (23). Quodsi jam tempus AB concipiatur divisum in tempuscula infinite parva; singulis tempusculis sua respondebit celeritas, et celeritati spatiolum, eo, quod motus tali tempusculo haberi possit pro æquabili (24), in quo celeritas est, ut spatium eodem tempore percursum. Et celeritas itaque, et spatium per incrementa infinite parva crescent, velut lineæ parallelæ em, fn, go, BC aream trianguli ex punctis lineæ AB sternentes; summa igitur omnium harum linearum basi parallelarum, aream trianguli sternentium, erit simul summa omnium spatiorum, seu totum spatium tempore AB motu unif. accel. confectum; quare *spatium motu uniformiter accel. confectum rite exhiberi potest per triangulum rect. in quo una cathetus tempus, alia celeritatem finalem referat.*

28. Cum celeritas, a vi acceleratrice constante certo tempore producta, sit in ratione composita directa ejusdem vis, et temporis (21), est:

$$c = wt$$

atqui etiam $c = \frac{2s}{t}$ (25. II.)

ergo $wt = \frac{2s}{t}$

unde I. $w = \frac{2s}{t^2} = \frac{s}{t^2}$;

et si quidem tempus t ponatur constans, est $w = s$, h. e. *vires acceleratrices constantes sunt, ut spatia eodem tempore percursa.*

Porro si mobile eodem tempore AB, quo unif. accelerate fertur, progrediatur æquabiliter celeritate finali BC in motu accelerato acquisita, spatium, motu æquabili tempore AB celeritate BC confectum, erit parallelogrammum rect. ABCD, habens eandem altitudinem, et basim cum triangulo ABC, spatium motu unif. accelerato confectum repræsentante, quod triangulum, quia dicti parallelogrammi dimidium est, etiam *spatium, motu unif. acceler. confectum, est dimidium illius, quod eodem tempore celeritate finali motu æquabili percurritur.* Et viceversa.

Cum dein areæ horum triangulorum Aem, Afn, Ago, ABC, spatia ab initio motus computata, referentium, utpote similium, sint, ut quadrata laterum homologorum, assumta tempora, ab initio motus computata, respondentesque celeritates finales referentium, *spatia quoque, ab initio motus unif. accel. computata, crescunt, ut quadrata temporum, vel celeritatum finalium.* Spatia, motu hoc confecta, singulis temporibus, tam simul, quam seorsim consideratis, correspondentia optime exhibet *Fig.* 3. in qua numeri ex parte AB tempora; ex parte AC vero spatia, tam simul ab initio motus computata, quam singulis temporibus seorsim sumtis respondentia, referunt.

II. $s = \frac{wt^2}{2} = wt^2$.

III. $t = \sqrt{\frac{2s}{w}} = \sqrt{\frac{s}{w}}$;

et si quidem vires w sint eædem; est $t = \sqrt{s}$, h. e. *in motu unif. accelerato tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum.*

29. Similiter cum sit

$c = wt$ (præc. et 21.)

item $t = \frac{2s}{c}$ (25. III.)

est etiam $c = \frac{2sw}{c}$

seu $c^2 = 2sw$.

Unde I. $w = \frac{c^2}{2s} = \frac{c^2}{s}$.

II. $s = \frac{c^2}{2w} = \frac{c^2}{w}$.

III. $c = \sqrt{2sw} = \sqrt{sw}$;

et si quidem vires w sint eædem, est $c = \sqrt{s}$, h. e. *in motu unif. accelerato celeritates finales sunt in ratione subduplicata spatiorum.*

III. De motu uniformiter retardato. a)

30. Cum in motu *unif. accelerato*, æqualibus tempusculis, æqualia celeritatis incrementa producantur; in motu vero *unif. retardato*, celeritas æqualibus tempusculis æqualia decrementa patiatur (18); sequitur motum unif. retardatum directe opponi

---

a) Motus hic proprie quidem compositus est, verum, quia unif. accelerato directe opponitur, placuit cum claritatis majoris gratia huic immediate subnectere.

unif. accelerato. Hinc in motu unif. retardato singulis tempusculis amittitur gradus celeritatis, æqualis illi, quem vis acceleratrix constans secundum contrariam directionem producit: eo ipso autem utrique motui eædem prorsus competunt leges in oppositum sumtæ; eodem fere modo, quo ea, quæ progressioni cuipiam crescenti conveniunt, decrescenti quoque, at in contrarium, adplicantur.

31. Si itaque mobile celeritate initiali tali moveretur, ut intra min. sec. motu æquabili 12′ conficeret, accedente vi acceleratrice, opposita directione agente, primo min. sec. non feretur per spatium 12′, quia vis acceleratrix contraria directione agens in spatio hoc, initiali celeritati respondente, durante hoc tempusculo, destruit tantum, quantum uni min. sec. respondet (quod semper ut 1. assumitur); Itaque

primo min. sec. feretur per	12 —	1 =	11.
secundo " " " "	12 —	3 =	9.
tertio " " " "	12 —	5 =	7.
quarto " " " "	12 —	7 =	5.
quinto " " " "	12 —	9 =	3.
sexto " " " "	12 —	11 =	1.

quo tempusculo elapso motus per actionem vis acceleratricis priori directioni contrariam exstinquetur. Hac itaque ratione *spatia in motu unif. retardato singulis temporibus æqualibus respondentia decrescunt, ut numeri naturales impares.*

Quod-

Quodsi porro spatia a fine motus computentur, erunt in priori exemplo

post $6'' = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36$
post $5'' = 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$
post $4'' = 7 + 5 + 3 + 1 = 16$
post $3'' = 5 + 3 + 1 = 9$
post $2'' = 3 + 1 = 4$
post $1'' = 1 = 1$

Sic ergo *spatia in motu unif. retardato a fine motus computata decrescunt, ut quadrata temporum pariter a fine motus computatorum.*

Quodsi denique idem mobile celeritate initiali invariata per 6″ progrederetur, motu æquabili conficeret spatium $= 12 \cdot 6 = 72$; motu vero retardato per eadem 6″ confecit spatium $= 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36 = \frac{72}{2}$, h. e. dimidium illius. Ita ergo *spatium motu unif. retardato confectum est dimidium duntaxat ejus, quod celeritate initiali invariata; eodem tempore, describeretur.* a)

32. Si itaque mobile, vi acceleratrice constante impulsum, per aliquod spatium moveatur, dein celeritate in fine acquisita contra actionem illius impellatur; idem spatium eodem tempore motu unif. retardato conficiet, usque dum omnem celeritatem amittat. Vis enim eadem, celeritatem, quam

a) Proprietates motus unif. retardati in sensu *Numeri* 25. *a)* exhibet *Fig.* 3., at ordine inverso.

dato tempore per æquales semper impulsus produxit, eodem rursus tempore per æquales impulsus, at priori directe oppositos, destruet, dum mobile contra illius actionem impelletur. Unde vis acceleratrix constans eodem tempore eget ad celeritatem mobilis, contraria actioni illius directione progredientis, exstinguendam, quo egeret, ad eandem celeritatem motu unif. accelerato obtinendam.

CAPUT II.

De motu rectilineo composito.

33. Directiones virium, quæ simul idem mobile impellunt, ut motu composito feratur, vel conspirant, vel non; si hoc, vel sibi ex toto, h. e. e diametro, vel ex parte tantum, h. e. sub angulo, opponuntur. Hinc si duæ, aut plures vires in mobile agant, tres casus possibiles sunt.

34. Si itaque virium directiones conspirent, h. e. vires secundum unam, eandemque directionem, adeoque in linea recta una agant, mobile hoc in casu summa virium directione communi fertur; seu dein vires ipsæ fuerint ejusdem speciei, h. e. secundum eandem legem agentes (v. g. ambæ, vel momentaneæ, vel continuæ), seu diversæ (v. g. una momentanea, altera continua), uti per se evidens est. Sic v. g. si spatium, certo tempore T percursum, dicatur S; celeritas initialis vis unius momentaneæ C, et alterius c, erit $S = CT + cT$ (22). Si ve-

ro finalis per unam vim continuam tempore T acquisita celeritas dicatur C, per alteram vero c, erit $S = \frac{CT}{2} + \frac{cT}{2}$ (25). Si denique finalis per vim continuam tempore T acquisita celeritas vocetur C, initialis vero vis momentaneæ celeritas K, erit $S = KT + \frac{CT}{2}$.

35. Si dein virium directiones sibi e diametro opponantur, vel vires sunt æquales, vel inæquales. Si 1-um: mobile quiescet; quantitates enim oppositæ æquales se invicem destruunt, et elidunt. Erit itaque in sensu priori, si vires sunt momentaneæ, $S = CT - cT = 0$; si vero vires sunt continuæ, $S = \frac{CT}{2} - \frac{cT}{2} = 0$; si denique vires sunt diversæ speciei, $S = KT - \frac{CT}{2} = 0$; in illis itaque tempusculis, quibus continua vis æquatur momentaneæ, nullus erit motus; verum, quia vis continua continue agit, sequentibus tempusculis mobile secundum vis continuæ directionem lege motus accelerati movebitur. Si vero vires hoc in 2. casu fuerint inæquales, ex parte se tantum tollent, ita, ut motus fiat differentia virium, at directione fortioris; minor enim vis elidetur tota a fortiore, secundum id, quod minor oppositarum quantitatum tantum in majori destruat, quantum ipsa valet. Erit itaque in priori sensu, si vires fuerint momentaneæ, $S = CT - cT = d$, ubi $C > c$; si vero vires fue-

rint continuæ, $S = \frac{CT}{2} - \frac{cT}{2} = d$, ubi æque $C > c$; si denique vires fuerint diversæ speciei, et continua per aliquot tempuscula vi momentanea minor, motus consequetur secundum momentaneæ directionem unif. retardatus (18, et 30), ita, ut sit $S = KT - \frac{CT}{2}$, donec non fuerit $KT = \frac{CT}{2}$, ubi motus cessabit; verum sequentibus dein tempusculis mobile a sola vi continua contra ejus directionem motu unif. accelerato feretur. Si contra vis continua vi momentanea major fuerit, mobile secundum directionem vis continuæ feretur; et eo quidem tempusculo, quo effectus momentaneæ durat, vi, quæ differentiæ intensitatum virium agentium æquatur; sequentibus vero tempusculis sola vi continua secundum consvetas leges.

36. Si denique directiones virium angulum comprehendant, mobile, nec unius, nec alterius directione, sed media quadam via feretur, id est, motum vulgari sensu componet; et si quidem ambæ vires fuerint ejusdem speciei, mobile in *linea recta*, si vero fuerint diversæ speciei vires, in *curva* movebitur.

Impellatur enim mobile A, *Fig.* 2. duabus viribus ejusdem speciei, directionibus AD, et AB agentibus, celeritate per AD, et AB expressa, ita, ut, si vires sint æquabiliter agentes, h. e. momentaneæ, mobile, sola vi AD impulsum, 1-mo tempusculo

conficiat spatium Ah, = hi 2-do, = ik 3-tio, = kD 4-to tempusculo æquali confecto; perinde, sola vi AB actum, perficiat 1-mo tempusculo Ae, = ef 2-do, = fg 3-tio, = gB 4-to tempusculo æquali confecto: si vero vires sint unif. accelerantes, mobile 2-do tempusculo, sola vi AD actum, percurrat spatium hD, triplum spatii Ah 1-mo tempusculo æquali percursi (27.); pariter, sola vi AB actum, percurrat 2-do tempusculo eB, triplum de Ae 1-mo tempusculo æquali percurso. His positis, si mobile solam vim, directione AD agentem, sequeretur, 1-mo tempusculo perveniret ad h, essetque in linea hm, parallela ad AB; et si sola vi, directioneque AB ageretur, eodem 1-mo tempusculo pertingeret ad e, foretque in linea em, ad AD parallela; cum vero vires hæ se non elidant, quia directe sibi non opponuntur, utrique mobile obsequi debet, simul ergo in hm, et em, hoc est, in communi harum rectarum puncto m, esse debet. Quod cum eodem modo dici possit de n, o, C; imo de quibusvis etiam intermediis punctis, mobile per hæc puncta movebitur. Atqui vero puncta hæc esse in eadem recta, et quidem diagonali parallelogrammi, cujus duo latera celeritates, et directiones virium exprimunt, si vires sunt ejusdem speciei, sic ostenditur: Cum vires sint ejusdem speciei, rectæ AD, et AB, vires repræsentantes, dividentur in eadem ratione, ita, ut sit

Ah : Ae = hD : eB ; h. e. 1 : 1 = 3 : 3; seu, cum Ae = hm ; hD = ml ; eB = lC ; est Ah : hm = ml : lC ;
et hinc, quia etiam angulus h = l, quia uterque = D, triangula Ahm, et mlC sunt similia; ergo angulus hAm = lmC, et quia hAm = Ame (ob Ah = em, hm = Ae, et h = e), est angulus Ame = lmC, adeoque AmnoC recta (Geom. 13.), et quidem diagonalis parallelogrammi dicti ABCD. At vero, si hæ vires sint diversæ speciei, uti, si AD, *Fig.* 4. exhibeat vim æquabiliter agentem, AB vero vim acceleratricem, rectæ, Ah, et Ae = hm, non erunt proportionales cum rectis hD = ml, et eB = lC; poterit enim Ae = hm, minor esse, quam eB = lC, cum interim sit Ah = hD; et hinc triangula Ahm, et mlC, similia non sunt, atque, cum anguli eorum h, et l, sint æquales; inæquales esse debebunt A, et m; atqui vero, si AmC esset recta, quia parallelis AD, et el, occurrit, anguli dicti A, et m, æquales esse deberent. Unde linea, quam mobile hoc in casu percurrit, recta esse non potest; curva itaque sit, est necesse.

37. *Mobile* itaque, *duabus viribus ejusdem speciei sub angulo concurrentibus impulsum, describit* ex dictis *motu composito diagonalem parallelogrammi, cujus duo latera celeritates, et directiones virium exprimunt.* Vis hæc, per diagonalem AC, *Fig.* 2, composita, spectato effectu, æquipollet viribus componentibus AD, et AB, sub angulo concurrentibus; si quidem mobile in fine motus semper in eodem diagonalis puncto finali C compareat, sive utraque vi simul, sive seorsim successive adplicitis, impellatur mobile.

38. Datis duabus viribus componentibus, v. g. AD, et AB, *Fig.* 5. cum angulo directionum BAD inveniri, et determinari potest vis composita, vel *geometrice:* complendo nempe parallelogrammum ABCD, cujus diagonalis AC erit quæsita vis composita; vel *trigonometrice:* resolvendo triangulum ABC = ADC, in quo nota sunt duo latera AD = BC, et AB = DC, cum angulo intercepto B = D, qui, subtracto a 2R = 180°, quos duo vicini in parallelogrammo efficiunt, dato angulo directionum, innotescit.

39. Eadem ratione etiam tres, aut quotcunque plures in unam æquipollentem componi possunt; si nempe primum duabus quibusvis e componentibus per diagonalem composita æquipollens determinetur; tum hæc, ceu componens, componatur cum tertia; inde composita, tribus jam æquipollens, instar componentis considerata, componatur cum quarta e componentibus, et sic porro. Imo e contrario, si quæcunque vis, per lineam rectam exhibita, consideretur, veluti per diagonalem alicujus parallelogrammi composita, ea poterit, spectato effectu, in duas, vel quotcunque plures æquipollentes componentes decomponi, seu resolvi; quatenus nempe una per

duo alicujus parallelogrammi latera sub quocunque arbitrario angulo in duas componentes; hæ rursus, ceu compositæ spectatæ, in alias duas componentes, et sic porro, resolvuntur.

40. Hæc tamen virium resolutio vix aliter adhiberi solet, quam, ut vis, ad aliquod planum obliqua, in duas alias resolvatur, quarum una ad idem planum perpendicularis, altera eidem parallela sit. *Hac* autem resolutione, cujus frequentissimus est usus, nihil aliud exprimitur, quam *mutatio situs* mobilis moti respectu duorum *planorum* sibi invicem perpendicularium. Dum enim mobile, v. g. A, *Fig.* 6. directione AB, ad planum CD obliqua, movetur, accedit eodem tempore, tam ad planum CD, quam ad planum FG priori perpendiculare, uti evidens est; at mobile ex A, ad planum CD, nonnisi intervallo perpendiculari AE, quo ab eodem plano distat; ad planum vero FG, intervallo perpendiculari AF, quo pariter ab eodem dissidet, accedere potest; mobile igitur eodem tempore, quo ex A per AB ad B descendit, motu ad planum CD obliquo, fertur per intervallum AE motu perpendiculari, per intervallum autem AF motu ad idem planum parallelo.

41. Cum porro in omni parallelogrammo quævis bina latera opposita sibi æqualia sint, et parallela, poterit, v. g. BC, *Fig.* 5., retenta sua directione, semper substitui in locum AD, atque adeo duæ vires componentes per duo trianguli ABC

latera AB, et BC; vis vero composita per tertium latus AC repræsentari, earumque, tam compositio, quam resolutio non minus per latera parallelogrammi, quam per latera trianguli fieri.

Probe tamen semper directio virium agentium in earum, seu compositione, seu resolutione observanda.

42. Cum dein in quovis triangulo quodvis latus minus sit summa reliquorum; etiam vis composita minor erit summa omnium virium componentium; eo ipso autem in omni virium compositione aliqua pars virium deperditur. Neque id mirum: vires enim, sub angulo concurrentes, aliqua ex parte sibi directe opponuntur, dum alia ex parte conspirant; partes vero oppositæ sese tollunt. Sic si in *Fig.* 7. *et* 8. vires componentes AB, et AD sub angulo BAD concurrentes resolvantur, et AD quidem in AG, et AE; AB vero in AH, et AF, erit $\triangle DAG \cong \triangle HBC$, ob æquales ang. G, et H = R; DAG = BCH, utpote alternos, et internos, atque ob AD = BC, utpote opposita latera in parallelogrammo: quare etiam DG = HB, et AG = HC. Jam cum propter GD = AE, et HB = AF, etiam AE = AF, erunt AE, et AF vires æquales, et oppositæ, quæ se per consequens tollunt; AG autem, et AH vires residuæ, quæ, quia in casu *Fig.* 7. eadem directione agunt, motum perficient summa AG + AH, seu, quia AG = HC, summa AH + HC = AC; quia vero in casu *Fig.* 8. etiam

vires residuæ AG, et AH directe oppositis directionibus agunt, motum perficient differentia virium AH — AG, seu, quia AG = CH, differentia AH — CH = AC diagonali, in qua mobile ita incedit, ut eodem tempore perveniat ad C, quo singulis separatim agentibus, aut ad D, aut ad B pervenisset.

43. Dispendium, quod per compositionem vires patiuntur, exhibet differentia, quæ obtinetur, si vis composita a summa virium componentium subtrahatur.

44. Cum in quovis parallelogrammo duo anguli vicini æquentur 2 R; quo major fuerit unus, v. g. A, *Fig.5*, sub quo eædem duæ vires AD, et AB = DC concurrentes agunt, eo minor erit alter D; quo minor vero hic fuerit, manentibus iisdem lateribus, quae easdem vires repræsentant, eo minus erit latus AC, ipsi angulo D oppositum, seu diagonalis vim compositam exhibens; et contra, quo minor fuerit ang. A, eo major erit D, quo vero major est ang. D, manentibus iisdem lateribus, eo majus erit latus AC, ipsi oppositum, seu diagonalis vim compositam exhibens; uti in intuitione evidens est, et *Fig.* 9. manifeste exhibet. Igitur, *quo major est angulus, sub quo duæ vires concurrentes agunt, eo minor; et quo minor est angulus, eo major est inde composita vis respectu virium componentium.* Neque hoc mirum: facile enim ex *Fig.* 7, et 8. perspicitur, eo magis vires ad oppositionem tendere, ac per consequens, eo

majorem illarum partem tolli, quo obtusior est angulus, sub quo agunt, ita quidem, ut si is evadat infinite magnus, h. e. = 180°, vis composita evadat minima, et æqualis differentiæ virium componentium; et e contrario: eo magis convergere vires, atque conspirare, quo acutior est angulus, ita quidem, ut, si is evadat infinite parvus, h. e. = 0°, vis composita sit maxima, et æqualis summæ virium componentium.

45. Cum denique in quovis triangulo latera sint, ut sinus angulorum iisdem oppositorum, est in △ABC, *Fig.* 5,

AC : AB = *sin.* B : *sin.* n,

seu, quia n = m, et A + B = 2 R,

adeoque *sin.* B = *sin.* A, est:

AC : AB = *sin.* A : *sin.* m

item AC : AD = *sin.* A : *sin.* o

ergo etiam AB : AD = *sin.* m : *sin.* o

(Alg. 141); totidem rationes inter vires, et angulos, quos eæ inter se comprehendunt. Unde vi priorum duarum proportionum: *Vis composita est ad unam virium componentium, ut sinus anguli, sub quo vires agunt, ad sinum anguli, quem altera vis componens cum composita facit.* Vi tertiæ vero: *Vires componentes sub angulo concurrentes sunt reciproce, ut sinus angulorum, quos eæ cum vi composita faciunt.*

46. a) Porro ex ad huc dictis jam facile determinari potest tertia vis, quæ cum da-

---

a) Doctrina, quæ sequitur, de æquilibrio virium proprie quidem ad Staticam pertinet, verum cum theoria centis duabus, v. g. AB, et AC, *Fig.* 10. sub angulo BAC agentibus (vel etiam pluribus) æquilibrium constituat; producitur nempe vis composita AD, in oppositam plagam AE, ita, ut sit AE æqualis, et opposita vi AD, quare, cum hac æquilibrium constituet; cum vero hæc, viribus componentibus AB, et AC, æquipolleat, etiam cum his æquilibrium sustineat, est necesse.

47. Ex quo demum patet: quamlibet e tribus (aut etiam pluribus) viribus, in eodem puncto æquilibrium inter se constituentibus, esse æqualem, et oppositam vi e reliquis duabus (aut etiam pluribus) compositæ. Sic, v. g. AB opposita est, et æqualis vi AF, compositæ ex AE, et AC, quia æqualis CD = AF.

48. Imo si duæ vires (aut etiam plures), v. g. P, et Q, in lineam quampiam AB, uti in *Fig.* 11, 12, 13, 14, agant, apta virium agentium compositione determinari potest, tum vis tertia, quæ cum dictis æquilibrium constituat, tum ejus directio, atque in linea punctum, cui ea adplicetur. Si enim duæ vires in duo alicujus lineæ puncta agant, vel agunt secundum directiones inter se parallelas, vel non; in utroque autem casu, vel ex una, eademque lineæ parte, vel una vis ex una, altera ex alia lineæ parte.

---

tri gravitatis tota doctrinæ de compositione virium parallele agentium, harumque æquilibrio innitatur, hanc præmittere hoc loco, ubi de compositione virium agitur, non absque utilitate erit.

49. Si virium dictarum directiones AP, et BQ, sibi parallelæ ponuntur, uti in *Fig.* 11, 12, 13, 14; poterunt hæ, spectato effectu, in duas alias resolvi, et AP quidem in AR, et AM; BQ vero in BN, et BO, ita, ut AM conspirans cum linea AB, sit æqualis, et opposita BN; hæ per consequens nullum relate ad lineam AB effectum producent; reliquarum componentium directiones AR, et BO, sufficienter productæ concurrent in a. Cum vero quælibet vis in quovis directionis suæ puncto, spectato effectu, æqualiter agere debeat, idem prorsus effectus erit, seu vires AR, et BO, in punctis A, et B, seu in puncto a, secundum eandem directionem aR, et aO adplicatæ considerentur; in has itaque ex a, secundum dictas virium directiones transferantur vires ar = AR, et ao = BO, atque compleatur parallelogrammum a r b o, cujus diagonalis a b, ceu vis resultans, viribus a r = AR, et a o = BO, sub angulo R a O agentibus, æquipollebit; dico, a b quoque viribus AP, et BQ, quæ in rectam AB parallele agere ponuntur, æquipollere. Si enim ambæ hæ vires AP, et BQ, in a, adplicatæ, eodem modo, ut prius compositæ, in duas, prioribus æquales, et parallelas, resolvantur; erit vis AP = ap, et BQ = aq; hinc in *Fig.* 11, *et* 12, in quibus vires ex una, eademque lineæ AB parte parallele agere ponuntur, erit earumdem virium, utpote conspirantium, in lineam effectus = aq + ap = BQ + AP, seu (quia ap = qb, ob △

$apr = \triangle obq) = aq + qb = ab$. In *Fig.* vero 13, *et* 14, in quibus una vis ex una, alia ex altera lineæ parte parallele agere ponitur, erit earumdem, utpote oppositarum, in lineam effectus $= aq - ap = BQ - AP$, seu (quia $ap = bq$, ob $\triangle apr = \triangle obq$) $= aq - bq = ab$. Hinc itaque *vis ex duabus viribus, in lineam quampiam parallele agentibus, resultans æquatur harum virium summæ, si vires ex una, eademque parte agere ponuntur; secus differentiæ, illiusque directio cum directione virium agentium parallela est.*

50. Si virium in rectam agentium directiones AP, et BQ, sibi obliquæ ponuntur, uti in *Fig.* 15, 16, et 17, vel per similem virium, oblique agentium, resolutionem vis resultans obtinetur, vel, quia directiones hæ sufficienter productæ jam in puncto quopiam a, concurrunt, transferantur ex a, secundum virium oblique agentium directiones, ipsæ vires $ap = AP$, et $aq = BQ$, atque compleatur parallelogrammum $aqbp$, erit diagonalis ab, æquipollens viribus $ap = AP$, et $aq = BQ$, seu vis e duabus, in lineam oblique agentibus, resultans, atque ejus directio.

51. Quodsi itaque resultans vis ab, in quocunque casu ita producatur, ut rectam ABC alicubi in puncto C secet, atque ex C in plagam directioni resultantis ab, oppositam transferatur $CD = ab$, erit vis CD, directe opposita, et æqualis vi resultanti ab, æquipollenti viribus AP, et BQ, in lineam

ABC, seu oblique, seu parallele agentibus; eo ipso autem CD exhibebit tertiam illam vim, cum datis duabus AP, et BQ, in lineam agentibus æquilibrium sustinentem, atque C illud punctum, cui ea adplicari debeat.

52. Simili modo æquilibrans vis inveniri potest, si quotcunque vires secundum directiones qualescunque in lineam agant, si nempe primo duæ vires componantur, dein vis ex ipsis resultans, cum tertia componente, et sic porro.

53. Cum porro in *Fig.* 11, 12, 13, et 14, in quibus vires parallele agere ponuntur, $\triangle APR \sim \triangle aCA$, et $\triangle BQO \sim \triangle aBC$; est quoque

$$PR = AM = BN : AP = AC : aC,$$

et $$OQ = BN : BQ = CB : aC,$$

ergo $$AP : BQ = CB : AC \text{ (Alg. 143.)};$$

h. e. punctum C, cui tertia vis cum datis duabus æquilibrans adplicatur, secat rectam, in quam vires parallele agunt, in duas partes, quæ sunt in ratione inversa virium agentium.

54. Quodsi denique ex C in directiones virium parallele agentium demittantur perpendicula, quæ distantiam virium a puncto C exhibent, congruent quidem ea cum ipsa recta, si vires sub angulo recto in lineam agant, uti in *Fig.* 11, et 13, secus, ut in *Fig.* 12, et 14, efficient $\triangle BCF \sim \triangle CEA$;

unde $$CB : CA = CF : CE,$$

adeoque etiam $$AP : BQ = CF : CE \text{ (præc.)},$$

hoc est: *Vires, in lineam parallele agentes, in statu æquilibrii sunt in ratione reciproca suarum distantiarum a puncto, cui tertia vis æquilibrans adplicatur.* Idem de viribus in lineam, seu rectam, uti in *Fig.* 15, 16, et 17, seu inflexam, uti in *Fig.* 18, oblique ad se invicem agentibus esse verum, inde patet: quod vires componentes $ap = AP$, et $aq = BQ$ sint reciproce, ut sinus angulorum, quos eæ cum composita ab, efficiunt (45), sinus vero horum angulorum sint ea perpendicula.

55. Si itaq. $AP=BQ$, eti. $CB=AC$, et $CF=CE$; si vero $AP>BQ$, etiam $CB>AC$ item $CF>CE$; si den. $AP<BQ$, etiam $CB<AC$ item $CF<CE$; h. e. *Si vires, in lineam agentes, æquales sint, etiam distantiæ a puncto dicto æquales erunt; et si vires inæquales, etiam distantiæ inæquales erunt,* atque hoc in casu, *a majori vi minus, a minore magis dictum punctum distabit.*

Cum porro $AP : BQ = CF : CE$ est quoq. $AP+BQ : AP = CF+CE\ (=EF) : CF$, vel $AP+BQ : BQ = CF+CE\ (=EF) : CE$.

Unde I. $CE = \frac{BQ \cdot CF}{AP}$, et $CF = \frac{AP \cdot CE}{BQ}$;

h. e. *datis viribus, et unius a dicto puncto distantia, innotescit etiam alterius ab eodem puncto distantia.*

II. $CF = \frac{AP \cdot EF}{AP+BQ}$, et $CE = \frac{BQ \cdot EF}{AP+BQ}$;

h. e. *datis viribus, et earumdem a se invicem distantia, innotescit utriusque vis distantia a dicto puncto.*

56. Ex

56. Ex ad huc dictis jam sequitur: in omni systemate virium, parallele, aut non parallele in rectam agentium, dari punctum, per quod directio vis æquilibrantis transit; punctum hoc *centrum virium parallele, aut non parallele agentium* adpellamus. Hocque centrum esse in omni systemate virium solummodo unicum possibile, ex absurdo quoque demonstratur: cum secus, si extra C alicubi, v. g. in N, centrum virium præterea esset possibile, ex demonstratis sequeretur:

$$AP : BQ = BC : AC,$$

item $AP : BQ = BN : AN$;

unde $BC : AC = BN : AN$,

seu $BC : BN = AC : AN$,

cumque $BC > BN$, etiam $AC > AN$ foret, quod absurdum. Cum denique centri virium situs a punctorum tantummodo, in quæ hæ vires agunt, distantia inter se, et a magnitudine harum virium agentium dependeat, sequitur: *centrum virium esse in omni situ immutabile.*

Sectio III.

De motu curvilineo.

CAPUT I.

De motu curvilineo in genere.

57. Ut mobile lineam curvam describat, directionem suam jugiter mutare debet (14); eo ipso autem motus curvilineus ab unica vi, unicaque actione produci nequit, sed

alia vis quoque accedere debet, qua mobile a directione prioris vis detorqueatur. Impellatur enim mobile a, *Fig.* 19. directione a n, et celeritate, qua intra certum tempus percurreret rectam a n, sollicitetur quoque initio ejusdem temporis unico impulsu alterius vis, quo possit eodem tempore percurrere a o, abibit eo ipso per diagonalem a b, parallelogrammi a o b n (37). Quodsi jam novus impetus alterius vis non accesserit, viam ultra quoque directione b p continuabit, ita, ut sequenti tempore, priori æquali, percurrat b p; verum, si in b, vis altera, novo, et unico iterum impulsu agens, directione quavis b q ipsum determinet ad percurrendum b q, abibit per diagonalem b c, parallelogrammi b q c p, et sic porro; hoc itaque modo describetur curva non continua a b c d e - - - finitis lateribus a b, b c, c d - - - constans; et si quidem vis hæc detorquens ponatur agere versus idem punctum C finitis illis intervallis, mobile describet polygonum a b c d e f g h i k l m a, finitis lateribus constans, quia vis detorquens a o, b q, c s, &c, post finita temporis intervalla ponitur agere. At si vires detorquentes ponantur continue agere, nullum assignari poterit momentum, quo non agant, adeoque nullum etiam assignari poterit momentum, quo mobile a priori directione non detorqueatur; mobile igitur hoc in casu *curvam continuam* describet.

58. Ut itaque mobile lineam curvam continuam describat, minimum una virium, motum producentium, continua esse debet. Vis

illius directio, a qua mobile continue detorquetur, *curvæ tangens* est in puncto, ex quo mobile incipit moveri; cum enim mobile, nec unius, nec alterius vis directionem sequatur, sed media quadam via feratur, directio illa nullum aliud punctum cum curvæ ramo habebit commune, et quia præterea mobile continue ab illa directione detorquetur, extra curvæ ramum jacebit tota; *tangens* itaque sit, est necesse; quare vim quoque ipsam *tangentialem* nominamus.

59. Species curvæ dependet, tum ab angulo, sub quo vires agunt, tum, et præcipue a ratione, quam singulis momentis habent inter se vires motrices; quemadmodum generatim positio, et magnitudo diagonalis in motu composito ab angulo, et a ratione virium componentium pendet. Idem igitur in motu fit curvilineo, quia quodvis infinitesimum latus curvæ quædam diagonalis est. Et si quidem diversi sint anguli, etsi vires componentes eandem inter se rationem servent, alia, atque alia diagonalis, ac proin diversa curva describatur, est necesse. Si vero manente eadem vi detorquente, major ponatur celeritas tangentialis, mobile eodem tempusculo minus a tangente deflectit, et curva magis dilatatur; uti e contrario, si manente vi tangentiali major ponatur vis detorquens, curva magis incurvescit. Cum ergo innumeræ virium combinationes esse possint, nos solummodo eos motus curvilineos discutiemus, quorum usus in explicandis phænomenis naturæ frequen-

tius occurrit; et ideo primo quidem agemus de motu in linea parabolica, dein vero de motu, quem vires, centrales dictæ, producunt.

CAPUT II.

De motu parabolico.

60. Si mobile impellatur duabus viribus, una momentanea, et altera acceleratrice constante, in directionibus parallelis agente sub quocunque angulo, id parabolicam lineam describet. Si enim in *Fig.* 20, in qua dictæ vires sub angulo recto DAB agunt, AD exhibeat vim æquabiliter agentem, spatia AE, AG, AD, erunt inter se, ut tempora (22), adeoque iis æqualia Fm, Hn, BC, exhibebunt tempora ab initio motus computata; si dein AB exhibeat vim acceleratricem constantem, spatia AF, AH, AB, erunt inter se, ut quadrata temporum (26), seu, quia Fm, Hn, BC, tempora repræsentant, ut quadrata Fm, Hn, BC. Curva itaque linea AmnC, quam mobile hoc in casu describit (36 et 57), ejus est naturæ, ut abscissæ AF, AH, AB, a vertice A, in axe AB computatæ, sint inter se, ut quadrata semiordinatarum Fm, Hn, BC, ideoque curva *parabolica* est (Geom. 264). Quodsi vero mobile sub angulo obtuso DAB, *Fig.* 21. dictis duabus viribus agatur, erit iterum $AF : AB = AE^2 : AD^2$ $=$ a) $Fm^2 : BC^2$, h. e. abscissæ AF, AB,

a) Seu, quia in casu figuræ AF = Em = Cn; et AB = EG = CK, est $Cn : CK = AE^2 : AD^2$; et quia

diametri AB, sunt, ut quadrata ordinatarum ejusdem diametri Fm, BC; igitur iterum curva *parabolica* est. Si denique angulus DAB, *Fig.* 22. sub quo dictæ vires agunt, fuerit acutus, erit iterum $AF : AH = AE^2 : AG^2 = Fm^2 : Hn^2$, h. e. abscissæ AF, et AH, diametri AB, sunt iterum, ut quadrata ordinatarum Fm, Hn ejusdem diametri; adeoque curva iterum *parabolica* est, verum absque vertice.

61. *Mobile* itaque *duabus viribus*, *una momentanea*, *altera acceleratrice constante in directionibus parallelis agente*, *sub quocunque angulo impulsum*, *describit parabolicam lineam;* et si quidem angulus, sub quo dictæ vires agunt, sit rectus, uti in *Fig.* 20. mobile describit unum parabolæ ramum AmnC, cujus vertex est in puncto inchoati motus A; si vero dictus angulus est obtusus, uti in *Fig.* 21. duos parabolæ ramos AmCoq, cujus vertex in summo altitudinis puncto C exsistet; si denique angulus est acutus, uti in *Fig.* 22. describit arcum tantummodo parabolæ AmnC, cujus vertex excurrit ultra punctum inchoati motus A. In omnibus tamen hisce casi-

$AE : AD = AG : AK$, seu ob AG = EC = mn; $AE : AD = mn : AK$; est etiam $AE^2 : AD^2 = mn^2 : AK^2$; unde $Cn : CK = mn^2 : AK^2$, h. e. curva AmCoq, ejus est naturæ, ut abscissæ Cn, CK, a vertice C, in axe CK computatæ sint, ut quadrata semiordinatarum correspondentium mn, AK, quare curva iterum parabolica est, cujus vertex non jam in inchoati motus puncto A, verum, ultra, in summo ejusdem altitudinis puncto C, exsistet, bus directio vis accelerantis est una e parabolæ diametris, et directio vis momentaneæ, tangens ejusdem.

62. Quodsi vis tangèntialis AD, *Fig.* 23., quæ momentanea est, ponatur æqualis vi finali, quam motu uniformiter accelerato per rectam EA acquireret, recta hæc EA erit pars quarta parametri, pertinentis ad diametrum AH, et omnibus parabolis communis, quas mobile, hac vi impulsum, describere potest. *Si enim in diametro* AH, sumatur AB = EA, ducaturque ex B, ordinata ejusdem diametri BC, mobile A motu composito describet ex dictis arcum parabolæ AMC eodem tempore, quo vi impressa per EA = AB acquisita, æquabiliter iret ex A *in* D; et vi acceleratrice constante, ex A *in* B; ideoque spatia EA, AB, et AD, æquali tempore describentur. Jam vero spatium motu unif. accel. percursum EA = AB, æquatur dimidio spatio, quod celeritate finali eodem tempore motu æquabili percurreret (25),

seu $\quad EA = \frac{1}{2} AD,$

unde $\quad EA^2 = \frac{1}{4} AD^2 = \frac{1}{4} BC^2,$

sed $\quad BC^2 = p \cdot AB$

(Geom. Quadratum ordinatæ diametri æquatur facto ex parametro in abscissam ordinatæ correspondentem);

ergo $\quad EA^2 = \frac{1}{4} p \cdot AB,$

seu, quia $AB = EA$,

est $EA^2 = \frac{1}{4} p \cdot EA$, et $EA = \frac{1}{4} p$.

Idem eodem modo ostendi potest, si mobile A, vi per EA uniformiter accelerato motu acquisita secundum aliam directionem agatur.

63. Quia vero origo diametri parabolæ distat a directrice per quartam partem parametri pertinentis ad diametrum, patet: rectam EA, esse distantiam puncti A, a directrice omnium parabolarum, quæ vi per EA motu uniformiter accelerato acquisita describi possunt; h. e. si e puncto E, excitetur ad EB perpendicularis ET, ea erit directrix omnium harum parabolarum.

64. Cum porro distantia puncti parabolæ a directrice æquetur distantiæ a foco (Geom. 247), punctum vero A, *Fig.* 2. *et* 24. commune sit parabolis hisce omnibus M, V, m, v, &c., quæ vi, per EA dicto motu acquisita, describi possunt, sequitur: quodsi ex puncto A, tamquam centro, radio EA describatur circulus EOBRE, in punctis ejus peripheriæ sint foci omnium parabolarum, quæ dicta vi EA describi possunt.

65. Et hinc jam evidens sane est, quo directio vis tangentialis magis accesserit ad EA, vel AB, eo propius ad E fore punctum peripheriæ, in quo est focus parabolæ sic descriptæ, itaque eo propior etiam erit is focus directrici, consequenter vertici parabolæ; et viceversa, quo magis dicta directio recesserit ab EA, vel AB, eo remotius fore focum ab E, ergo et a directrice, ac per consequens etiam a vertice parabolæ, ita quidem, ut si ea directio maxime recesserit ab EA, et AB, adeoque, si angulum

rectum comprehendat cum EA, et AB, etiam focum illius parabolæ maxime abesse a directrice, cum nempe hoc in casu focus sit in B, cujus distantia a directrice est $= 2$ EA, a vertice autem AB. Unde, si vis tangentialis eadem sit, foci eo longius a parabolarum suarum vertice distant, quo directio vis tangentialis angulo recto propior est. Quia vero radius EA circuli eo etiam major fit, quo vis absoluta tangentialis est major, sequitur: sub eadem directione vis tangentialis, focos eo longius a parabolarum suarum vertice distare, quo vis major fuerit. Generatim itaque *focus parabolæ tanto magis distat ab ejus vertice, quanto vis tangentialis respectu vis acceleratricis major, et angulus a directionibus hisce comprehensus recto propior fuerit.*

66. Quodsi mobile A, *Fig.* 23. vi, per EA motu uniformiter accelerato acquisita, feratur secundum AD, et sumta hujus qualibet parte AD, ducatur DC, ad EA parallela, quæ sit tertia proportionalis post quadruplum ipsius EA, et assumtam AD, transibit mobile per C. Producta enim EA in H, ductaque CB, parallela ad AD, erit $AD = BC$, et $DC = AB$; quia vero ex hypothesi $4EA : AD = AD : DC$, est etiam $4EA : BC = BC : AB$, seu, quia $EA = \frac{1}{4} p$ (62), adeoque $4EA = p$, est $p : BC = BC : AB$; unde $BC^2 = p \cdot AB$. Quæ æquatio, cum sit parabolæ, cujus diameter est AH, hujus ordinata BE, et parameter 4EA, sequitur: mobile in dicta hypothesi per punctum E transire debere.

67. Ex ad huc dictis jam facile resolvi possunt problemata, quibus quæritur, aut angulus projectionis, dum vis tangentialis, et punctum, per quod transeat, dantur; aut vertex parabolæ, dum angulus projectionis, et punctum, per quod transeat, assignantur.

CAPUT III.

De motu, quem vires centrales producunt.

I. De motu hoc in genere.

68. Si una virium componentium, v. g. ao, in *Fig.* 19. *et* 25. mobile a, toto motus tempore versus idem punctum C urgeat, dum altera an, illud ab eodem puncto C removere nititur, mobile describet circa illud punctum *curvam continuam* abcd -- (57), quam generatim quidem *trajectoriam*, speciatim vero, si in seipsam redeat, *orbitam* nominamus. Vires ipsæ motum hunc producentes dicuntur *centrales;* et ea quidem, quæ mobile versus idem illud punctum continue urget, uti in *Fig.* 19. ao, *vis centripeta;* quæ vero mobile ab eodem illo puncto removere nititur, uti an, *vis tangentialis* (58), punctum ipsum C, circa quod mobile actione composita harum virium revolvitur, *centrum virium* audit; partem denique tangentialis vis eam, qua mobile reipsa a centro virium removeretur,

si sola tangentiali ageretur, *centrifugam vim* vocamus. Idealis hæc vis centripetæ opponitur, et per distantiam mobilis ab orbita exhibetur.

69. Recta, quæ mobile, in diversis orbitæ punctis exsistens, cum centro virium conjungit, *radius vector* dici consvevit. Jam eodem illo tempore, quo mobile e puncto a, in b, transit, radius vector quoque e situ aC, transit in situm bC, et aream abC interea *verrere* dicitur. Porro areas, quas radius vector verrit, esse temporibus, quibus verrit, proportionales, facile ostenditur, si tempus, quo motus durat, concipiamus in tempuscula infinite parva inter se æqualia dividi; primo enim id genus tempusculo mobile describet lineam rectam infinite parvam ab (24), secundo bc, tertio cd &c.; et hinc areæ, quas radius vector æqualibus his tempusculis verrit, sunt △-la aCb, bCc, cCd, &c., omnia interse æqualia propterea, quod, ducta recta pC, △-la aCb, et bCc sint æqualia eidem tertio △ bCp; cum △-la aCb, et bCp bases ab, et bp æquales, (utpote spatia vi tangentiali æqualibus tempusculis percursa), et communem altitudinem (utpote perpendiculum ex communi vertice C in basim ap demissum), △-la bCc, et bCp autem communem basim bC, et altitudines æquales (utpote perpendicula inter rectas parallelas bC, et pc intercepta) habeant: ducta vero recta rC △-la bCc, et cCd sunt eandem ob rationem æqualia eidem tertio △ cCr, et sic porro.

Quare aCb + bCc = 2 aCb, et aCb + bCc + cCd = 3 aCb, et sic porro. Hinc itaque △ aCb : △ aCb + △ bCc = △ aCb : 2 △ aCb = 1 : 2, sed etiam tempus, quo radius vector aream = △ aCb verrit, est ad tempus, quo aream = △ aCb + △ bCc verrit, ut 1 : 2. *Radius* itaque *vector verrit areas temporibus proportionales*, h. e. æqualibus temporibus æquales; duplo, duplam; triplo triplam &c.

70. Contra: *quodsi radius vector verrat areas temporibus proportionales, vis centripeta semper in idem punctum tendit.* Si enim in data hypothesi vis una constanter in idem punctum C, *Fig.* 25. non tenderet, sed eo, v. g. tempusculo, quo concipitur percurrere latus infinitesimum bc, niteretur extra punctum C, in aliud quoddam P; recta pc, non esset parallela ad bC, sed ad bP, unde nec △-la bCc, et bCp = aCb essent æqualia, quod contra hypothesim.

71. Cum itaque radius vector æqualibus tempusculis æquales verrat areas, data sectoris, certo tempusculo descripti magnitudine; tempus periodicum, quo nimirum integram orbitam mobile percurrit, eo sane majus est, quo major est numerus ejusmodi sectorum, seu, quo major est area integræ orbitæ; item data integræ areæ magnitudine, eo majus est idem tempus periodicum, quo major sector dato tempusculo descriptus; quia eo major est numerus id genus sectorum in integra orbitæ area; consequenter tempus periodicum est in ratio-

ne composita ex directa areæ, quam integra orbita comprehendit, et inversa sectoris, dato tempusculo descripti (10); seu, si T tempus periodicum, E aream ellipseos, S sectorem designet, est $T = \frac{E}{S}$.

72. Cum itaque areæ triangulorum, quas radius vector æqualibus temporibus verrit, sint æquales, et altitudines eorum, mobili ad centrum virium accedente, decrescant, bases eorum crescere, est necesse; h. e. bases triangulorum, quæ radius vector æqualibus temporibus verrit, sunt in ratione reciproca altitudinum; cum vero per bases has, utpote spatia tempusculis infinite parvis confecta, celeritates repræsententur, per altitudinem vero perpendiculum, e centro virium in basim, seu tangentem demissum, intelligatur, sequitur: *celeritatem mobilis, viribus centralibus acti, esse in quolibet orbitæ puncto in ratione reciproca perpendiculi e centro virium in ejusdem puncti tangentem demissi.*

73. Celeritas quoque mobilis, viribus centralibus sub angulo acuto acti, augetur, sub obtuso, minuitur, sub recto eadem manet. Si enim AB, *Fig.* 26. repræsentet vim centripetam, quam mobile in A persentiscit, poterit vis hæc resolvi in An = mB, quæ, ad tangentem ED normalis, exponit eam vis centripetæ actionem in puncto A, qua mobile in orbita retinetur, et in Am. Hæc, quia eandem habet directionem cum vi tangentiali AD, si mobile ex A versus D,

sub angulo acuto CAD moveatur, celeritatem mobilis augebit; quia vero, si mobile ex A versus E sub angulo obtuso CAE moveatur, directionem habet directioni vis tangentialis AE contrariam, celeritatem mobilis necessario minuit. At dum radius vector cum vi tangentiali angulum rectum comprehendit, vis centripeta non amplius potest in duas id genus partes resolvi; unde quamdiu vires centrales sub angulo recto concurrunt, tamdiu celeritas mobilis, viribus centralibus acti, neque augetur, neque minuitur, sed eadem constans manet.

II. *De motu circulari.*

74. Cum in circulo omnia perpendicula, e centro in tangentem cujusvis puncti demissa, utpote radii, sint æqualia, et radius vector cum tangente in omni puncto angulum rectum comprehendat, sequitur: celeritatem in motu circulari esse constantem (72, et 73), ac per consequens ipsum motum circularem esse æquabilem. Unde ex adverso, si mobile in orbita sua motu æquabili non feratur, concludi potest: illud mobile in circulo non moveri, sed in alia quapiam orbita, cujus natura pro virium centralium, et anguli subtensi diversitate quoque diversa est (59).

75. *Vim centripetam in circulo esse in ratione composita, e directa duplicata celeritatum, et inversa simplice diametrorum, aut radiorum, sive distantiarum a*

centro virium, *et circuli*, facile deducitur, si arcum infinite parvum AE, *Fig.* 27. quem mobile infinite parvo tempusculo percurrit, cum tangente congruere concipiamus, adeoque eundem pro linea recta habeamus; triangulum enim AEB eo ipso rectilineum, et ad E, quia hic angulus in peripheria situs semicirculo insistet, rectangulum erit; quare demisso ex recto angulo E in hypotenusam AB perpendiculo ED, erit $\triangle$ AED $\backsim$ $\triangle$ AEB, unde AB : AE = AE : AD, et hinc AD $= \frac{AE^2}{AB}$, seu, quia AD vim centripetam $=$ w, AE celeritatem $=$ c, et AB diametrum $=$ 2r refert,

$$\text{erit } w = \frac{c^2}{2r} = \frac{c^2}{r}.$$

E qua formula etiam $c^2 = 2rw$, et $c = \sqrt{2rw}$, deducitur.

76. Cum porro c, seu celeritas in circulo sit æquabilis (74), erit illa $= \frac{s}{t}$ (22); sunt vero s, seu spatia, in circulis percursa, ut peripheriæ; hæ, ut diametri, vel radii; unde $c = \frac{r}{t}$, et $c^2 = \frac{r^2}{t^2}$; quodsi igitur loco c^2, in formula $w = \frac{c^2}{r}$, substituatur $\frac{r^2}{t^2}$, erit $w = \frac{r^2}{rt^2} = \frac{r}{t^2}$, h. e. *Vis centripeta in diversis circulis est in ratione composita, ex directa simplice radiorum, sive distantiarum a centro virium, et reciproca duplicata temporum periodicorum.* Atque hinc si t^2, i. e. quadrata temporum

periodicorum, quibus circa idem punctum diversi circuli describuntur, ponantur, ut r^3, h.e. ut cubi radiorum, seu distantiarum, erit w $= \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$; h. e. *vis centripeta, sub data hypothesi, est in ratione reciproca duplicata distantiarum ab eodem centro.* Si denique hoc, i. e. *si vires centripetæ, per quas diversi circuli circa idem punctum describuntur, sint reciproce, ut quadrata distantiarum ab eodem centro, est celeritas motus circularis in ratione reciproca subduplicata distantiarum.*

Cum enim generatim in circulo sit $w = \frac{c^2}{r}$ (75),

ex hypothesi vero $w = \frac{1}{r^2}$,

est etiam $\frac{c^2}{r} = \frac{1}{r^2}$;

hinc $c^2 = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$, et $c = \frac{1}{\sqrt{r}}$.

77. Denique cum in viribus uniformiter acceleratricibus generatim sit $w = \frac{c^2}{2s}$ (29.I.), in circulo vero speciatim $w = \frac{c^2}{r}$ (75), erit etiam in circulo $\frac{c^2}{2s} = \frac{c^2}{r}$, et $2s = r$, ac per consequens $s = \frac{r}{2}$;

h. e. ut mobile circa centrum virium circulum describat, projici debet directione ad radium perpendiculari ea celeritate, quam, agente vi uniformiter acceleratrice, æquali vi centripetæ, mobile, ex puncto projectionis versus centrum per dimidium radium labendo, acquireret; eo ipso itaque *celeritas illa tangentialis, quæ ad describendam orbitam circuli requiritur, æquatur ei celeritati, quam mobile, per dimidium radium labendo, ope vis centripetæ acquireret.*

III. *De motu elliptoico.*

78. *Si mobile, viribus centralibus actum, in ellipsi circa alterutrum focum, tamquam centrum virium, revolvatur, vis centripeta agit in ratione inversa duplicata distantiarum.* Cum enim in viribus uniformiter acceleratricibus generatim sit $w = \frac{s}{t^2}$ (28. I.) tempus t vero, quo arcus infinite parvus Mm, *Fig.* 28. describitur, rite exhibeatur per $\triangle$-li FMm, (quod ob Mm arcum infinitesimum pro rectilineo haberi potest, cujusque altitudo est mn, perpendiculum in basim FM demissum), aream $= \frac{FM \cdot mn}{2}$ (69); spatium autem s, vi acceleratrice centripeta hoc in casu percursum, sit $Mo = Tm$ (si ducta tangente MT, ex puncto m, fiat ad vis centripetæ directionem FM parallela Tm, atque parallelogrammum MTmo compleatur), sequitur: vim centripetam $W = \frac{Tm}{FM^2 \cdot mn^2}$; cum porro $\frac{Tm}{mn^2}$ in

una,

una, eademque ellipsi constans sit a), sequitur: $W = \frac{1}{FM^2}$.

---

a) Quod vero hoc modo demonstrari potest: cum, ducta diametro MK, eique conjugata HI, ad tangentem parallela, m o, adeoque et o v, parallela sit ad HG, adeoque etiam ad GL, est $MG : Mo = MC : Mv$, seu, ob $Mo = Tm$; $MG : Tm = MC : Mv$; unde $Tm = \frac{MG.Mv.}{MC}$; Item cum anguli alterni, et interni m o n, et MGL, inter se ob m o ad GL parallelam æquentur, anguli vero ad n, et L, ex constructione sint recti, sequitur $\triangle$ m o n $\backsim$ $\triangle$ MGL, adeoque $ML : MG = mn : mo$, seu $ML^2 : MG^2 = mn^2 : mo^2$, unde $mn^2 = \frac{ML^2.mo^2.}{MG^2}$; et hinc duas æquationes conferendo: $Tm : mn^2 = \frac{MG.Mv.}{MC} : \frac{ML^2.mo^2}{MG^2}$, seu $Tm : mn^2 = MG^3.Mv : ML^2.mo^2.MC.$

Cum dein $mv^2 : Mv.Kv = HC^2 : MC^2$ (Mako Geom. 689); est $mv^2.MC^2 = Mv.Kv.HC^2$, adeoque $Mv = \frac{mv^2.MC^2}{Kv.HC^2}$; unde $Tm : mn^2 = \frac{MG^3.mv^2.MC^2}{Kv.HC^2} : ML^2.mo^2.MC$, seu $Tm : mn^2 = \frac{MG^3.mv^2.MC}{Kv.HC^2} : ML^2.mo^2.$ Cum porro, ob arcum Mm infinite parvum, $\triangle$ MmT pro rectilineo haberi possit, in quo angulus TMn est infinite parvus, angulus vero $MTm = FMN$ finitus, erit $Mm : Tm = 1 : \frac{1}{\infty}$ (Geom. 137), seu ob $Mm = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} : Tm = 1 : \frac{1}{\infty}$, unde $Tm = Mo = \frac{1}{\infty^2}$; quia vero in $\triangle$ M o v $\backsim$ $\triangle$ MGC, anguli sunt definitæ magnitudinis, omnia latera ejusdem inter se ordinis esse debebunt; consequenter ob latus $Mo = \frac{1}{\infty^2}$, reliqua quoque latera Mv, et o v infinitesima secundi ordinis sint, est necesse; et hinc in priori proportione pro m v sumi potest m o, et pro Kv, $MK = 2MC$ (Geom. 275. M. G.

79. Et viceversa ostendit Mathesis: *mobile, viribus centralibus actum, describere ellipsim, cujus alterutrum focum centrum virium occupat, si vis centripeta continue agat in ratione inversa duplicata distantiarum.*

80. *Quadrata temporum periodicorum, quibus diversæ ellipses circa alterutrum focum, tamquam centrum virium, describuntur, sunt in ratione triplicata semiaxium minorum*, seu quod idem, *ut cubi mediarum distantiarum.* Cum enim sit vis centripeta, utpote uniformiter acceleratrix $W = \frac{S}{T^2}$ (28. I.), spatium vero $S = Mo = Tm$, et tempus T sit constans, quia ubique de æquali tempusculo infinite parvo locuturi sumus, est $W = Tm$, seu, quia $Tm = \frac{mn^2}{p}$,

---

679.), quia $ov = \frac{1}{\infty^2}$ respectu $mo = \frac{1}{\infty}$, et $Mv = \frac{1}{\infty^2}$ relate ad Kv, utpote finitum evanescit (Alg. 182, 183), erit itaque $Tm : mn^2 = \frac{MG^3 . mo^2 . MC}{2MC . HC^2} : ML^2 . mo^2$, seu $Tm : mn^2 = \frac{MG^3}{2HC} : ML^2$, seu $Tm : mn^2 = MG^3 : ML^2 . 2HC^2$, seu ob $MG = BC$ (M. G. 674), $Tm : mn^2 = BC^3 : ML^2 . 2HC^2$, quia porro $HC . MC = BC . EC$ (M. G. 688), est $Tm : mn^2 = BC^3 : 2BC^2 . EC^2$, seu $Tm : mn^2 = BC : 2EC^2$, adeoque $mn^2 = \frac{Tm . 2EC^2}{BC}$; verum $\frac{2EC^2}{BC} = \frac{2b^2}{a} = p$, seu parametro axis majoris (Geom. 274), ergo $mn^2 = Tm . p$, seu quia p est constans quantitas, $mn^2 = Tm$, seu $1 = \frac{Tm}{mn^2}$.

litera p parametrum designante (78. a.), est $W = \frac{mn^2}{p}$.
Cum porro sector $FMm = S$, sit, ut $FM . mn$ (Geom. 182), adeoque $S^2 = FM^2 . mn^2$, et $mn^2 = \frac{S^2}{FM^2}$; est $W = \frac{S^2}{FM^2 . p}$; cum item $S = \frac{E}{T}$ (71), et E, utpote area ellipseos, sit, ut factum semiaxium suorum a), adeoque $S = \frac{AB}{T}$; et $S^2 = \frac{A^2B^2}{T^2}$, (A, majorem, B, minorem semiaxem designante), est $W = \frac{A^2B^2}{FM^2 . p . T^2}$;
atqui vero $p = \frac{2B^2}{A}$ (Geom. 274);
ergo $W = \frac{A^3B^2}{2FM^2 . B^2 . T^2} = \frac{A^3}{2FM^2 . T^2}$,
seu, cum 2 constans sit quantitas, est in quolibet orbitæ puncto $W = \frac{A^3}{FM^2 . T^2}$.
De duabus itaque quibusvis diversis ellipsibus est $W : w = \frac{A^3}{FM^2 . T^2} : \frac{a^3}{fm^2 . t^2}$,
seu $W : w = \frac{A^3t^2}{FM^2} : \frac{a^3T^2}{fm^2}$;

---

a) Cum enim quælibet ellipseos ordinata sit ad circuli ordinatam sibi respondentem, ut B : A (Geom. 272), est etiam summa omnium ellipseos ordinatarum, seu area ellipseos $= E$, ad summam omnium ordinatarum circuli, seu aream circuli $= C$, sicut B : A, adeoque $E : C = B : A$; unde $E = \frac{BC}{A}$. Porro area circuli C, est, ut quadratum radii $R = A$; ergo $E = \frac{A^2B}{A} = AB$.

atqui vero in ellipsibus est etiam

$$W : w = \frac{1}{FM^2} : \frac{1}{fm^2} \ (78),$$

ergo $\frac{1}{FM^2} : \frac{1}{fm^2} = \frac{A^3t^2}{FM^2} : \frac{a^3T^2}{fm^2}$,

seu $1 : 1 = A^3t^2 : a^3T^2$, seu $A^3t^2 = a^3T^2$;

unde $T^2 : t^2 = A^3 : a^3$.

81. Et viceversa: *si duo mobilia in diversis ellipsibus circa idem cum utriusque ellipseos alterutro foco congruens centrum virium revolvantur, ita, ut quadrata temporum periodicorum sint, ut cubi mediarum distantiarum, vires centripetæ eorum mobilium erunt in ratione reciproca duplicata distantiarum.*

Cum nempe sit $W : w = \frac{A^3t^2}{FM^2} : \frac{a^3T^2}{fm^2}$ (præc.), et in assumta hypothesi $T^2 : t^2 = A^3 : a^3$, adeoque $A^3t^2 = a^3T^2$;

est etiam $W : w = \frac{1}{FM^2} : \frac{1}{fm^2}$.

PARS II.

De motu in specie corporum gravium.

Sectio I.

De corpore in genere.

82. Id, quod spatium replet, *materia;* spatium, materia repletum, *corpus;* spatium, absque materia sumtum, *volumen,* aut *extensio* corporis vocatur. Limites hujus extensionis, *figuram;* quantitas materiæ, in volumine contentæ, *massam* corporis constituit. Ad nonnullas de corporibus veritates demonstrandas, corpus concipimus in particulas minimas, divisum, quas *elementa* vocamus a). Horum itaque major numerus, majorem corporis massam, minor, minorem constituit.

83. Corpus, quod sub eodem volumine minus massæ continet, *rarius;* quod vero plus, *densius* esse dicitur; ut adeo

a) In systemate atomistico essentialiter corpus in elementa, quæ *atomos* vocant, divisum concipitur: at in systemate dynamico, eo tantum modo, quo in Geometria, solida ex superficiebus, superficies ex lineis, lineas ex punctis quasi constare nonnunquam necesse est concipere.

densitas sit ratio massæ ad volumen. Massa itaque corporis, et eo major est, quo major corporis sub eodem volumine densitas, et eo major, quo majus corporis ejusdem densitatis volumen; conformiter itaque Nro. 10. massa corporis est in ratione composita directa voluminis, et densitatis; seu, si M massam, V volumen, et D densitatem denotent;

est $$M = VD;$$

unde $D = \frac{M}{V}$, et $V = \frac{M}{D}$,

et si quidem V constans, $M = D$,

si vero D constans, $M = V$,

si denique M constans, $D = \frac{1}{V}$, vel $V = \frac{1}{D}$,

et viceversa si $D = \frac{1}{V}$, est M constans.

84. Motus corporum a Physicis distinguitur in *absolutum*, et *relativum*; in *verum*, et *adparentem*; in *communem*, et *proprium*; atque in *rotatorium*, et *progressivum*. In motu progressivo, de quo nobis solummodo sermo est, omnes corporis partes, et quidem æquabiliter, h. e. æquali celeritate moventur; secus enim partes aliquæ, aliis relictis, præcedere, et ab his separari deberent. Sufficit itaque solius unius partis motum considerare, atque corpus tamquam punctum, et spatium, perquod movetur, tamquam lineam assumere.

85. Cum itaque singulæ corporis partes æquali celeritate moveantur, datur in corpore quovis, dum movetur, summa aliqua

motus, seu celeritatum omnium partium corporis, quæ obtinetur; si celeritas, omnibus partibus communis, toties sumatur, quot partes in corpore sunt, seu, quia partes corporis massam constituunt, si dicta celeritas per massam multiplicetur. Summa hæc motus, seu celeritatum viribus proportionalium, quibus omnes simul moti corporis partes moventur, *quantitas motus* adpellatur, et nihil aliud est, quam tota illa vis, qua corpus in motu constitutum pollet. Unde si Q quantitatem motus, M massam, et C celeritatem designet,

est $Q = MC$, et $M = \frac{Q}{C}$, et $C = \frac{Q}{M}$;

et si M, est constans, $Q = C$,

si vero C, est constans, $Q = M$;

si denique Q, est constans, $M = \frac{1}{C}$, aut $C = \frac{1}{M}$;

aut si hoc, Q est constans.

86. Cum porro sit: $C = \frac{Q}{M}$,

et in motu æquabili etiam $C = \frac{S}{T}$ (22);

est quoque $\frac{Q}{M} = \frac{S}{T}$, seu $QT = SM$.

Unde in motu corporum æquabili est

I. $Q = \frac{SM}{T}$,

II. $S = \frac{QT}{M}$,

III. $T = \frac{SM}{Q}$,

IV. $M = \frac{QT}{S}$.

87. In Physica, et hinc etiam Mathesi adplicata materia corporum, ut inanimata consideratur. Inanimatæ res nullius internæ determinationis sunt capaces, in materia itaque caussa mutationum, quas ea subit, esse non potest; verum, quia effectus sine caussa impossibilis, mutationum, quas corpora subeunt, caussa extrinseca sit, est necesse. Cum ergo transitus corporis ex statu quietis in motum, et viceversa: mutatio item directionis, vel celeritatis, in motu sint reales status corporum mutationes, sequitur: has nonnisi per extrinsecam quampiam caussam produci posse. Et hinc: *Corpus quiescens eo usque quiescit, donec ab extrinseca caussa ad motum concitetur; in motu vero constitutum eousque eadem celeritate, et directione movetur, donec ab extrinsecus in quietem redigatur, aut directionem, celeritatemque immutare cogatur.* Hæc corporum facultas in statu suo perseverandi, adeoque impotentia ex se statum suum mutandi, *inertia corporis* vocatur.

88. Mutatio status fit, quatenus, vel novus motus quiescenti corpori imprimitur, vel prior augetur, aut minuitur, aut exstinguitur. Quævis ejusmodi mutatio est proportionalis vi impressæ, quatenus mutatio in quacunque multiplicium, aut submultiplicium serie ob inertiam corporis major, aut minor gigni debet, si vis impressa in quacunque multiplicium, vel submultiplicium serie major, aut minor est. Unde secunda lex motus: *Mutatio status quietis, vel motus corporum proportionalis est vi impressæ.* Æstimatur autem quantitas, seu magnitudo mutationis status non tantum ex celeritate, quæ in corpore producitur, augetur, minuitur, vel exstinguitur, sed etiam ex massa, seu multitudine partium, quarum status una mutatur; si quidem mutatio status in corpore eo major sit, quo major numerus partium, quæ mutantur, et quo majori celeritate eæ mutantur, adeoque, quo major quantitas motus in ipso producitur. Similiter vis, quæ a corpore agente imprimitur, eo major censetur, quo, et plures partes, et quo majori celeritate agunt; ut adeo, etiam vis impressa sit, ut ipsius quantitas motus. Cum ergo effectus, quem corpus motum in occurrente sibi obstaculo producit, *percussio* dicatur, patet: hanc esse, ut quantitatem motus ipsius corporis moti.

89. Porro dum unum corpus in aliud agit, hoc illi ob inertiam suam, aut impenetrabilitatem resistit; agens itaque corpus ad superandam resistentiam hanc, tantam semper vim impendere debet, quanta est ipsa resistentia, et hæc æqualem eo ipso partem in agente corpore elidit. Unde tertia motus lex: *actioni corporum contraria semper, et æqualis est reactio.*

90. Id, quod motum, seu ex parte, seu ex integro elidit; *resistentia* dicitur. Vis corporis, cujus actio resistentia quapiam non eliditur, motum producit, cujus effectus celeritas est. Vis vero, cujus actio contraria, et æquali

obstaculi cujuspiam actione *penitus eliditur*, singulis quasi momentis ad effectum producendum *nititur*, quem quoque proportionalem sibi, remoto obstaculo, produceret; effectus hujus *pressio* est. Totius hinc corporis pressio, quæ in summa pressionum omnium ejusdem partium consistit, semper in eadem ratione est cum quantitate motus; si quidem utraque vi impressæ proportionalis est.

91. Quemadmodum generatim omnis mutatio in mundo sensibili nonnisi certo tempore, et certo in spatio fit, sic communicatio quoque motus nonnisi in tempore fieri potest. In nullo corpore status quietis, vel motus, celeritas, vel directio per unicum quasi impulsum, ad semel, in momento mutatur, verum semper certo in tempore per innumera intervalla infinite parva. Lex hæc naturæ *lex continui* adpellatur. Secundum hanc legem continui corpus per resistentiam non ad semel, sed per continuam imminutionem celeritatis in quietem ponitur; et quiescens corpus nonnisi per gradatim factam celeritatis communicationem ad motum concitatur. Quousque igitur vis, motum corpori communicans, agit, corporis motus acceleratur (18, et 19); cessante vero caussa hac, corpus ob suam inertiam celeritate finali, adeoque motu æquabili (19) moveretur, si nullum ei aliunde impedimentum occurreret.

92. Porro ipsa motus communicatio viribus *attractivis*, quibus corpora certis in

distantiis ad se invicem accedunt; et *repulsivis*, quibus in certis itidem distantiis a se invicem recedunt; vel singulis, vel certa utriusque combinatione habetur a). Sic v. g. lapidi, libere labenti, motum communicat attractio terræ, quam *gravitatem* vocamus; sic corpus incurrens in alterum, huic motum communicat vi suæ impenetrabilitatis, quæ a *repulsione* diversa non est; sic quoque corpus, in motu constitutum, habensque aliud ope medii alicujus conjunctum, hoc quoque vi cohæsionis, quæ a viribus mutuis, attractione nempe, et repulsione, dependet, ad motum determinat.

Nos in sequentibus agemus de motu corporum per gravitatem, dein per conflictum, denique de motu refracto.

---

a) Vires has cuivis corpori in statu quietis inesse, phænomena evincunt; et *attractio* quidem, tam, ut *affinitas*, in minimis, atque inobservabilibus agens distantiis, v. g. inter minimas corporum particulas, ad quarum separationem magna sæpe vis requiritur, quam in majoribus, quæ triplici modo, ut *gravitas*, *electricitas*, et *magnetismus* sese manifestat; ac demum in maximis agens distantiis (utpote, quæ inter totalia universi corpora observatur, quorum curvilineum motum nonnisi per attractionem explicare licet, quamque *gravitationem*, aut *gravitatem universalem* vocamus), tot clarissimis evincitur naturæ phænomenis, ut de ea dubitare non liceat. Vis vero repulsiva, sine qua, ne quidem impenetrabilitatem corporum concipimus, non tantum in minimis, atque inobservabilibus distantiis sese manifestat, uti v. g. in contactu, et elasticitate præsertim expansiva illa aëris, et vaporum; verum etiam in majoribus, uti in magnetismo, et electricitate.

Sectio II.

De gravitate corporum.

CAPUT I.

Notiones gravitatis, et ponderis.

93. Per *gravitatem* intelligitur nisus ille, qui quamlibet partem materialem determinat ad motum versus centrum totalis universi corporis, ad quod materia illa spectat. In sequentibus de gravitate tantum terrestri agemus. Nisum hunc in corporibus terrestribus adesse, innumera phænomena evincunt. Corpora enim a superficie terræ nonnisi per vim, gravitati contrariam, removeri possunt, cessante vero hac in terram iterum recidunt; manu retenta magis, minusve in illam premunt, aut, hac subducta, ruunt; e filis suspensa, hæc tendunt, filisque ruptis, cadunt, et quidem semper in lineis rectis. Nisum hunc versus centrum terræ tendere, exinde patet: quod corpora ubicunque in globo terraqueo in lineis ad horizontem, i. e. superficiem aquæ stagnantis perpendicularibus, quas *verticales* dicimus, labantur. Lineæ hæ, quia directionem gravitatis determinant, *lineæ directionis* gravitatis audiunt.

94. Corpora præterea terrestria, quantumcunque disparis massæ, ac voluminis, in medio non resistente ex eadem altitudine demissa, eodem semper tempore, ac per consequens æquali etiam celeritate, ad terram labuntur, quod experimenta, in vacuo Boyleano cum levissima plummula, et numo aureo post *Desaguliers*, qui id coram Rege Angliæ ex altitudine 15 pedum fecerat, instituta, liquide evincunt. Quod id in atmosphæra non obtineat, ratio est: quod densiora corpora semper minorem respectu suæ massæ resistentiam aëris superandam habeant, quam rariora; quemadmodum determinatum iter a 5 hominibus non facilius absolvitur, quam ab uno; at resistentia, si quæ in via superanda occurrat, a quinque facilius, quam ab uno, superatur.

95. Cum itaque omnia corpora, ergo et singulæ corporum particulæ, æqualiter a terra attrahantur, sequitur: dari in corpore quovis gravi summam aliquam gravitatis omnium particularum gravium, quæ sit æqualis gravitati omnibus corporis particulis communi, toties sumtæ, quot sunt in corpore particulæ, seu quia hæ particulæ massam corporis constituunt, quæ sit æqualis gravitati ductæ in corporis massam. Summa hæc gravitatis particularum corporis, ejus *pondus* vocatur; ut adeo pondus sit effectus ille, quem corpus per numerum gravium suarum particularum producit. Unde pondus semper est æquale facto ex massa in celeritatem, seu gravitatem; vel, quia gravitas corporum in uno, eodemque loco ad sensum eadem est, pondus est in ratione massæ. Distinguitur pondus a gravitate,

sicut quantitas motus a celeritate. Intensitas enim gravitatis per productam a gravitate celeritatem determinatur, hancque ob caussam dicimus corpora ad polos graviora esse, quam sub æquatore, quia ibi celerius, hic lentius cadunt, nulla habita ratione copiæ particularum corporis; contra: pondus corporis determinatur, vel per vim, quam adhibere necesse est, ut id a casu præservetur, vel per pressionem, quam in subjectum substaculum exerit; hæc vero non tantum a celeritate, verum etiam a numero particularum, hac celeritate præditarum, pendet (89),

96. Pondus corporis sine omni relatione ad ejus volumen, *pondus absolutum* vocatur; est itaque cum massa corporis unum, idemque; et nonnisi in vacuo determinabile, quia in aëre rariora corpora plus, quam densiora de suo amittunt pondere. Pondus vero corporis simul cum relatione ad ejus volumen, vocatur *pondus specificum*, vulgo etiam *gravitas specifica* (cum vulgo id corpus gravius esse dicatur, quod sub parvo volumine magnum pondus, et id levius, quod sub magno volumine parvum pondus habet); at sensu improprio tantum, quia tunc gravitas specifica locum haberet, si corpora non æquali vi a terra attraherentur, adeoque si inæquali celeritate ruerent. Pondus specificum cum densitate (83) unum, idemque est. Unde si id dicatur G, pondus absolutum P, et volumen V,

est: $P = VG$,

(cum sit $M = VD$ (83), $M = P$, et $D = G$.)
adeoque $V = \frac{P}{G}$, et $G = \frac{P}{V}$;
si porro V constans ponitur, est $P = G$;
si vero G constans est, $P = V$;
si denique P constans, est $V = \frac{1}{G}$, aut $G = \frac{1}{V}$;
et viceversa.

CAPUT II.

De centro gravitatis.

97. Si effectus gravitatis quoad partes corporis materiales consideretur, erit is, ac si in quamlibet particulam materialem vis ageret, cujus directiones, etsi in rigore mathematico inter se non sint parallelæ, cum tamen dimensiones corporum respectu radii telluris evanescant, absque errore pro parallelis haberi poterunt. Quare omnia, quæ de compositione, et æquilibrio virium parallele agentium *Nr.* 46, *et seqq.* pag. 43. dicta sunt, hic adplicanda veniunt.

98. Cum itaque in quovis systemate virium, parallele agentium, detur centrum virium, idque unicum, et quidem in omni situ immutabile (56), sequitur: in omni quoque corpore, si effectus gravitatis quoad ejus partes materiales consideretur, dari centrum virium, idque unicum tantum, et omni in situ corporis immutabile. Centrum hoc virium relate ad gravitatis effectum, *Centrum gravitatis corporis* dicitur. Hujus ergo intensitas summæ virium singularium, (49),

seu gravitatis, (præc.), adeoque ponderi (94), æquatur, et directio cum directione virium, parallele agentium, singularium parallela est (49), adeoque ad horizontem perpendicularis (92), quam *verticalem* quoque dicimus.

99. Unde si centrum gravitatis secundum directionem verticalem, quæ directio gravitatis est, vi quadam, quæ sit ponderi corporis æqualis, sursum agatur, aut, quod spectato effectu idem, si id fixum assumatur, corpus circa hoc punctum in quocunque situ in æquilibrio erit (51, et 52), si de cetero partes corporis cohærentes fuerint. Quare si corpus quodpiam e centro gravitatis suspendatur, aut idem centrum gravitatis fulciatur (quibus in casibus centrum figitur), corpus consistet immotum, partibus suis undique sese in æquilibrio sustentantibus. Cum porro vires, parallele agentes, in statu æquilibrii sint in ratione reciproca suarum a centro virium distantiarum (54), et in omni proportione factum extremorum sit æquale facto mediorum, sequitur: gravitates partium corporis materialium, seu pondus corporis (94) cis planum, per lineam suspensionis centri gravitatis transiens, ductum in suam a centro gravitatis distantiam, esse æquale facto, ex gravitate partium materialium, seu pondere corporis trans planum dictum in suam distantiam, aut, quia factum hoc *momentum* vocant, planum cum linea suspensionis coincidens, dividere corpus in duo momenta æqualia. Imo, quia cor-

corpus plano quocunque, per centrum gravitatis transeunte, sectum, ita verti potest, ut planum hoc, et per centrum gravitatis, et per punctum suspensionis transeat, adeoque cum linea suspensionis coincidat, sequitur: plana quotcunque, per centrum gravitatis ducta, dividere corpus in duo momenta æqualia, seu, quod idem est, in duas partes æquilibres. Et hinc *centrum gravitatis* dici potest illud in corpore punctum, per quod plana quodcunque ducta sint ejusmodi, quæ corpus in duas dividant æquilibres partes, seu in duo momenta æqualia.

100. E contrario: si centrum hoc gravitatis secundum directionem verticalem nulla vi sursum agatur, aut, si id non figatur, corpus deorsum versus centrum terræ agetur ea vi, cujus intensitas æqualis est ponderi, directionem verticalem per centrum transeuntem (98) tenenti, quam ideo etiam *lineam directionis centri gravitatis* nominamus.

101. Quoadusque ergo linea hæc directionis centri gravitatis intra basim corporis cadit, eousque idem centrum ab inferiori ipsiusmet corporis parte sibi subjecta, ceu fulcro sustentatur, atque adeo corpus, v. g. AB, *Fig.* 29. momentis ABED, et ABFG, utrinque æquilibrantibus, a prolapsu securum consistet. At linea directionis, v. g. ABb, *Fig.* 30, extra basim HI, exerrante, centrum gravitatis C, fulcro destituetur; corpus itaque prolabetur versus eam

plagam, versus quam centrum fulcro caret, adeoque versus plagam exerrantis lineæ directionis, ob præpondium momenti eandem plagam respicientis, corpusque ad lapsum urgentis: momentum enim, quo corpus ad lapsum sollicitatur, est $mHLKm > mHIm$ momento, corpus a casu retinere connitente, cum momentum $ABCK = $ momento $ABHI$ esse debeat (99.)

102. Cum porro minor vis requiratur, ad idem pondus per minus spatium movendum, quam per majus, spatium autem, per quod linea directionis centri gravitatis movenda sit, eo minus sit, quo minor ipsa basis est, quo linea directionis extremitati baseos propior, item, quo centrum gravitatis a basi remotius est; quod vel ex intuitione *Fig.* 31. evidens fit; minor vis quoque corpus dicto modo constitutum subvertet, quam idem corpus contrario modo constitutum. Quare facile adparet: eo firmius subsistere corpus, quo id, et majori basi gaudet, et quo linea directionis medio baseos propior, item, quo centrum gravitatis basi vicinius exstiterit.

103. Cum corpus cujuscunque figuræ, ac voluminis, quoadusque ejus massa eadem manet, eodem modo premere debeat, sequitur: pondus corporis absque spatio, quod occupat, h. e. absque volumine, atque ideo ipsum corpus instar puncti considerari posse. Cum porro centrum gravitatis, si in eo tota massa corporis collecta foret, eodem modo ad motum determinaretur, ac si vis quædam, ponderi corporis æqualis, verticaliter in ipsum ageret, ac proinde, ac si gravitas ad quamlibet particulam materialem ageret, sequitur: centrum gravitatis esse posse illud punctum, cujus instar corpus considerari potest; quare totam corporis massam, spectato effectu, in ejus centro gravitatis collectam, h. e. concentratam, considerare licet.

104. Cum per *centrum magnitudinis* illud in extenso intelligatur punctum, per quod plana quotcunque ducta sint ejusmodi, quæ extensum dividant in duas partes magnitudine æquales; partes vero magnitudine æquales in corporibus homogeneis, seu æquabilis ubique densitatis, simul æquilibres esse debeant, (quia ex una parte tanta adest, et extensio, et massa, quanta ex altera, adeoque momenta æqualia sunt); sequitur: in corporibus homogeneis centrum *gravitatis* cum centro magnitudinis congruere. *Contra*: quia in corporibus heterogeneis, seu inæquabilis densitatis, partes magnitudine æquales non sunt simul æquilibres, cum eandem quidem extensionem, at non eandem massam habeant, in iisdem centrum gravitatis cum centro magnitudinis convenire non potest.

105. Hinc in corporibus homogeneis, quæ simul regularem aliquam figuram exhibent, facili negotio, eo nempe modo, quo centrum magnitudinis quæritur, etiam centrum gravitatis determinatur; ad quod præstandum, figuras mathematicas, quam-

quam omni prorsus careant gravitate, nihilominus veluti e punctis gravibus constantes considerare licet, atque sub hac consideratione earum centra gravitatis investigare, ut dependenter ab his centra gravitatis corporum physicorum, hujusmodi figuris terminatorum, determinari queant.

106. Itaque cum in triangulo quocunque ABD, *Fig.* 32. rectæ FA, et ED, e laterum BD, et AB punctis F, et E, in quibus eæ bifariam sectæ sunt, in oppositos vertices A, et D, ductæ dividant triangulum in duas partes magnitudine æquales (Geom. 177), hæcque se nonnisi in unico puncto intersecare possint, est dictarum linearum intersectionis punctum C, centrum magnitudinis trianguli (104). Quodsi porro in triangulo punctum E cum F conjungatur, erit, $\triangle EBF \backsim \triangle ABD$, (quia circa com. ang. B, est $BF : BD = BE : BA = 1 : 2$), et $\triangle CEF \backsim \triangle ACD$, adeoq. $BD : BF = AD : EF = AC : CF$; verum BD dupla est rectæ BF, ergo etiam AC dupla esse debet CF, et ita AC æqualis erit duabus tertiis rectæ AF, et $CF = \frac{1}{3}$ AF. Unde etiam centrum *magnitudinis trianguli habetur, si ex vertice quovis anguli sumantur duæ tertiæ rectæ, triangulum ex eodem angulo bifariam secantis.*

107. Cum quodvis parallelogrammum per diagonalem in duas partes, magnitudine æquales, dividatur, duæ vero diagonales nonnisi in unico puncto se intersecare possint; est punctum intersectionis diagonalium simul centrum magnitudinis parallelogrammi. Sic quoque, quia diameter, seu circuli, seu ellipseos has superficies in duas, magnitudine æquales, partes dividit, diametri autem sese in centro figuræ intersecare debeant; est centrum magnitudinis circuli, et ellipseos prorsus idem cum centro utriusque. Eandem ob rationem centrum magnitudinis polygoni regularis cum centro circuli circumscripti unum, idemque est. Ut denique in trapezio quoque, aut alio quocunque polygono irregulari centrum magnitudinis determinetur, necesse est solummodo trapezium, aut polygonum e duobus angulis in duas æquales magnitudine partes (secundum numeros 178, 179, et 180 Geom.) dividere, punctum intersectionis duarum rectarum, polygonum in duas, magnitudine æquales partes secantium, erit quoque centrum magnitudinis polygoni.

108. Cum parallelepipedum quodvis, *Fig.* 33. tam plano ABLHIKA, quam eo FGLDEKF in duas, magnitudine æquales, partes dividatur, transibit utrumque per centrum magnitudinis; erit itaque hoc alicubi in eorum intersectionis linea KCL. Cum porro idem parallelepipedum tam plano AMGHNEA, quam FMBDNIF, in duas æquales partes secetur, hæc quoque plana per centrum magnitudinis transibunt, quare hoc etiam alicubi in eorum intersectionis linea MCN erit. Cum ergo duæ hæ lineæ nonnisi in unico puncto C sese intersecent,

in hoc puncto est centrum magnitudinis, ergo et gravitatis parallelepipedi.

109. Eodem modo cum cylinder, *Fig.* 34. duobus planis DEFG, et HIKL, per axem AB traductis, secetur in duas, magnitudine æquales, partes, utrumque transibit per ejus centrum magnitudinis, quod propterea erit alicubi in axe AB, utpote linea intersectionis planorum; cum rursus cylinder plano MONP, basibus parallelo, per medium axis AB punctum C ducto, dividatur in duas æquales partes, transibit quoque per ejus centrum magnitudinis; unde demum evidens fit, centrum magnitudinis, ergo et gravitatis cylindri esse in concursus plani MONP cum axe AB puncto C. Pari modo ostenditur centrum gravitatis in quovis prismate esse in puncto medio rectæ jungentis centra magnitudinis basium.

110. Similiter, quia pyramis quævis per planum, basim in duas æquales partes secans, atque per verticem transiens, in duas pyramides æque altas, habentesque æquales bases, dividitur; sequitur: pyramidis cujusvis centrum magnitudinis, ergo et gravitatis esse alicubi in axe, seu recta verticem cum centro magnitudinis basis jungente, quæ est communis sectio duorum id genus planorum. Ut itaque in pyramide triangulari ABDE, *Fig.* 35. centrum gravitatis determinetur, duos pyramidis vertices, A, et B, duasque bases, BED priori, et ADE posteriori vertici correspondentes, assumere, necesse est; inventum enim in basi BED centrum magnitudinis F, si jungatur cum vertice correspondente A, transibit AF ex dictis per centrum gravitatis pyramidis; rursus determinatum in altera assumta basi ADE centrum magnitudinis G, si jungatur cum opposito vertice B, etiam BG transibit per centrum gravitatis pyramidis; unde centrum gravitatis pyramidis triangularis erit in puncto C, ubi nimirum rectæ AF, et BG, mutuo se intersecant. Quodsi porro basium assumtarum centra F, et G, linea FG conjungantur, erit $\triangle AHB \backsim \triangle GHF$ (quia circa com. ang. H, est $FH : BH = GH : AH = 1 : 3$ (106); item $\triangle GCF \backsim \triangle ACB$,

Unde $GH : AH = GF : AB = CF : AC$; cumque sit $GH = \frac{1}{3}\ AH$ (106), est quoque $CF = \frac{1}{3}\ AC$, atque ideo $CF = \frac{1}{4}\ AF$, et $AC = \frac{3}{4}\ AF$; h. e. *Centrum magnitudinis, ergo et gravitatis, pyramidis triangularis distat ab ejusdem vertice tribus quadrantibus axeos, seu rectæ ex eodem vertice in centrum magnitudinis baseos ductæ.* Cum igitur singula basis polygonæ pyramidis v. g. ABDEF, *Fig.* 36. triangula BFD, FDE, in quæ quælibet basis polygona dividi potest, spectari possint, veluti bases totidem pyramidum triangularium, ad eundem verticem coëuntium, ac pyramidem polygonam componentium, si per axeos Ao punctum C, quod a vertice A tribus quadrantibus ejusdem rectæ Ao distat, ducatur planum b d e f, basi polygonæ parallelum, evidens sane est: omnes rectas Am, As, ex vertice A, ad centra m, s, illorum triangulorum BFD, FDE, in quæ basis est resoluta, ductas, secari ab eodem plano in punctis, n, r, quæ a vertice tribus quadrantibus longitudinis earundem distant; cum in $\triangle$-lis AnC $\backsim$ Amo, et ACr $\backsim$ Aos, sit An : Am = AC : Ao = Ar : As = 3 : 4; quare planum hoc transibit quoque per centra magnitudinis omnium pyramidum triangularium, pyramidem polygonam componentium, consequenter etiam per centrum magnitudinis ipsius pyramidis polygonæ; atqui vero etiam recta Ao verticem cum basis polygonæ centro jungens, transit per centrum magnitudinis pyramidis; ergo centrum hoc ibi erit, ubi pyramidis polygonæ axis Ao, dicto plano bdef occurrit; cum itaque hoc in distantia a vertice per tres quadrantes ejusdem rectæ occurrat, sequitur: *magnitudinis, ergo et gravitatis pyramidis polygonæ centrum distare a vertice ejus tribus quadrantibus rectæ ex eodem vertice ad centrum basis polygonæ ductæ.* Unde quia etiam conus ad pyramides refertur, ejus centrum gravitatis distabit æque ab ejus vertice tribus quadrantibus ejusdem axis.

111. Denique cum plana quotcunque, per centrum sphæræ ducta, dividant eandem in duas partes, magnitudine æquales, est centrum sphæræ simul centrum magnitudinis; ergo et gravitatis sphæræ. Idem hoc de sphæra vacua intelligendum, in qua itaque centrum gravitatis extra massam cadet; uti generatim omnium corporum homogeneorum in medio vacuorum.

112. In corporibus homogeneis nimis irregularibus, uti et in heterogeneis centrum gravitatis calculo ad huc determinari nequivit. In his situs tantum centri gravitatis tentando determinari potest; si nempe datum corpus, v. g. MN, *Fig.* 37. super acie prismatis triangularis AB, tamdiu huc, et illuc promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur, atque aciei prismatis in superficie corporis linea KL notetur; si dein, situ corporis immutato, alius priori similis situs corporis MN, *Fig.* 38. quæratur, atque iterum linea MN notetur; cum plana verticalia per has rectas ducta simul per centrum gravitatis transeant, erit rectarum KL, et MN, punctum intersectionis simul extremitas lineæ verticalis, in qua intra corpus centrum gravitatis situm est. Ex hoc itaque puncto corpus si suspendatur, erit in æquilibrio, retinebitque situm, quem in prismate habuit. Simili modo situs centri gravitatis determinatur, si, vel super chorda tensa simile tentamen instituatur, vel, si super plana tabula, horizonti parallela, corpus collocetur, parte una corporis extra limen tabulæ prominente, usque dum in æquilibrio est; vel, si corpus, v. g. ABDE, *Fig.* 39. simul cum pendulo SP (h. e. corpore gravi e tenui filo pendente) e quopiam superficiei corporis puncto A, suspendatur, ac juxta ductum radentis fili in superficie corporis quiescentis linea AD signetur, atque, corpore denuo ex alio ambitus puncto B, *Fig.* 40. suspenso, notetur alia quoque

linea BE, priorem in C, secans; cum plana verticalia, per has rectas ducta, simul per centrum gravitatis transeant; centrum gravitatis alicubi in horum planorum linea intersectionis, exsistet. Quodsi denique super cuspide stili ultro, citroque corpus promoveatur, punctum, in quo illud immotum manet, est ob adductas rationes in verticali linea centri gravitatis.

113. Quemadmodum autem unum, ita duo; pluraque corpora, ceu *lineis rectis inflexilibus*, omnisque gravitatis expertibus juncta, communi centro gravitatis gaudent. Cum enim unius cujusque corporis singillatim sumti massa in proprio centro gravitatis concentrata concipi possit (103), perinde erit, ac si duæ vires, pondera nempe duorum corporum, in duo rectæ puncta agerent; quare commune centrum virium, seu relate ad corpora centrum gravitatis habere debent. Eodem itaque etiam modo, quo centrum virium invenitur, commune centrum gravitatis duorum corporum determinatur. Sic sint *v. g.* duo corpora A, et B, *Fig.* 41. linea AB juncta; erunt vires, hoc in casu massæ, seu pondera in ratione reciproca suarum distantiarum a centro (54); seu $A : B = CB : AC$;
adeoq. eti. $A + B : A = BC + AC\ (= AB) : BC$,
aut $A + B : B = BC + AC\ (= AB) : AC$;
et hinc I. $BC = \frac{A \cdot AB}{A+B}$, et $AC = \frac{B \cdot AB}{A+B}$;
h. e. *datis massis, et earumdem a se invicem distantia, innotescit utriusque massæ distantia a communi centro gravitatis.*

II. $AC = \frac{B \cdot BC}{A}$, et $BC = \frac{A \cdot AC}{B}$;
h. e. *datis massis, et unius a communi centro gravitatis distantia, alterius quoque distantia ab eodem innotescit.*

III. Si massæ sunt æquales, etiam BC, et AC, seu distantiæ a centro sunt æquales; adeoque commune centrum gravitatis est in medio rectæ massas conjungentis. Si vero massæ sunt inæquales, etiam BC, et AC, seu distantiæ earum a centro inæquales sunt, atque ideo, a majori massa minus, a minore magis centrum gravitatis distat (65).

114. Quæ de duobus corporibus intuitu eruendi communis centri gravitatis dicta sunt, eadem de pluribus quoque corporibus intelligenda veniunt; siquidem sicut unius, ita duorum, pluriumque corporum massæ in communi omnium centro gravitatis simul concentratæ, salvo virium effectu, considerari possint.

CAPUT III.

De motu corporum per gravitatem.

115. Cum gravitas continue in corpora agat, hæc omni momento corpora, seu quiescentia, seu in motu constituta, ad descensum versus centrum terræ sollicitat, motum itaque eorum, vel producit, vel aliunde productum, mutat. Quare hoc loco

agendum est, tum de corporum motu, quem unice actio gravitatis producit, quemadmodum id evenit, dum corpora, vel libere, vel per planum inclinatum, vel e fixo quopiam puncto pendula labuntur; tum de motu corporum projectorum, quo in casu gravitas, continue in corpus agens, motum, a vi projectili productum, mutare debet. Unde

Articulus I.

De motu ex corporum lapsu.

I. De lapsu corporum libero.

116. Corpora dicuntur *libere labi*, dum versus centrum terræ ita moventur, ut in suo non impedito hoc descensu unice directionem gravitatis sequantur.

117. Cum gravitas continue in corpora agat, gravitas est vis continua, adeoque acceleratrix (17); unde ipse quoque motus, quem producit, acceleratus sit, est necesse (18). *Quare corpora, libere labentia, motum accelerant.* Cum porro in ea distantia, ad quam corpora a superficie terræ removeri possunt, gravitas ad sensum non varietur (cum ea ad radium telluris non habeat sensibilem rationem), gravitas in dicta distantia pro *vi acceleratrice constante* haberi potest; eo ipso autem omni momento æqualia celeritatis incrementa producit (17); quare motus quoque, a sola gravitate in dicta distantia productus, uniformiter acceleratus sit, est necesse (18); nisi quantum resistentia aëris, si notabilis sit, rem immutat. Itaque *corpora ex altitudine non nimis magna, in medio non resistente motu uniformiter accelerato labuntur.*

Confirmat quoque hoc experientia: si enim primo ex diversa altitudine in massam mollem, v. g. argillam, demittatur globus ferreus, foveæ in argilla excavatæ deprehenduntur eo majores, quo major erat altitudo, e qua idem globus deciderat. Unde cum percussio, manente eadem massa, sit in ratione celeritatis (85); ubi major est percussio, ibi major quoque celeritas est; motus itaque acceleratus est (18). Dein institutis a *Galileo*, *Ricciolo*, *Grinaldi*, *Academicis parisinis*, et aliis post hos pluribus observationibus inventum fuit, spatia, singulis æqualibus temporum lapsus intervallis seorsim respondentia, proxime (accurate enim ob aëris resistentiam, aliasque difficultates hoc determinari nequit) crescere in serie numerorum naturalium imparium. Sic testibus Academicis parisinis corpus libero descensu conficit

1. min. sec. $15' \; 1'' \; 2\frac{1}{18}'''$ parisin.

2. min. sec. $45' \; 3'' \; 6\frac{1}{2}'''$

3. min. sec. $75' \; 5'' \; 10\frac{5}{18}'''$,

qui numeri proxime sunt, ut numeri naturales impares. Unde, cum spatia nonnisi in motu uniformiter accelerato eadem ratione crescant, sequitur, corpora libere labentia motum uniformiter accelerare.

118. Quæ itaque de motu uniformiter accelerato dicta sunt, corporibus libere labentibus adplicanda veniunt. Quare cum in dicto motu sit $S : s = T^2 : t^2$ (26), facili negotio determinari poterunt spatia, singulis dati temporis partibus æqualibus confecta, si detur tempus, quo, et altitudo, ex qua corpus libere descendit. Sic v.g. si corpus quodpiam (quod sensibiliter aëris resistentiam non persentiscat) intra $4''$ per altitudinem $248{,}25792'$ descendat, quæraturque quantum nam spatium singulis min. sec. seorsim confecerit; erit in superiori proportione substituendo: $248{,}25792' : s = 4^2 : 1^2$. Unde quæsitum

spat. primi mi. sec. $s = \frac{248{,}25792' \cdot 1^2}{4^2} = 15{,}51612'$.

Quia porro spatia, motu unif. accel. confecta æqualibus temporis partibus crescunt, ut numeri naturales impares (27); si

spati., 1. min. sec. confectum, est $= 15{,}51612'$
erit 2. min. sec. $= 3 \cdot 15{,}51612' = 36{,}54836'$
3. min. sec. $= 5 \cdot 15{,}51612 = 77{,}58060'$
4. min. sec. $= 7 \cdot 15{,}51612 = 118{,}61284'$

Omnibus igitur 4 min. sec. seu toto tempore dato $248{,}25792'$.

119. Ut porro omnia problemata, quibus altitudo ex dato lapsus tempore, et vicissim; aut celeritas ex data altitudine, et contra, determinatur, resolvi possint, necesse est scire gravitatis intensitatem eo in loco, in quo problemata hæc resolvenda veniunt; gravitatis enim intensitas sub diversa latitudine geographica diversa quoque deprehenditur, eo, quod ea per celeritatem, a gravitate certo tempore productam, determinetur (94), hanc vero diversis in distantiis ab æquatore versus polos diversas quoque celeritates æqualibus temporibus producere notum sit.

120. Institutis observationibus compertum est Wiennæ in Austria (48° 12′ lat. bor.) intensitatem gravitatis, quam etiam *accelerationem gravitatis* vocant, tantam esse, ut corpus libero lapsu 1. min. sec. 15,51612 pedes wiennenses conficiat. Hanc lapsus altitudinem in sequentibus per g, exprimemus.

121. Itaque ad lapsus altitudinem s, determinandum est:

$$S : s = T^2 : t^2 \quad (26)$$

hinc $s = \frac{S t^2}{T^2}$

seu, cum 1. min. sec. conf. $g = 15{,}51612$ (120),

$$\text{I. } s = \frac{g t^2}{1^2} = g t^2 = 15{,}51612\, t^2$$

h. e. ad altitudinem, dato tempori durantis lapsus correspondentem, in pedibus wiennensibus inveniendam, numerus minutorum sec. dati temporis elevatus ad quadratum multiplicari debet per spatium primo min. sec. confectum, seu per 15,51612′.

$$\text{II. } s = \frac{ct}{2} \quad (25),$$

Et hinc $t = \frac{2s}{c}$; adeoque etiam $t^2 = \frac{4s^2}{c^2}$,

quod in $s = gt^2$ (I.) substituendo dat $s = \frac{4gs^2}{c^2}$,

unde III. $s = \frac{c^2}{4g} = \frac{c^2}{62{,}06448} = 0{,}0161\, c^2$ prox.

h. e. ad inveniendam in ped. wien. altitudinem, ex qua corpus libere labendo datam finalem celeritatem nanciscitur, dividatur quadratum datæ finalis celeritatis per 62,06448, aut idem quadratum celeritatis per 0,0161 multiplicetur.

122. Ad inveniendam vero celeritatem c, est:

$$\text{I. } c = \frac{2s}{t} \ (25).$$

Quodsi porro tempus ponatur $= 1''$, est $s = g$ (120); unde corporis libere labentis celeritas finalis post 1. min. sec. $c = 2g = 31{,}03224$. Cum vero celeritas crescat, ut tempus (23), est:

$$1 : t = 2g : c$$

adeoque II. $c = 2gt = 31{,}03224t$,

h. e. dato tempori correspondens celeritas finalis invenitur, si datum tempus per celeritatem finalem unius min. sec. seu per 31,03224 multiplicetur.

$$\text{III. } c = \sqrt{4gs} \ (121.\text{III.}) = \sqrt{62{,}06448s}$$
$$= 2\sqrt{gs} = 7{,}8781\sqrt{s} \text{ prox.}$$

seu formula ad inveniendam celeritatem finalem altitudini datæ correspondentem.

123. Denique ad tempus t, determinandum est:

$$\text{I. } t = \frac{s\,2}{c} \ (25).$$

$$\text{II. } t = \frac{c}{2g} \ (122.\text{II.}) = \frac{c}{31{,}03224} = 0{,}0322c \text{ pr.}$$

$$\text{III. } t = \sqrt{\frac{s}{g}} \ (121.\text{I.}) = \sqrt{\frac{s}{15{,}51612}}$$
$$= \sqrt{0{,}0644s} = 0{,}2836\sqrt{s} \text{ prox.}$$

II. De

II. De lapsu corporum per planum inclinatum.

124. Per *planum inclinatum* intelligitur planum, cum horizonte angulum acutum, quem *inclinationis angulum* vocant, constituens. Ejusmodi plani inclinati sectionem verticalem exhibet ABC, *Fig.* 42. in qua AC longitudinem, AB altitudinem, et BC, seu linea horizontalis basim plani incl. repræsentat. Planum ad huc descriptum *simplex* vocatur, ut distinquatur a *composito*, quod coalescit e pluribus simplicibus inter se junctis, ac ad se invicem ita inclinatis, ut singula eorum cum horizonte versus eandem plagam angulum acutum efficiant; tale *Fig.* 45. exhibet.

125. Quod si in plano inclinato AC ponatur esse corpus P, cujus centrum in O sit; hoc vi absoluta gravitatis versus centrum terræ tendet directione ad horizontem perpendiculari OD (92), quæ, quia ad planum incl. obliqua est, in duas alias vires resolvi potest; unam relate ad planum perpendicularem OM, quæ, utpote planum premens, *pressiva* dicitur, et aliam relate ad planum parallelam OR = MN, quæ *comparativa*, etiam *relativa* vocatur. Vis pressiva OM, a reactione plani immobilis eliditur; sola itaque comparativa OR = MN remanet, quæ motum corporis directione OR, si nullum ei impedimentum occurrat, producet: *corpus igitur per planum incl. descendens vi comparativa tantum fertur;*

quæ, quia acceleratrix est, utpote pars vis absolutæ gravitatis, descensum corporum acceleret, est necesse.

126. Quia porro $\triangle ABC \backsim \triangle OMN$, est:

I. $ON : MN = AC : AB = r : sin.\ a$, h. e. *vis absoluta est ad comparativam*, *ut longitudo plani ad ejus altitudinem*, aut, *ut radius ad sinum anguli inclinationis.* Unde cum ratio hæc inter vim absolutam, et comparativam constans sit; vis comparativa quoque quemadmodum absoluta, acceleratrix constans est, adeoque motus etiam corporum, per planum incl. absque impedimento descendentium, uniformiter acceleratus, uti viceversa ascendentium unif. retardatus sit, est necesse.

II. $ON : OM = AC : BC = r : cos.\ a$, h. e. *vis absoluta est ad pressivam*, *sicut longitudo ipsius plani ad basim*, aut *sicut radius ad cosinum anguli inclinationis.*

127. Et hinc si W, et w, vires absolutas; V, et v, comparativas; L, et l, longitudines; A, et a, altitudines; B, et b bases diversorum planorum incl. designent; erit:

in uno $W : V = L : A$, adeoque $V = \frac{WA}{L}$

et in altero $w : v = l : a$, adeoque $v = \frac{wa}{l}$

ex quo demum est $V : v = \frac{WA}{L} : \frac{wa}{l}$

seu, cum vis absoluta gravitatis in eadem plaga constans sit, adeoque $W = w$, est quoque

$$V : v = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$$

h. e. *vires comparativæ in diversis planis sunt in ratione composita ex directa altitudinum*, *et inversa longitudinum eorumdem planorum incl.* Quare

si $L = l$, est $V : v = A : a$

si $A = a$, est $V : v = \frac{1}{L} : \frac{1}{l}$

si denique $V = v$, est quoque $\frac{A}{L} = \frac{a}{l}$

seu $A : a = L : l$, h. e. plana sunt similia; et viceversa, si plana incl. sunt similia, est $A : a = L : l$, unde $\frac{A}{L} = \frac{a}{l}$, adeoque etiam $V = v$, h. e. *in planis similibus vires comparativæ sunt eædem.*

128. Cum spatia, motu unif. accelerato eodem tempore confecta, sint ut vires acceleratrices (28. II.), est:

I. $S : s = W : V = L : A$ (præc.) h. e. *spatium*, *vi absoluta gravitatis libero lapsu percursum*, *est ad spatium*, *eodem tempore in plano incl. vi comparativa confectum; sicut longitudo plani ad ejus altitudinem.*

II. $S : s = V : v = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$ (præc.)

h. e. *spatia*, *in diversis planis incl. æquali tempore percursa*, *si ab initio computentur*, *sunt in ratione composita ex directa altitudinum*, *et reciproca longitudinum planorum incl.*

129. Quare, si e quocunque plani incl. puncto D, *Fig.* 43. erigatur perpendicularis DE, ad plani altitudinem AB, etiamsi pro-

ductam, pertingens, ea determinabit in altitudine spatium AE, quod vi absoluta percurreretur eo tempore, quo in plano vi comparativa percurritur AD. Et vicissim, si e quocunque altitudinis puncto B ducatur ad planum perpendicularis BF, ea determinabit punctum F, quod corpus vi comparativa in plano incl. descendens attingit eo tempore, quo vi absoluta altitudinem AB, usque punctum B assumtam, emetitur. Cum ob $\triangle AED \backsim \triangle ABF \backsim \triangle ABC$, sit:

$$AE : AD = AB : AF = AC : AB \quad (128.\ \mathrm{I.}).$$

130. Imo si supra quotcunque planorum incl. AC, AD, *Fig.* 44. communem altitudinem AB, tamquam diametrum, describatur semiperipheria, hæc quoque ubi plana incl. intersecat, determinat spatia AE, AF, in planis percursa eo tempore, quo libero lapsu altitudo AB describeretur; si quidem rectæ, e quovis intersectionis puncto E, F, ad B ductæ, planis ipsis perpendiculariter insistant. Et hinc demum Galileanum theorema patet: *corpus per omnes semiperipheriæ chordas, in extremitatibus diametri terminatas, descendere eo tempore, quo vi absoluta per diametrum verticalem descenderet.*

131. Cum sit $W = \frac{S}{T^2}$ (28. I.), atque in plano incl. pro spatio, vi absoluta gravitatis confecto, sumatur altitudo; pro spatio vero, vi comparativa percurso, longitudo plani, est:

$$\mathrm{I.}\quad W : V = \frac{A}{T^2} : \frac{L}{t^2}$$

et quia $W : V = L : A$ (127.)

est $\frac{A}{T^2} : \frac{L}{t^2} = L : A$

seu $T^2 : t^2 = A^2 : L^2$

hinc $T : t = A : L$

h. e. *tempus descensus liberi per altitudinem est ad tempus descensus per longitudinem plani, sicut ejus altitudo ad longitudinem.* Unde, cum plani incl. altitudo, utpote cathetus verticalis, semper sit minor, quam ejusdem longitudo, utpote hypotenusa, etiam tempus liberi descensus per altitudinem semper minus est, tempore descensus per longitudinem plani.

$$\mathrm{II.}\quad V : v = \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2} \quad (28.\ \mathrm{I.})$$

et quia $V : v = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$ (127.)

est quoque $\frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2} = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$

seu $T^2 : t^2 = \frac{L^2}{A} : \frac{l^2}{a}$

unde $T : t = \frac{L}{\sqrt{A}} : \frac{l}{\sqrt{a}}$

h. e. *tempora descensus per diversa plana incl. sunt in ratione composita ex directa longitudinum, et inversa subduplicata altitudinum.* Quare

si $A = a$, est $T : t = L : l$.

132. Cum celeritates, a viribus acceleratricibus eodem tempore productæ, sint, ut ipsæ vires (27), est:

I. $C : c = W : V = L : A$ (127);

h. e. *celeritas libero lapsu per altitudinem acquisita est ad celeritatem eodem tempore in descensu per planum incl. acquisitam, sicut longitudo ejusdem plani ad altitudinem.* Proinde cum longitudo plani incl. semper major sit ejus altitudine; est quoque celeritas, libero lapsu acquisita, semper major celeritate, quæ descensu per planum incl. eodem tempore acquiritur.

II. $C : c = V : v = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$ (127),

h. e. *celeritas in diversis planis incl. eodem descensus tempore acquisitæ sunt in ratione composita ex directa altitudinum, et inversa longitudinum planorum incl.* Quare

si $L = l$, est $C : c = A : a$

si $A = a$, est $C : c = \frac{1}{L} : \frac{1}{l}$

hinc descensus per planum inclinatum eo tardior est, quo major longitudo plani sub eadem altitudine; et contra, eo celerior, quo minor longitudo plani, manente eadem altitudine; atqui vero, quo magis crescit plani incl. longitudo, manente eadem altitudine, eo minor evadit angulus inclinationis, et contra, quo magis decrescit plani incl. longitudo sub eadem altitudine, eo major fit angulus inclinationis; ergo quo angulus inclinationis plani minor, eo descensus per planum incl. est tardior; et contra, eo celerior est descensus, quo angulus inclinationis est major.

133. Cum sit $W : V = L : A$ (127)
item $T : t = A : L$ (131)
est quoque $WT : Vt = AL : AL$
atqui etiam $WT : Vt = C : c$ (21)
ergo quoque $AL : AL = C : c$
consequenter $C = c$

h. e. *corpus per planum incl. descendens, eam in fine acquirit celeritatem, quam per ejusdem altitudinem libere labendo acquireret.* E quo demum patet: rectas, basi plani incl. parallelas, determinare, tam in plano incl. quam in ejus altitudine puncta, in quibus corpus, tam per planum descendens, quam per ejusdem altitudinem libere decidens, æqualem celeritatem adipiscitur.

134. Si e contrario corpus quodpiam per planum inclinatum celeritate C ascenderet, id eo tempore eveniret, quo per descensum in eodem plano celeritatem eandem C acquisivisset, atque spatium quoque ascendendo idem, quod descendendo percurreret (32).

135. Si planum incl. compositum ADEC, *Fig.* 45. coalescat e simplicibus AD, DE, EC, quorum altitudines per AF, DH = FG, et EI = GB repræsententur, corpus descendens per AD, in D eandem adipiscitur celeritatem, quam libere labendo per ejusdem altitudinem AF acquireret (134); perinde per DE descendens eandem acquireret, quam adipisceretur libere labendo per DH = FG; pariter per EC descendendo ean-

dem, quam per $EI = GB$ labendo. Quodsi ergo corpus per mutatam in *flexibus* directionem nullam ponatur amittere celeritatem, tantam in *D* per descensum *in* plano incl. composito *ADEC* acquireret, quantam per $AF + FG + GB = AB$, seu ejus altitudinem libere labendo obtineret.

136. Verum, quia celeritas, per AD acquisita, relate ad *DE directionem* obliquam habet, ea resolvi potest in duas $AK = LD$, et $AL = KD$, quarum una *LD*, *utpote* ad planum KDE perpendicularis, *ob ejus* reactionem eliditur; altera KD vero corpus inciperet per DE moveri: celeritas *igitur* per mutatam in flexibus plani *inclinati* compositi directionem *semper aliquid*, nempe $AD - KD = Km$, de *sua* celeritate amittit; et eo quidem plus, quo major est angulus KDA, eo contra minus, quo dictus angulus minor est; et si quidem is fuerit infinite parvus, decrementum *celeritatis* $Km = AD - KD$, infinite *parvum* secundi ordinis erit, (utpote *sinus* versus anguli infinite parvi, qui infinitesimus secundi ordinis est, cum sit, *Fig.* 27. $AD : DE = DE : DB$, seu sinus versus AD ad infinite parvam DE, utpote sinum rectum anguli infinite parvi ABE, sicut hæc, ad finitam DB); licet ergo hujusmodi plana AD, DE, EC, &c. sub angulo infinite parvo ad se invicem inclinata, ponantur numero infinita evenire; summa tamen non constitueret, nisi decrementum celeritatis infinite parvum primi ordinis, seu nullum finitum.

137. Jam vero, si plani incl. sectio verticalis curvam lineam referat, ea potest considerari constare ex infinitis planis simplicibus infinite parvæ longitudinis, et altitudinis, quorum bina contigua nonnisi infinite parum a linea recta aberrent, unde dictus angulus infinite parvus erit; quare celeritas quoque in flexibus amissa, utpote infinite parva, respectu præcedentis finitæ evanescet. Corpus itaque per curvam lineam, in verticali plano sitam, descendens eandem acquirit celeritatem, quam acquireret per ejusdem altitudinem libere delabendo (135).

138. Si igitur curva linea ABC, *Fig.* 46. in plano verticali exsistit, ducta horizontali tangente EF, huicque parallela ordinata AC, atque per punctum contactus B, verticalis BD, corpus per curvam AB descendens, tantam usque B acquirit celeritatem, quantam libero per verticalem $DB = AE$ lapsu acquireret (præc.); hoc per consequens, si nullum impedimentum motus foret, per tangentem BF motu æquabili progrederetur; at si etiam post B in curva linea moveri cogatur, in ea spatium, celeritati per DB acquisitæ correspondens BC, percurret, immutata semper celeritate, usque dum in summo puncto C omnem amiserit (134). Porro eodem tempore, quo corpus ex B ad C ascendit, ex C ad B descendere debet; atque sic corpus alternatim ascendere, et descendere deberet sine fine, si nullum obstaculum motus persentisceret.

139. Si ergo curva, per quam corpus descendit, et ascendit, sit arcus circuli, cujus radius $= L$, et T tempus, quo per ejus diametrum $= 2L$ libere cadit, est:

$$2L = gT^2 \text{ (121. I.)}$$

$$\text{et } T = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

Quare eodem quoque hoc tempore descendet corpus per quamlibet illius peripheriæ chordam (130).

140. Quodsi vero arcus ABC, *Cycloïs* est, seu curva, quam determinatum peripheriæ circuli, super recta revoluti, punctum describit eo tempore, quo tota peripheria semel circumagitur; Mathesis sublimior demonstrat:

I. Quod corpus per arcum cycloidis AB, ex A in B breviore tempore descendat, quam per quamcunque lineam iisdem punctis terminatam; unde etiam curva *brachystochrona*, seu brevissimi descensus dicitur.

II. Quod tempus descensus per quemvis cycloidis arcum usque ad punctum infimum B, semper sit idem; quapropter eam *isochronam*, aut *tautochronam*, i. e. æquidiuturni descensus vocant.

III. Quod tempus descensus per quemvis cycloidis arcum usque ad infimum punctum, sit ad tempus lapsus liberi per diametrum verticalem circuli genitoris, ut semiperipheria ad diametrum; adeoque

$$T : t = \frac{\pi}{2} : \delta$$

$$\text{seu } 2T : t = \pi : \delta$$

h. e. quia tempus ascensus versus alteram partem est æquale tempori descensus (134), quod totum tempus descensus, et ascensus per quemvis cycloidis arcum, sit ad tempus liberi descensus per diametrum circuli genitoris, ut peripheria ad diametrum.

III. De lapsu corporum pendulorum.

141. *Pendulum* dicitur quodvis corpus grave e puncto fixo suspensum ita, ut circa illud agitari possit. Quodsi ejusmodi grave instar puncti, e filo, aut virga ponderis experte suspensi, consideretur, pendulum est *simplex;* secus *compositum.*

142. Pendulum AC, *Fig.* 47. quiescit, si linea directionis gravitatis per ejus centrum, et punctum suspensionis transit. At si illud usque B elevatum sibi relinquatur, quiescere nequit, verum gravitatis absolutæ, qua verticaliter deorsum urgetur, per BF pro tempusculo infinite parvo exhibitæ, parte una $BG = HF$, quæ ideo *comparativa vis* est, per arcus infinite parvos BG, &c. arcum BA componentes, descendet, parte gravitatis altera BH, contraria fili actione elisa; eodem prorsus modo, ac si abscisso filo per canalem circularem æquali radio CA descriptum, omnique motus impedimento liberum descenderet. Porro ad infimum punctum A pertingens acquirit celeritatem altitudini verticali EA correspondentem (137), qua per consequens, si nullum motus obstaculum aderit, per arcum $AD = BA$ ascendet (138). Eandem ob ra-

tionem ex D ad A descendet, atque hinc ad B ascendet, et sic porro.

143. Motus hic penduli in plano verticali cis, et trans lineam verticalem, quam *quietis lineam* dicimus, *oscillatio*, etiam *vibratio* vocatur. Solus vero descensus, aut ascensus penduli, *semioscillatio* audit. Oscillationes, quæ, ut ut inæquales, æquali tamen tempore absolvuntur, *isochronæ*, i. e. æqui diuturnæ, uti ipsa pendula, quæ tales oscillationes faciunt, *isochrona* nuncupantur. Distantia puncti gravis a puncto suspensionis, penduli *longitudinem*, et angulus a, quem pendulum elevatum cum linea quietis comprehendit, *angulum elevationis*, etiam *elongationis* dictum, constituit.

144. Porro cum $\triangle BFH \backsim \triangle CBE$, est: HF, seu $BG : BF = BE : BC = \sin. a : r$, h. e. *vis comparativa ad absolutam, sicut sinus anguli elevationis ad radium.*

145. Quare, si V, vim comparativam, et W, absolutam designet, est:

$$V : W = \sin.\ a : r,$$

$$\text{unde } V = \frac{W \cdot \sin.\ a}{r}.$$

Cum vero vis absoluta in uno, eodemque loco, et radius semper, constantes quantitates sint; est:

$$V = \sin.\ a,$$

h. e. *vis comparativa, quæ pendulum in quovis puncto ad descensum urget, est, ut sinus anguli elevationis;* qui, quoniam in singulis punctis arcus variatur, descensus penduli fit quidem motu accelerato, quia

parte gravitatis absolutæ fit; at non uniformiter tali, qui vim constantem supponit.

146. Si quod pendulum describit arcus circuli, qui 15° non excedunt, curvatura ejusmodi exiguorum arcuum circuli proxime coincidit cum curvatura cycloidis, descriptæ per eum circulum genitorem, cujus diameter est dimidia longitudo penduli; unde tempus quoque oscillationis per exiguos arcus circuli idem est cum tempore motus in cycloide, cujus axis est dimidia longitudo penduli. Quare si t, designet tempus oscillationis per exiguos arcus circuli, et τ tempus liberi descensus per axim cycloidis, adeoque per dimidiam longitudinem penduli, est:

$$\text{I. } t : \tau = \pi : \delta = 314\text{-} : 100 = 3{,}14\text{--} : 1 \ (140),$$

$$\text{II. } t : 2\tau = \pi : 2\delta = \frac{\pi}{2} : \delta = \frac{\pi}{2} : 1.$$

Cum vero τ, sit tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli, est 2τ, tempus descensus per spatium quadruplo majus (28. III.), adeoque per duplam longitudinem penduli, sive per diametrum circuli, cujus exiguum arcum pendulum describit. Quare *tempus oscillationis per exiguum arcum circuli est ad tempus descensus per diametrum ejusdem circuli, sicut semiperipheria ad diametrum.* Cum vero tempus liberi descensus per diametrum circuli, cujus exiguum arcum pendulum describit,

sit $= \sqrt{\frac{2l}{g}}$ (139), est:

$$\text{III. } t : \sqrt{\frac{2l}{g}} = \frac{\pi}{2} : 1,$$

$$\text{hinc IV. } t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{\frac{2l\pi^2}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

147. Pro duobus itaque pendulis, est:

$$T : t = \pi\sqrt{\frac{L}{2G}} : \pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = \sqrt{\frac{L}{2G}} : \sqrt{\frac{l}{2g}},$$

seu, cum in uno, eodemque loco $G = g$, h. e. altitudo liberi lapsus per primum min. sec. constans sit; est:

$$T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l},$$

h. e. *tempora oscillationum in diversis pendulis sunt in ratione subduplicata longitudinum.* Hinc, si quadruplo longius sit unum pendulum altero; illius tempus oscillationis est duplo majus, quam hujus; si vero longitudo penduli eadem, seu constans sit, etiam tempus oscillationis idem, seu constans est. Ut itaque oscillationes in dato pendulo isochronæ maneant, maxime curandum est, ne per calorem æstivum ejus longitudo augeatur, aut per frigus brumale minuatur. Quam quidem in rem varia jam excogitabantur media, quæ partim calculo determinari, partim in ipso pendulo adplicari debent.

148. Quodsi N, et n, numeros oscillationum duorum pendulorum isochronorum, dato tempore t, absolutarum designent, erit:

$$N : n = Nt : nt = \frac{t}{n} : \frac{t}{N}$$

atqui $\frac{t}{N}$ exhibet unius, et $\frac{t}{n}$ alterius penduli tempus, quo quamvis oscillationem isochronam absolvit; hinc *numerus oscillationum isochronarum est in ratione reciproca temporis, quo singulæ oscillationes peraguntur.*

Si itaque tempora hæc dicantur T, et t, erit:

$$\text{I. } N : n = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$$

atqui $T : t = \sqrt{\frac{L}{2G}} : \sqrt{\frac{l}{2g}}$ (147);

ergo quoque II. $N : n = \sqrt{\frac{2G}{L}} : \sqrt{\frac{2g}{l}}$,

h. e. *numerus oscillationum duorum pendulorum, in exiguis arcubus oscillantium, est in ratione subduplicata directa gravitatis, et inversa longitudinis.* Quodsi ergo sit $G = g$, uti in uno, eodemque loco est, erit quoque

$$\text{III. } N : n = \sqrt{\frac{1}{L}} : \sqrt{\frac{1}{l}}$$

h. e. *in uno, eodemque loco numerus oscillationum duorum pendulorum isochronorum in exiguis arcubus oscillantium est in ratione subduplicata inversa longitudinis.* In quo itaque pendulo numerus oscillationum certo tempore absolutarum major est, in eo longitudo penduli minor sit, est necesse; et contra.

Si dein sit $L = l$, est quoque

$$\text{IV. } N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$$

h. e. *numerus oscillationum duorum pendulorum isochronorum æqualis longitudinis est in ratione subduplicata gravitatis.* In quo itaque loco numerus oscillationum penduli ejusdem longitudinis certo tempore absolutarum major est, in eo gravitatem quoque majorem esse oportet; et contra.

Cum ergo ex observationibus certum sit, numerum oscillationum penduli ejusdem longitudinis dato tempore absolutarum a superficie maris versus apices montium decrescere a), sequitur: gravitatem quoque a superficie maris versus apices montium decrescere, atque ideo gravitatem cum distantia a centro telluris imminui; e quo simul patet: pendulum pro altitudine montium determinanda inservire posse. Item cum idem numerus oscillationum ab æquatore versus polos crescat b), sequitur: gravitatem quoque ab æquatore versus polos crescere.

Si deniq. sit N = n, est quoq. $\sqrt{\frac{2G}{L}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$,

atque ideo $\quad$ V. $G : g = L : l$,

h. e. *gravitates sunt, ut longitudines pendulorum isochronorum, eundem numerum oscillationum certo tempore absolventium.* In quo itaque loco gravitas major est, in eo longitudo quoque penduli major esse debet, ut easdem numero oscillationes eodem tempore absolvat; et contra. Cum itaque ab

---

a) Sic *Condamine*, et *Bouguer* observarunt, pendulum, quod in ripa fluvii Amazon intra 24 horas 98770 oscillationes fecerat, in civitate Quito, quæ 1460 perticis (Toise) altius jacet, nonnisi 98740, et in vertice montis Pitchinca, qui 970 perticis civitate elatior est, nonnisi 98710 oscillationes fecisse: quare, in ripa fluvii maximam, minorem in civitate, et minimam in vertice montis esse gravitatem, liquido patet.

b) Sic pendulum *Richerii*, quod Parisiis ad minutum sec. oscillabat, Cajennæ prope æquatorem tardius oscillabat, adeo, ut intra 24 horas 148 pauciores oscillationes absolverit.

ab æquatore versus polos gravitas crescat, pendulum quoque, ut easdem numero oscillationes eodem tempore absolvat, crescere debet. Rationem hanc longitudinis penduli simplicis ad minuta sec. oscillantis sequens tabella exhibet.

Latitudinis gradus	Long. penduli in lin. parisinis	Latitudinis gradus	Long. penduli in lin. parisinis
0	439,07	52	440,65
5	439,09	53	440,68
10	439,15	54	440,71
20	439,38	55	440,75
30	439,72	56	440,79
40	440,13	57	440,82
45	440,35	58	440,85
46	440,40	59	440,88
47	440,45	60	440,92
48	440,49	65	441,07
49	440,54	70	441,20
50	440,58	80	441,38
51	440,62	90	441,45

149. Si pendulum simplex ponatur isochronum, quod singulas oscillationes intra min. sec. absolvit, erit

$$t = 1'' = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (146.\ \text{IV.})$$

et hinc $\quad g = \frac{\pi^2 l}{2}$.

Unde, si l, seu longitudo penduli simplicis, ad minutum sec. oscillantis, ex observationibus definita sit, adcuratius, quam immediatis observationibus inveniri potest g, seu spatium, per quod corpus primo min. sec. libere labitur. Sic cum Wiennæ in Austria sub 48° 12′ lat. bor. longitudo penduli, ad min. sec. oscillantis, sit 452,739 lin. wien. est $g = 15{,}51612$ ped. wien. (120).

150. Pendula, quibus utimur, non simplicia, sed composita sunt. Datur tamen in iis aliquod punctum, in quo, si tota penduli massa esset concentrata, oscillationes eodem modo, eodemque tempore peragerentur, quo peraguntur ab ipso pendulo composito. Punctum hoc *centrum oscillationis* dicitur. Pendulum itaque simplex, cujus longitudo æqualis est distantiæ centri oscillationis a puncto suspensionis, isochronum est pendulo composito. Ut ergo pendulum compositum in simplex isochronum reducatur, centrum oscillationis determinandum est. Qua quidem ardua de re vide sis:

Fischer's Physicalisches Wörterbuch 3. Thl.
Kästner's höhere Mechanik, 2. Abschnitt, 34. §.
Karsten's Lehrbegriff, 4. Th. 179. §.

Articulus II.

De motu corporum projectorum.

151. Directio vis projectilis, vel est verticalis, vel non: si illud, vel conspirat cum directione gravitatis, vel ei directe opponitur.

152. Si directio vis projectilis conspiret cum directione gravitatis, quod fit, dum corpus verticaliter deorsum projicitur; corpus initio liberi lapsus jam celeritate aliqua c, a vi projectili producta, gaudet; at vero per gravitatem quoque toto lapsus tempore acquiret celeritatem $= 2gt$ (122. II.); unde cum fine temporis t, habebit celeritatem.

$$\text{I. } k = c + 2gt.$$

Porro corpus sola initiali celeritate c, percurreret tempore t, spatium $= ct$ (22); solo vero libero lapsu spatium $= gt^2$ (121. I.); unde simul

$$\text{II. } s = ct + gt^2.$$

Quodsi denique corpus ponatur acquisivisse celeritatem initialem c, libero lapsu ex altitudine a, erit $a = \frac{c^2}{4g}$ (121. III.); quia vero k, designat totam celeritatem per s, et a, acquisitam, est:

$$\text{III. } k = \sqrt{4g \cdot (s + a)} \text{ (122. III.)}$$
$$= \sqrt{4g \cdot \left(s + \frac{c^2}{4g}\right)} = \sqrt{(4gs + c^2)}.$$

153. Si directio vis projectilis directe opponatur directioni gravitatis, quod fit, dum corpus verticaliter sursum projicitur; corpus initio motus celeritate c, vi projectili respondente, tempore t, percurreret spatium $s = ct$ (22), at vero simul per gravitatem eodem tempore libere laberetur per $s = gt^2$ (121. I.); quod, quia priori ex hypothesi oppositum est, corpus initiali celeritate c, tempore t, ascendet per altitudinem

$$\text{I. } a = ct - gt^2.$$

unde, si sit $ct > gt^2$, differentia positiva est, et altitudinem ascensus denotat.

Si sit $ct = gt^2$, differentia est *nulla*, nullus adeoque etiam ascensus.
Si denique sit $ct < gt^2$, differentia est negativa, et jam *altitudinem non ascensus*, sed descensus infra initium inchoati motus designat.
Porro cum corpus initio motus celeritate c, vi projectili respondente, gaudeat; per gravitatem vero eodem tempore motus celeritatem $= 2gt$ (122. II.) acquirat, priori tamen oppositam; sequitur: corpus cum fine temporis t, habere celeritatem *finalem*

$$\text{II. } C = c - 2gt.$$

E qua formula, cum crescente t, decrescere debeat C, sequitur: hunc corporis motum esse retardatum; quare celeritas aliquando annihilari, atque motus sursum versus cessare debet; quod eveniet, si fuerit $c - 2gt = 0$. Unde hoc in casu erit

$$\text{III. } c = 2gt,$$

et

$$\text{IV. } t = \frac{c}{2g}$$

ac dem. V. $a = c.\frac{c}{2g} - g.\frac{c^2}{4g^2}$ (IV. in I. subst.)

$$= \frac{c^2}{2g} - \frac{c^2}{4g} = \frac{c^2}{4g}$$

Denique, cum formulæ, $a = \frac{c^2}{4g}$; $t = \frac{c}{2g}$; $c = 2gt$, formulis in 121, 122, 123 sint analogæ, sequitur: motum corporum verticaliter sursum projectorum iisdem legibus adstrictum esse; igitur uniformiter retardatum, si aliunde nullum motus obstaculum adsit.

154. Ex dictis facile jam resolvi potest et illud problema, quo ex dato tempore

ascensus, et descensus corporis, e superficie terræ verticaliter sursum projecti, ac rursum in terram libere delapsi, semotis impedimentis, quæritur altitudo ascensus, et celeritas projectilis. Cum enim gravitas, utpote vis acceleratrix constans eodem tempore egeat ad celeritatem projectilem exstinguendam, quo egeret ad eandem celeritatem libero lapsu producendam (32.), sequitur: dimidiari debere datum, vel observatum tempus ascensus, et descensus, ut obtineatur tempus solius ascensus, aut liberi descensus; habito vero hoc tempore, invenietur quæsita celeritas initialis, seu projectilis, tenore Nri. 153. III, et altitudo ascensus ope ejusdem Nri. V: aut breviori adhuc via quæsita altitudo descensus tenore Nri. 121. I; huicque respondens celeritas finalis, quæ simul est initialis, seu projectilis, ope Nri 122.

155. Si directio vis projectilis AI, *Fig.* 21. non sit verticalis, sed ad horizontem Aq, sub quocunque angulo IAq inclinata, corpus celeritate c, projectum, tempore t, percurreret motu æquabili spatium $AE = Fm = ct$ (22.); at vero simul per gravitatem eodem tempore t, libere laberetur per spatium $AF = Em = gt^2$ (121. I.); quare corpus, cum fine temporis t, erit in m (36, et 57), et linea AmCoq, quam dicto modo describit, (cum directio vis gravitatis absque sensibili errore pro parallela haberi queat, parabola est (61.).

156. Linea horizontalis Aq, a puncto projectionis A usque punctum q, in quo mobile lineæ horizontali occurrit, *amplitudo jactus* vocatur. Quodsi hæc in k, bifariam, et perpendiculariter secetur recta KD, recta hæc *axis;* medium vero ejus punctum C, *vertex parabolæ* erit; hujus a linea horizontali Aq, distantia CK, altitudinem jactus, seu *ascensum maximum* exhibet. Denique angulus IAq, qui fit a directione vis projectilis AI, ceu tangente, et ab horizontali linea Aq, *angulus elevationis* vocitatur.

157. Quodsi ang. elevationis IAq ponatur = a, amplitudo jactus Aq = i; ascensus maximus CK = A, celeritas projectilis = c, tempus denique, quo corpus ex A ad q, pertingit = t; est in $\triangle$ AIq

I. *sin. tot.* seu 1 : *sin. a* = AI : Iq,

adeoque $Iq = AI \cdot \sin. a.$

seu, quia, ob $\triangle ADK \backsim \triangle AIq$, $Iq = 2DK = 4CK = 4A$, et $AI = ct$;

$$4A = ct \cdot \sin. a.$$

seu $$A = \frac{ct \cdot \sin. a}{4};$$

item, quia $Iq = gt^2 = 4A$, est quoque $A = \frac{gt^2}{4}$,

adeoque $$\frac{ct \cdot \sin. a}{4} = \frac{gt^2}{4}$$

seu $$c \cdot \sin. a = gt.$$

Unde tempus, quo corpus horizontem in q, attingit

$$t = \frac{c \cdot \sin. a}{g}.$$

II. *Sin. tot.* seu 1 : *cos.* a = AI : Aq,

adeoque $Aq = AI \cdot \cos. a,$

seu $i = ct \cdot \cos. a$

et valorem de t, inventum substituendo, est amplitudo jactus

$$i = \frac{c^2 \cdot \sin. a \cdot \cos. a}{g}.$$

III. Denique, si in $A = \frac{gt^2}{4}$, valor de t, inventus substituatur, est ascensus maximus

$$A = \frac{g \cdot c^2 \cdot \sin. a^2}{4g^2} = \frac{c^2 \cdot \sin. a^2}{4g}.$$

158. Cum $\sin. a \cdot \cos. a = \frac{1}{2} \sin. 2a$, a), est in 157. II. substituendo

$$i = \frac{c^2}{2g} \sin. 2a.$$

Et pro duobus corporibus sub diversis angulis A, et a, eadem celeritate projectis, sunt amplitudines jactuum

---

a) Si *Fig.* 48, arcus AB = BD = a, radius AC = BC = DC = r; est arc. AD = 2a, BF = *sin.* a, FC = *cos.* a, DG = *sin.* a, GC = *cos.* a, DE = *sin.* 2a. Jam vero $\triangle BFC \backsim \triangle GHC \backsim \triangle DGI$, unde

$$BC : BF = GC : GH, \text{ seu } IE = \frac{BF \cdot GC}{BC}$$

$$BC : FC = DG : DI, \text{ adeoq. } DI = \frac{FC \cdot DG}{BC}$$

Et hinc $IE + DI$, seu $DE = \frac{BF \cdot GC}{BC} + \frac{FC \cdot DG}{BC}$;

seu, $\sin. 2a = \frac{\sin. a \cdot \cos. a}{r} + \frac{\cos. a \cdot \sin. a}{r} = \frac{2 \sin a \cdot \cos. a}{r}$

adeoque $\sin. a \cdot \cos. a = \frac{r \cdot \sin. 2a}{2} = \frac{1}{2} \sin. 2a.$ (sc. ponendo r = 1.)

$$I = \frac{c^2}{2g} \; sin. \; 2A$$

$$i = \frac{c^2}{2g} \; sin. \; 2a.$$

Unde $I : i = \frac{c^2}{2g} \; sin. \; 2A : \frac{c^2}{2g} \; sin. \; 2a$

$= sin. \; 2A : sin. \; 2a$,

h. e. *amplitudines jactuum, corporum eadem celeritate projectorum, sunt, ut sinus angulorum duplorum elevationis.*

159. Dum itaque *sin.* 2 a, seu *sinus dupli anguli elevationis* maximus fuerit, etiam amplitudo jactus maxima erit, est vero *sin.* 2 a maximus, si $2a = 90^\circ$ (cum *sin.* $90^\circ = 1$, reliquorum vero angulorum sinus pars tantum hujus sit); maxima itaque amplitudo jactus erit, si $2a = 90^\circ$, adeoque $a = 45^\circ$, h. e. si angulus elevationis fuerit semirectus.

160. Cum complementum anguli $a = 90^\circ - a$; erit

$$i = \frac{c^2}{2g} \, sin. \, 2(90^\circ - a) = \frac{c^2}{2g} \, sin. (180^\circ - 2a)$$

jam vero $sin. \; (180^\circ - 2a) = sin. \; 2a$;

ergo quoq. $i = \frac{c^2}{2g} sin. \, 2 \, (90^\circ - a) = \frac{c^2}{2g} \; sin. 2a.$

h. e. *amplitudines jactuum sub angulo quopiam, et ejus complemento, seu sub angulis a semirecto per defectum, et per excessum utrinque æqualiter differentibus, sunt æquales.*

Corpus itaque sub angulo 40° projectum ad eam distantiam fertur, ad quam eadem celeritate sub angulo 50° perveniret.

161. Quodsi angulus elevationis ponatur 45°, est

$$i = \frac{c^2}{2g} \; sin. \; 90^\circ$$

seu quia $sin. \; 90^\circ = 1$

$$i = \frac{c^2}{2g}$$

si vero angulus elevationis ponatur 15°, vel 75°, erit

$$sin. \; 30^\circ = sin. \; 150^\circ = \tfrac{1}{2}$$

adeoque $i = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c^2}{4g}$,

h. e. *amplitudo jactus sub angulo elevationis* 15°, *vel* 75°, *æquatur* $\frac{1}{2}$ *amplitudinis jactus maximæ.*

162. Ex ad huc dictis jam facile resolvi possunt problemata, quibus quæritur, aut amplitudo jactus, dum angulus elevationis, et vis projectilis, v. g. ab accenso pulvere pyrio, quo globus e tormento ejicitur, proveniens, dantur; aut angulus inclinationis, dum vis projectilis, et amplitudo jactus assignantur. Problemata hæc, hisque similia summi momenti essent in Balistica, si in praxim facile reduci possent. At vero primo, vis resistentiæ, qua aër pilis ferreis, atque igniariis globis obstat, tanta est, ut nullo modo negligi in praxi queat; dein, quis non pervideat magnitudinem amplitudinis jactus a qualitate, quantitateque pulveris pyrii pendere; denique etiam, cum gravitatis directiones, utpote versus centrum terræ convergentes, parallelæ esse nequeant, corporis projecti

trajectoria, etiam dum omnis medii resistentia tollitur, si rigorem Geometriæ sequamur, parabola non est, sed curva alia versus centrum terræ cava.

Plura de motu projectorum gravium inveniuntur in sequentibus:

De la Caille Lectiones elementares Mechanicæ. 3. Parte. II. Art.

Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper, und der Hydraulik. 1. Abth. 3. Kap.

Kästner's Anfangs-Gründe der höhern Mechanik. §. 173.

Octavi Cametti, Mechanica. par. 1. c. XII.

Vega's Vorlesungen über die Mathematik. 3. Band. V. Vorlesung.

Sectio III.

De conflictu corporum.

163. Corpora *confligere*, aut *collidi* dicuntur, dum unum, in motu constitutum, aliud, ob inertiam suam obsistens, de loco suo depellit. Unde cum omnia corpora in medio quopiam moveantur, omnis corporum motus conflictus est; et quidem cum omnia corpora, vel solida, vel fluida liquida, vel fluida aëriformia, vel materiæ cosmicæ sint, innumera collisionum genera sunt possibilia, quæ pro diversitate corporum, diversas quoque leges collisionum sequuntur. Nos de conflictu tantum corporum solidorum, abstrahendo a medio, in quo moventur, et quocum eo ipso confligunt, agemus.

164. Porro corpora solida, quæ confligunt, sunt: vel elastica, vel non elastica. Elastica sunt, quæ figuram suam agente quapiam vi externa amissam, atque mutatam, cessante actione vis externæ, recuperant; et si quidem figuram pristinam recuperent ex integro tanta vi, quanta amittebant, *perfecte elastica* esse dicuntur, secus *non perfecte* elastica. Corpora vero non elastica sunt illa, quorum figura, aut nulla vi mutatur, aut si mutatur, nullatenus recuperatur. Talia essent corpora *perfecte dura*, seu, quæ nullam figuræ mutationem admittunt; et *perfecte mollia*, quæ omni etiam minimæ impulsioni cedunt, figuram tamen amissam nullatenus recuperant.

Quamquam vero corpora perfecte dura, mollia, aut elastica non deprehendantur, ut tamen leges conflictus corporum solidorum detegere possimus, ea perfecte dura, mollia, aut elastica supponimus, cum quorum legibus, conflictus corporum revera exsistentium eo exactius congruit, quo ea ad perfectam duritiem, mollitiem, aut elasticitatem magis accedunt.

165. Incursus unius corporis in alterum, seu conflictus, tunc est possibilis, dum, aut unum corpus aliud, vel lentius præcedens, vel quiescens, insequitur, aut ambo sibi occurrunt; et si quidem ante, et post

ictum moveantur in recta ad planum, per punctum contactus ductum, perpendiculari, conflictus *directus:* secus *obliquus* dicitur; quodsi vero in conflictu directo linea ad planum perpendicularis simul per centra corporum transeat, conflictus *directus* etiam *centralis* vocatur.

CAPUT I.

De conflictu directo.

I. *Corporum non elasticorum.*

166. Si duorum durorum non elasticorum corporum massæ M, et m, celeritatibus C, et c, sibi directe occurrant, corpus M, ad contactum physicum cum corpore m, veniens, ad compenetrationem cum eodem nititur, si quidem ad transitum per idem agat; verum quodlibet corpus vi sua impenetrabilitatis resistit compenetrationi: quodlibet ergo etiam corpus alterum, suo motui obstans, removere conatur. Si itaque assumtorum corporum quantitates motus MC, et mc, sint æquales neutrum superabit alterum, atque ideo corpora post ictum quiescent. At vero si sit $MC > mc$, quantitas motus MC, superabit mc, differentia $= MC - mc$; corpus itaque M, hac differentia alterum corpus m, suo obstans motui removere conatur, atque ideo celeritatem ei communicat, donec obstaculo esse desinat, quod tunc fit, dum ambo eandem, seu æqualem celeritatem habent, quia tunc

primum actionem corporis M quodammodo effugiet. Ambo igitur corpora hoc in casu post conflictum directione massæ M, eadem, seu æquali quadam celeritate x, ferentur, ita, ut quantitas motus post conflictum $x(M + m)$ (85), sit æqualis differentiæ quantitatum motus ante conflictum, adeoque $x(M + m) = MC - mc$;
unde celeritas post conflictum $x = \frac{MC - mc}{M + m}$.

167. Quodsi vero corporis duri non elastici massa M, celeritate C, directe incurrat in alterius corporis æque duri non elastici massam m, lentius celeritate c, præcedentem, hoc quoque in casu corpus impulsum m, vi sua impenetrabilitatis resistit compenetrationi incurrentis M, quamobrem impulsum suo obstans motui removere conatur, celeritatemque ei communicat, donatur, donec utrumque æqualem habeat; ambo itaque hoc quoque in casu post conflictum æquali quadam celeritate x, moventur, ita, ut, cum, nec massae, nec celeritates per conflictum quidquam amittant, quantitas motus post conflictum $x(M + m)$, æquetur summæ quantitatis motus ante conflictum, adeoque $x(M + m) = MC + mc$
unde celeritas post ictum $x = \frac{MC + mc}{M + m}$.

168. Quodsi denique corporis itidem duri massa M, celeritate C, directe incurrat in alterius duri massam m, quiescentem, cujus itaque celeritas $c = o$, adeoque etiam $mc = o$, ob rationes in prioribus adductas,

hoc quoque in casu ambo corpora post conflictum æquali quadam celeritate x, movebuntur, ita, ut sit: $x(M+m)=MC$, et hinc celeritas post ictum $x = \frac{MC}{M+m}$. Hinc dura massa quælibet, in motu constituta, motum communicare debet massæ quiescenti; hac tamen crescente, minorem semper celeritatem impulsum corpus quiescens acquirit, ita, ut, si incurrens relate ad impulsum quiescens exiguum sit, magna jam celeritas requiratur, ad sensibilem in eo motum producendum: si ergo m, ponatur $= \infty$, qualem immobilem esse censemus, est $x = \frac{MC}{M+\infty} = \frac{MC}{\infty}$; motus ergo reapse locum habet, at omni assignabili quantitate minor, unde relate ad finitum $= 0$.

169. Ad determinandam igitur communem duorum corporum durorum non elasticorum celeritatem post conflictum, formula hæc est generalis:

$$x = \frac{MC \pm mc}{M+m}$$

et si sit $M = m$, est $x = \frac{C \pm c}{2}$

ubi signum inferius ad sibi occurrentia (166), et superius signum ad insequentia corpora (167, 168) refertur. Utque hunc modum exprimendi in sequentibus quoque retinere liceat, impulsi corporis m, celeritatem ante conflictum, dum lentius præcedit, per $+c$, dum quiescit, per $c = 0$, dum vero directionibus oppositis sibi occurrunt, per $-c$, exprimemus.

170. Quodsi porro ab ea celeritate, quam corpus incurrens M ante conflictum habuit, auferatur ea, quæ ei post conflictum remansit, obtinetur illa, quam incurrens per conflictum amisit: cum ergo ante conflictum habuerit C, post conflictum vero habeat $x = \frac{MC \pm mc}{M+m}$ (præc.), per conflictum amisit celeritatem:

$$C - x = C - \frac{MC \mp mc}{M+m} = \frac{MC + Cm - MC \mp mc}{M+m}$$
$$= \frac{Cm \mp mc}{M+m} = \frac{C \mp c}{M+m} \cdot m.$$

Quodsi vero ab illa celeritate, quam corpus impulsum m, post conflictum habet, auferatur ea, quam ante conflictum habuit, obtinetur illa, quam per conflictum acquisivit: cum ergo post conflictum habeat $x = \frac{MC \pm mc}{M+m}$, ante conflictum vero $\pm c$ (præc.), acquisivit celeritatem:

$$x \mp c = \frac{MC \pm mc}{M+m} \mp c = \frac{MC \pm mc \mp Mc \mp mc}{M+m}$$
$$= \frac{MC \mp Mc}{M+m} = \frac{C \mp c}{M+m} \cdot M.$$

171. Et hinc quantitas motus per conflictum

I. ab incurrente corpore duro M, amissa $= (C - x) M = \frac{C \mp c}{M+m} \cdot Mm.$ (85, et præc.)

II. ab impulso m, acquisita $= (x \mp c) m = \frac{C \mp c}{M+m} \cdot Mm.$ (85, et præc.)

172. Cum incurrentis corporis M, celeritas C, sit ad celeritatem impulso m, prius quiescenti, communicatam,

$$\text{ut } C : \frac{MC}{M+m} \ (168),$$

$$\text{seu, ut } M + m : M,$$

sequitur: celeritatem in conflictu, dum corpus durum in quiescens incurrit, semper in ratione, $M + m : M$, decrescere. Quare, si unum corpus in plura, æque dura non elastica, in eadem serie quiescentia, directe incurrat, celeritas quoque, ultimo communicata, hac eadem ratione inveniri potest; si nempe cujuslibet corporis impulsi, (qualis primo demto cuncta sunt) celeritas ex celeritate incurrentis servato corporum sese excipientium ordine determinetur. Quodsi itaque massæ in dicta serie dispositæ, ponantur simul in aliqua progressione geometrica

$$M, Mq, Mq^2, Mq^3, Mq^4 \,--- \, Mq^n,$$

crescere, aut decrescere; ratio illa erit:

$$M + Mq : M = 1 + q : 1;$$

unde, si incurrentis M, celeritas ponatur C, invenitur

$$\text{per } 1 + q : 1 = C : x, \text{ seu celer. 1. imp.} = \frac{C}{1+q}$$

$$1 + q : 1 = \frac{C}{1+q} : x, \text{ seu } \ \text{〃} \ 2. \ \text{〃} = \frac{C}{(1+q)^2}$$

$$1 + q : 1 = \frac{C}{(1+q)^2} : x, \text{ seu } \ \text{〃} \ 3. \ \text{〃} = \frac{C}{(1+q)^3}$$

$$\text{itaq. celer. cujuscunq. impulsi } Mq^n = \frac{C}{(1+q)^n}$$

si vero massæ sint æquales, erit ea ratio $M + M : M = 2 : 1$, adeoque dicto in casu celeritas decrescet in progressione $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots - - -$

173. In corporibus non elasticis mollibus nulla alia per conflictum producitur mutatio, quam, quod figura eorum immutetur, et quod mutatio motus non momentanee, sed successive fiat, atque ideo impulsum corpus tunc primum moveatur, dum percussio omnibus corporis partibus communicata est; hæc igitur corpora easdem conflictus leges sequuntur.

II. *De conflictu directo corporum perfecte elasticorum.*

174. Si duorum corporum perfecte elasticorum massæ M, et m, celeritatibus C, et $\pm$ c (in sensu 169) directe confligant, utrumque corpus in contactum veniens, mutuo in se agere, atque eo ipso, quia elastica ponuntur, sese comprimere, seu figuras invicem destruere debent (164), et quidem eousque, donec unum alteri obstaculo esse desinat, quod prius, quam æqualem habeant celeritatem, fieri nequit. In conflictu igitur corporum perfecte elasticorum tempore compressionis corpus incurrens tantam quantitatem motus amittit, impulsum vero acquirit, quantam illud amitteret, hoc vero acquireret, si ea corpora non elastica forent. At vero, cum in elasticis corporibus, cessante compressione, figura pristina restituatur, nova ex hoc capite in motu producitur mutatio; ut primum enim

corpora confligentia communem habent celeritatem, expanduntur, h. e. partes compressæ restituuntur, et quidem tanta vi, quanta comprimebantur, at directione illi, qua comprimebantur, opposita (164); quare impulsum corpus m, per restitutionem suarum partium reagit in incurrens M, atque ideo ei tantam quantitatem motus communicat, directione tamen relate ad incurrens contraria, quantam prius amisit, adeoque $-(C-x)M$ (171. I.), eodem modo incurrens M, per restitutionem suarum partium reagit in impulsum m, atque ei tantam quantitatem motus communicat (eadem jam relate ad incurrens directione), quantam prius acquisivit, adeoque $(x \mp c)m$ (171. II.); *hinc itaque in conflictu corporum perfecte elasticorum corpus incurrens amittit, ac impulsum acquirit duplam quantitatem motus illius, quam hoc acquireret, et illud amitteret, si non elastica forent.*

175. Cum vero, si massæ essent non elasticæ, quantitas motus incurrentis post ictum esset Mx, et impulsi mx; per reactionem autem elasticitatis expansivæ incurrens acquirat $-(C-x)M$, et impulsum $+(x \mp c)m$ (præc.), sequitur: in conflictu corporum perfecte elasticorum corpus incurrens habere post ictum quantitatem motus:

$$Mx-(C-x)M = Mx - MC + Mx = 2Mx - MC$$
$$= (2x - C)M;$$

corpus vero impulsum:

$$mx + (x \mp c)m = mx + mx \mp mc = 2mx \mp mc$$
$$= (2x \mp c)m.$$

176. Si itaque incurrentis celeritas post ictum dicatur y, et impulsi z; est incurrentis quantitas motus post ictum:

$$My = (2x - C)M,$$

et impulsi $mz = (2x \mp c)m$,

et hinc incurrentis celer. post ict. $y = 2x - C$,

et impulsi 〃 〃 〃 $z = 2x \mp c$,

seu, quia $x = \frac{MC \pm mc}{M+m}$ (169),

$$y = \frac{2MC \pm 2mc}{M+m} - C = \frac{2MC \pm 2mc - MC - Cm}{M+m}$$
$$= \frac{MC \pm 2mc - Cm}{M+m} = \frac{C(M-m) \pm 2mc}{M+m}$$
$$z = \frac{2MC \pm 2mc}{M+m} \mp c = \frac{2MC \pm 2mc \mp Mc \mp mc}{M+m}$$
$$= \frac{2MC \pm mc \mp Mc}{M+m} = \frac{\mp c(M-m) + 2MC}{M+m}.$$

Porro in determinandis his celeritatibus assumpta est hypothesis, quod corpora post conflictum moveantur directione ea, qua incurrens M, ante conflictum movebatur; quoties ergo celeritas positivum habuerit valorem, eandem directionem designabit, quam M ante conflictum habuit; secus, si is negativus fuerit, directionem motus oppositam illi, quam M ante ictum habuit, designabit.

177. Si itaque corpus perfecte elasticum M, celeritate C, directe incurrat in aliud perfecte elasticum m, lentius celeritate c, præcedens, ita, ut sit:

I. $M > m$, est in proportione
$2x = \frac{2MC + 2mc}{M + m} : C = 2MC + 2mc : MC + Cm$;
$MC > Cm$, adeoque etiam $2MC > (MC + Cm)$,
eo potius ergo $(2MC + 2mc) > (MC + Cm)$,
atque hinc etiam $2x > C$,
et quia $C > c$, etiam $2x > c$;
quare celeritates y, et z, positivos habebunt valores, et erit $z > y$. Hinc *impulsum corpus* hoc in casu *celerius*, *et incurrens lentius*, *retentis tamen directionibus, progredientur.*

II. Si $M = m$, est $2x = \frac{2C + 2c}{2} = C + c$

$$\text{adeoque } y = C + c - C = + c$$
$$\text{et } z = C + c - c = + C$$

h. e. *ambo corpora post conflictum directione incurrentis*, *celeritatibus tamen permutatis*, *progredientur.*

III. Si $M < m$,
facile, (simili nempe modo ut supra I.) adparet, esse $2x > c$,
quare celeritas impulsi z, semper positiva est, et hinc ejus directio post ictum eadem manet. Verum celeritas incurrentis y, tunc tantum positiva est, dum est $2x > C$;
quodsi esset $2x = C$, esset quoque $y = 0$,
et $z = C - c$,
h. e. *incurrens quiesceret post ictum*, *impulsum vero*, *retenta sua directione*, *moveretur celeritate* $= C - c$;
si vero esset $2x < C$,
esset y, negativum, adeoque *incurrens*, *directione mutata*, *resiliret celeritate*

$= C - 2x$, *minori itaque*, *quam ante ictum habuerit.*

178. Quodsi porro corpus perfecte elasticum M, directe incurrat in quiescens m, ita, ut sit: I. $M > m$,
celeritates quoque post ictum $y = \frac{(M - m) C}{M + m}$,
et $z = \frac{2MC}{M + m}$,
positivum valorem habent; *ambo* ergo *corpora incurrentis directione*, *impulsum tamen majori celeritate*, *quam incurrens*, *ferentur.*

II. Si $M = m$, est $y = \frac{(M - m) C}{M + m} = 0$,
et $z = \frac{2C}{2} = + C$

h. e. *incurrens post ictum quiescet*, *impulsum vero celeritate*, *atque directione incurrentis feretur.*

III. Si $M < m$,
est celeritas incurrentis $y = \frac{(M - m) C}{M + m}$,
negativa; quare *corpus incurrens mutata directione resiliet;*
at celeritas impulsi $z = \frac{2MC}{M + m}$
positiva est; impulsum itaque corpus directione incurrentis movebitur, verum celeritate eo minori, quo M, relate ad m, minus est, ita, ut, si incurrens relate ad quiescens exiguum sit, magna jam celeritas in incurrente requiratur, ut sensibilis in impulso motus producatur: quodsi ergo in quiescens corpus, cujus massa $= \infty$,

qualis immobilis corporis massa censetur, directe incurrat, erit:

$$y = \frac{C(M - \infty)}{M + \infty} = \frac{-\infty C}{\infty} = -C,$$

et $$z = \frac{2MC}{M + \infty} = \frac{2MC}{\infty}$$

h. e. *corpus incurrens eadem celeritate, qua incurrebat, at directione mutata resiliet; corporis vero impulsi prius quiescentis motus post conflictum nullo finito modo assignabilis est.*

179. Si denique duo corpora perfecte elastica sibi directe occurrant; eorum quantitates motus, vel sunt æquales, vel non.

Si $MC = mc$, est $x = o$,

adeoque $y = -C$,

et $z = +c$,

h. e. *ambo corpora post ictum, directionibus in oppositum mutatis, retentis tamen celeritatibus, resilient.*

Si vero, dum MC non est æquale mc, pro incurrente sumatur corpus majore motus quantitate præditum M, cujus celeritas C, et directio positiva ponitur, semper est $MC > mc$, atque ideo etiam x semper positivum; quare etiam corpus impulsum, seu minori motus quantitate præditum, cujus celeritas ante ictum $= -c$, ponebatur, acquirit per ictum celeritatem $z = 2x + c$ positivam; hinc *majori quoque celeritate, quam occurrebat, directione mutata resiliet.*

Quoad corpus vero incurrens M,

I. si $M > m$, poterit $2x$, esse majus, vel æquale, vel minus, quam C;

si $2x > C$, celeritas post ictum $y = 2x - C$ positiva est, *eadem ergo, qua incurrebat, directione* post ictum movebitur;

si $2x = C$, celeritas post ictum $y = o$, *incurrens igitur corpus post ictum quiescet, impulsum vero celeritate $C + c$ resiliet;*

si $2x < C$, celeritas post ictum $y = 2x - C$, negativa est, *corpus itaque incurrens resiliet mutata directione.*

II. Si $M = m$, est $2x = \frac{2C - 2c}{2} = C - c$

adeoque $y = C - c - C = -c$

et $z = C - c + c = +C$

h. e. *ambo corpora permutatis, tam directionibus, quam celeritatibus, resilient.*

III. Si $M < m$, facile adparet, celeritatem C magnam esse debere, cum ea in massam minorem ducta, majorem quantitatem motus producat. Celeritas hæc C est hoc in casu semper major, quam $2x$, aut etiam c, quare celeritas quoque post ictum $y = 2x - C$ negativa est, et minor quam C; *incurrens itaque corpus, directione mutata, lentius, quam incurrebat, resiliet.*

180. Cum perfecte elastici corporis incurrentis celeritas ante conflictum C, sit ad celeritatem impulso, prius quiescenti, per conflictum communicatam,

ut $C : \frac{2MC}{M+m}$ (176, & 178),

seu, ut $M + m : 2M$, patet iterum

celeritatem impulso communicatam non mutari, si $m = M$, crescere, si $m < M$, et decrescere, si $m > M$.

Quodsi ergo corpus perfecte elasticum directe incurrat in plura alia perfecte elastica, in eadem serie quiescentia, celeritas quoque ultimo communicata, hac eadem ratione $M + m : 2M$ inveniri potest; et si quidem massæ ponantur in progressione geometrica

$$M, \ Mq, \ Mq^2, \ Mq^3 \ \text{---} \ Mq^n,$$

crescere, aut decrescere; ea ratio est

$$M + Mq : 2M = 1 + q : 2;$$

quare, si incurrentis celeritas sit C, erit:

$$1 + q : 2 = C : x, = \frac{2C}{1+q}, \text{ seu celer. 1. impulsi,}$$

$$1 + q : 2 = \frac{2C}{1+q} : x, = \frac{2^2C}{(1+q)^2}, \text{ seu celer. 2. imp.,}$$

$$1 + q : 2 = \frac{2^2C}{(1+q)^2} : x, = \frac{2^3C}{(1+q)^3}, \text{ seu celer. 3. imp.,}$$

$$\text{et} \quad \frac{2^nC}{(1+q)^n} \text{ celer. ult. } Mq^n \text{ imp.}$$

Si vero massæ ponantur æquales, erit ea ratio $M + M : 2M = 2 : 2$, celeritas itaque, ultimo communicata, æqualis est celeritati incurrentis. Unde demum intelligitur: cur, dum corpus perfecte elasticum in plura alia, æqualis massæ, sese contingentia, in eadem linea centra corporum conjungente quiescentia, directe incurrit, solum id genus corporum ultimum, immotis reliquis omnibus, post impactum incurrentis progrediatur celeritate, ac directione incurrentis.

181. Mutationes celeritatum, quæ in conflictu perfecte elasticorum corporum oriuntur, dum C, et c, in y, et z (176), mutantur, sunt:

$$C - y = C - 2x + C = 2C - 2x = 2(C - x),$$
$$\text{et } z \mp c = 2x \mp c \mp c = 2x \mp 2c = 2(x \mp c);$$

adeoque duplo majores, quam in non elasticorum corporum conflictu (170). Generatim itaque mutationes celeritatum in corporibus tam perfecte elasticis, quam non elasticis, sunt:

$$n\,(C - x), \text{ et } n\,(x \mp c),$$

ubi pro non elasticis $n = 1$, pro perfecte elasticis $n = 2$; et hinc pro naturalibus corporibus, quæ nec perfecte elastica, nec non elastica sunt, n designat quantitatem inter 1, et 2. Quodsi ergo in corpore quopiam vis elastica esset dimidia ejus, quæ in perfecte elasticis concipitur, esset $n = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Vide hac de re Segner Einleitung in die Naturl. 1746. §. 560.

CAPUT II.

De conflictu obliquo.

182. Si corpora, seu elastica, seu non elastica A, et B, *Fig.* 49. celeritatibus, ac directionibus Aa, et Bb oblique ad a, et b, concurrant, atque celeritates Aa, et Bb, resolvantur in perpendiculares, et parallelas relate ad planum mn, per punctum contactus ductum, rectæque a b, centra corporum conjungente, perpendiculare, celeritates $Af = ea$, et $Bh = gb$, plano dicto

parallelæ, nullam per conflictum subibunt mutationem; quare corpora ad a, et b, delata, post ictum celeritatibus, ac directionibus a o = e a, et b l = g b, progrederentur; at vero celeritatibus A e = f a, et B g = h b, dicto plano perpendicularibus, oritur conflictus directus; quodsi ergo huic conflictui, correspondentes celeritates, et directiones, calculo secundum præcedens caput erutæ, competenter transferantur in a k, et b i, motus corporum post conflictum obliquum componetur per diagonales a c, et b d, quæ igitur celeritates quoque, et directiones post conflictum obliquum exhibent.

183. Si corpora A, et B, *Fig.* 50. essent perfecte elastica, et æqualis massæ, ac B insuper ante conflictum quiesceret; post conflictum corpus B progrederetur directione Bb; corpus vero A, directione a c. Hinc patet methodus globum elasticum quiescentem B, medio obliqui impactus alterius globi A, æque elastici, versus assumtum quodpiam punctum b promovendi.

Si enim per assumtum punctum b, et per quiescentis corporis B centrum ducatur recta bE, tum vero globus A versus globum B, impellatur, ita, ut eundem in puncto, per quod recta bE transit, feriat; progredietur globus B via B b, adeoque versus assumtum punctum b.

184. Quodsi porro corpus non elasticum A, *Fig.* 51. celeritate, ac directione AB, oblique, h. e. sub angulo incidentiæ ABC = x,

incurrat in planum immobile CE, æque non elasticum, atque celeritas AB resolvatur in AC = DB perpendicularem, et AD = CB parallelam plano; celeritas AC = DB, utpote plano immobili directe opposita, per reactionem plani eliditur (168), remanet itaque sola celeritas AD = CB, plano parallela, qua per consequens corpus A, post impactum ex B, juxta plani directionem progreditur, ita, ut sit BE = CB.

Quia vero in $\triangle$ ABC est CB : AB = *cos.* x : r, est eadem illa celeritas post conflictum, ad celeritatem ante impactum, ut cosinus ang. incidentiæ ad radium, adeoque = AB . *cos.* x.

185. Si vero corpus A, esset perfecte elasticum, celeritas AC = DB, plano perpendicularis, tota destrueretur quidem, at per vim expansivæ elasticitatis alia BD, priori æqualis, produceretur, qua, directione jam opposita, per BD resiliret (178 III.); unde corpus elasticum post obliquum impactum, duplici vi, ac celeritate BD, et BE actum, motu composito per diagonalem BF reflectitur, ita, ut, cum $\triangle$ACB $\backsimeq$ $\triangle$BEF, sit angulus reflexionis o = x angulo incidentiæ, et celeritas post impactum BF = AB celeritati ante impactum.

186. Hinc jam facile deducitur methodus determinandi in plano quopiam CE, punctum B, in quod globus perfecte elasticus A, e dato quolibet puncto projici debet, ut inde ad assignatum punctum F reflectatur. Demittatur nempe ex assignato puncto F ad planum perpendicularis FE,

ita, ut EG = FE, tum conjungatur G cum A, recta AG; hæc secabit planum in quæsito puncto B. Cum enim sit △FBE ≌ △EBG, est angulus reflexionis o = x angulo incidentiæ.

Sectio IV.

De motu refracto.

187. Incidat mobile A, *Fig. 52.* ad novi alicujus medii superficiem BC oblique in puncto incidentiæ D, vi, et directione lineæ incidentiæ AD. Mobile novum medium penetrans, vel eadem directione ADL, qua inciderat, movetur; vel non eadem, sed a priori directione AD detorquetur. Hæc mobilis a priori directione in novo medio, quod permeat, deflexio, dicitur *refractio*, quam fieri observamus, dum v. g. radius lucis ex aëre ad superficiem vitri, aut lapis ex aëre ad superficiem aquæ &c. oblique incidit, novumque medium permeat. Mobile, cujus motus refringitur, in novo medio, vel supra, vel infra priorem continuatam directionem progreditur. Prior deviatio, cum in ea, linea refractionis v. g. Dr, a perpendiculo DH, ad superficiem novi medii per punctum incidentiæ ducto, divergat, *refractio a perpendiculo*; posterior vero, cum in ea, linea refractionis v. g. Du, ad idem perpendiculum DH accedat, *refractio ad perpendiculum* vocatur. Perpendiculum hoc EDH etiam

axem refractionis: et angulum, quem producta linea incidentiæ cum linea refractionis comprehendit, *angulum refractionis;* quem vero axis refractionis cum línea refractionis facit, *refractum* dicimus.

188. Quodsi motus AD, ad superficiem novi medii BC obliquus, resolvatur in perpendicularem AB = ED, et parallelum AE = BD, ac in puncto incidentiæ D, ratio inter vim perpendicularem, et parallelam maneat eadem, nulla fit refractio. Ratio enim hæc eadem manet, si vires illæ per medium, vel non mutentur, vel novum medium, vel non mutentur, vel mutentur quidem, at servata proportione in crescendo, aut decrescendo. Si vires dictæ penitus non mutentur, mobile, sola vi perpendiculari ED actum, perveniret ad F, ita, ut sit DF = ED = AB; et sola parallela BD actum, ad G, ita, ut sit DG = BD = AE; utraque igitur non mutata actum ibit per diagonalem Dm. Quia vero BC est recta, et angulus ADB = GDm, ob ABD ≌ △DGm, etiam ADm, recta sit, est necesse (Geom. 13.). Si vero vires dictæ mutentur, sed proportionaliter crescendo (v. g. parallela BD, in duplum, vel triplum &c, et perpendicularis ED æque in duplum, vel triplum &c.) aut proportionaliter decrescendo (v. g. BD in dimidium, vel tertiam partem &c., et ED æque in dimidium, vel tertiam partem &c.); est iterum BC recta, et angulus ADB = CDL, ob △ABD ∽ △DIn ∽ △DCL, adeoque etiam ADnL recta; unde nulla his in casibus fit refractio.

189. Quodsi vero ratio dicta mutetur, contingit refractio, et quidem a perpendiculo, si vis perpendicularis ED per novum medium respective minor, quam parallela BD evadat. Vis enim perpendicularis respective minor, quam parallela, evadit, 1-mo si, manente parallela, perpendicularis per novum medium minuatur; 2-do si, manente perpendiculari, parallela augeatur; 3-io si perpendicularis magis, quam parallela minuatur; 4-to si perpendicularis minus, quam parallela augeatur. Jam vero, si neutra vis mutaretur, mobile in novo medio moveretur per diagonalem Dm (præc.), quodsi ergo in 1-mo casu manente parallela Fm = DG = BD, perpendicularis Gm = DF = ED minuatur, extremum diagonalis punctum semper in linea Gm, supra m, alicubi, v. g. in o, et hinc ipsa quoque diagonalis Do supra Dm cadet. Quodsi vero in 2-do casu manente perpendiculari Gm = DF = ED, parallela Fm = DG = BD, augeatur, extremum diagonalis punctum semper in linea Fm, ultra m, alicubi, v. g. in p, et hinc ipsa quoque diagonalis Dp, supra Dm, cadet. Porro, si in 3-io casu utraque vis proportionaliter decresceret, v. g. ad dimidium, ita, ut sit DI = $\frac{1}{2}$ BD, et DK = $\frac{1}{2}$ ED, mobile in novo medio moveretur per diagonalem Dn (præc); si ergo perpendicularis DK = In, magis adhuc decrescat, extremum diagonalis punctum supra n, alicubi, v. g. in q, erit, hinc ipsa quoque diagonalis Dq, supra Dn, cadet. Si

denique in 4-to casu, utraque vis proportionaliter cresceret, v. g. in duplum, ita, ut DC = 2BD, et DH = 2ED, mobile in novo medio diagonali DL moveretur; si ergo CL = DH, minus augeatur, extremum diagonalis punctum supra L alicubi, v. g. in r, erit; hinc ipsa quoque diagonalis Dr supra DL cadit: quare omni in casu refractio a perpendiculo sit, est necesse.

190. Refractio ad perpendiculum contingit, dum ratio dicta mutatur, ita, ut perpendicularis ED, per novum medium respective major, quam parallela BD, evadat. Vis enim perpendicularis respective major, quam parallela, evadit, 1-mo si manente parallela, perpendicularis per novum medium augeatur, 2-do si manente perpendiculari parallela minuatur; 3-io si perpendicularis magis, quam parallela augeatur; 4-to si perpendicularis minus, quam parallela minuatur. Jam vero si neutra vis mutaretur, mobile in novo medio moveretur per diagonalem Dm, si ergo in 1-mo casu, manente parallela Fm = DG = BD, perpendicularis Gm = DF = ED, augeatur, extremum diagonalis punctum in linea Gm, infra m, alicubi v. g. in s, et hinc ipsa quoque diagonalis Ds, infra Dm, cadit. Si vero in 2-do casu, manente perpendiculari Gm = DF = ED, parallela Fm = DG = BD, minuatur, extremum diagonalis punctum in linea Fm, ante m, alicubi, v. g. in t, erit, unde ipsa quoque diagonalis Dt, infra Dm cadit. Quodsi vero in 3-io ca-

su utraque vis proportionaliter cresceret, v. g. in duplum, ita, ut sit DC = 2BD, et DH = 2ED, mobile in novo medio diagonali DL moveretur; si ergo CL = DH, magis augeatur, extremum diagonalis punctum infra L alicubi, in linea CL, v. g. in u, erit, unde ipsa quoque diagonalis Du, infra DL, cadit. Denique si in 4-to casu utraque vis proportionaliter decresceret, v. g. ad dimidium, mobile in novo medio moveretur per diagonalem Dn, si itaque parallela Kn = Dl, magis minuatur, extremum diagonalis punctum ante n, alicubi in linea Kn, v. g. in v, erit; unde ipsa quoque diagonalis Dv, infra Dn, cadit: quare omni in casu refractio fit ad perpendiculum.

Ap-

Appendix

Ex Catoptrica.

CAPUT I.

Notiones prævia.

191. Catoptrica est scientia visionis per radios ope speculorum reflexos.

192. Dum objecta ope speculorum consideramus, eadem prorsus, experientia teste, in nobis excitatur sensatio, quæ alias oritur, dum objecta immediate intuemur; unde, quemadmodum in posteriori casu radii lucidi ab objecto immediate in oculos veniunt, ita in priori quoque casu radii lucidi eodem prorsus ordine ab objecto in speculum incurrere, et a speculo in oculos reflecti debent; ac eo ipso unicum speculi punctum nonnisi unicum lucidum radium reflectere potest. Et si quidem radius lucidus in speculum perpendiculariter incidat, is perpendiculariter quoque, experientia teste reflectitur; si vero oblique incidat, oblique quoque, verum non eadem jam via, qua inciderat, reflectitur. Sint enim in speculo quopiam super rectam CE *Fig.* 51. in eodem plano, ad speculum perpendiculari, FE perpendicularis, AB vero, et BF obliquæ, ita, ut ang. o = x; oculus primum

in F constitutus seipsum videt alicubi in prolongata perpendiculari FEG, et non videt, si speculi punctum E tegatur. Radius itaque lucidus ab oculo in speculum perpendiculariter incidens, eadem perpendiculari via reflectitur. Dein oculus in A constitutus, objectum in F positum videt alicubi in prolongata linea ABG, et non videt, si speculi punctum B, tegatur. Radius itaque lucidus ab objecto F in speculum via obliqua FB incurrens, via itidem obliqua BA a speculo reflectitur, ita, ut angulus incidentiæ $o = x$, seu angulo reflexionis, aut si ex puncto incidentiæ B perpendicularis BD, *cathetus incidentiæ* dicta, erigatur, sit angulus $m = n$.

193. Ut corpus quodpiam speculi instar imaginem objecti oculis exhibere possit, id probe politum, et opacum esse debet; secus enim, si politum non esset, sed asperum, h. e. e multis planulis diversi situs, et positionis compositum, lucidi radii non eo, quo ab objecto incurrebant, ordine in oculos reflecterentur, ac per consequens, neque eandem in nobis, ac alias, sensationem producere, ergo neque imaginem exhibere possent. Si vero diaphanum foret, per eadem puncta incidentiæ alii quoque objectorum post diaphanum corpus positorum radii reflecterentur, atque ideo imago minus distincte adpareret, aut plane radii lucidi per id transirent, et non amplius reflecterentur. Quodsi tamen aversa diaphanorum corporum superficies opaco quopiam

corpore tegatur, imaginem corporum, iisdem objectorum, exhibent, quemadmodum id in vitrea tabula experiri licet.

194. Corpora fluida, v. g. aqua, mercurius &c. *naturalia* sunt specula, dummodo in opaco quopiam fundo, si pellucida sunt, quiescant. At corpora opaca, ita polita, ut nullæ in eorum superficie sint, aut saltem adpareant inæqualitates, specula sunt *artificialia*, quorum præcipua sunt *metallica*, et *vitrea*. In vitreis tamen aversa superficies, amalgamate ex stanno, et mercurio confecto tecta, proprie speculum exhibet. Specula porro a superficie, quam referunt, vel *plana* sunt, vel *curva*; hæcque *sphærica*, *cylindrica*, *conica*, *parabolica*, *hyperbolica*, *elliptoica* &c. esse possunt, atque jam *convexa*, si superficies speculum referens protuberans sit, jam *concava*, si ea cava sit, adpellantur.

CAPUT II.

De speculis planis.

195. Punctum radians A, *Fig.* 53. ante speculum planum MN situm, quaquaversum radios emittit lucidos; cum vero horum unus AM, utpote perpendicularis ad MN, eadem via MA, et alter quiscunque AC, obliquus ad MN, via CB reflectatur, ita, ut $o = x$ (192.), idem punctum A, et in prolongata linea AMa, et in BCa, adeoque in earumdem intersectionis puncto a, esse adparet; et quia in rectangulis $\triangle$-lis AMC,

et MCa, præter latus MC commune, etiam $x = o = y$, est quoque $\triangle AMC = \triangle MCa$, adeoque $Ma = AM$, h. e. *punctum, speculo plano objectum, post speculum adparet tanto intervallo, quanto id revera ante speculum est.*

196. Quod de uno puncto dictum, de pluribus quoque, atque ideo etiam de eorum collectione, intelligi debet. Cum itaque corporis superficies ex innumeris illuminatis punctis constare concipi possit, corpus quoque ipsum post speculum adparere, h. e. ei æqualis, ac similis imago *in tanta* post speculum distantia, in quanta ipsum ante speculum est, videri debet. Sic si ante speculum MN, *Fig.* 54. eidem parallelum objectum AB locetur, supremum ejus punctum A, adparet post speculum in a, ita, ut $Da = AD$; et infimum objecti punctum B, in b, ita, ut $Cb = BC$; intermedia vero puncta correspondenter inter a, et b, unde $ab = AB$, h. e. *imago est æqualis objecto.*

197. Cum porro oculus in O, *Fig.* 54. constitutus supremum objecti punctum in a, radio amO, et infimum in b, radio bnO, videat, sequitur: ad objectum AB videndum, speculi partem mn, sufficere; cum vero sit $ab : mn = aO : mO = aA : DA = 2 : 1$ sequitur: *ad objecti cujuspiam imaginem totam in plano speculo videndam, sufficere; si speculum dimidiam objecti magnitudinem exæquet.*

CAPUT III.

De speculis curvis.

198. Cum unicum speculi punctum nonnisi unicum radium reflectere possit (192); speculum vero curvum cum speculo plano unicum punctum commune habeat, sequitur: radium lucidum, in speculum curvum incidentem, ita prorsus reflecti, ut in plano, quod curvum in puncto incidentiæ tangit. Si itaque ACB, *Fig.* 55. sit sectio speculi curvi, MN sectio plani, curvum in C tangentis, DCE perpendicularis ad planum, adeoque etiam ad curvum speculum, quæ *axis* speculi vocatur, atque FC radius in convexum speculum ACB incidens, et CG reflexus, est $MCF = NCG$, et hinc etiam $o = x$; item, si fC sit radius in concavum speculum ACB incidens, et Cg reflexus, est $MCf = NCg$, adeoque etiam $y = z$.

199. Si speculum curvum est sphæricum, ejus sectio ACB, est segmentum circuli maximi, et perpendicularis CE, seu axis, est diameter per punctum incidentiæ ducta. Atque hinc in speculo sphærico radii incidentes, et reflexi FC, et CG, aut fC, et Cg, æquales faciunt angulos cum diametro per punctum incidentiæ ducta; quare in his speculis radius reflexus ex incidente determinari potest, quin tangentem ducere, sit necesse.

200. Radius lucidus AB, vel CM, *Fig.* 56. per centrum C speculi sphærici concavi MBN incidens, quia semper ad tangentem

perpendicularis est, in se ipsum reflectitur; at vero radius DM, axi AB parallelus, quia ad tangentem obliquus est, reflectitur via MF, ita, ut $o = x$ (præc.), axem itaque alicubi in puncto F secat. Puncti hujus a centro speculi distantia est FC, cujus valor trigonometrice determinari potest, si speculi semidiameter CM, et punctum incidentiæ M, seu arcus BM, angulum C mensurans, detur.

Cum enim $o = x$, ob reflexionem,
et $x = C$, ob DM parallelum ad AB, est in $\triangle$ MCF, $o = C$, atqui vero in quocunque $\triangle$ MCF datis angulis $o = C$ cum latere intercepto MC, latus FC reperiri potest.

201. Si igitur ponatur $MC = r$, arcus BM, seu angulus $C = a$, sinus totus $= 1$, atque si ex F ad MC perpendiculum FG demittatur, est $CG = GM = \frac{r}{2}$ (Geom. 80), et in rectangulo $\triangle$ FGC, $CF : CG = 1 : cos.\ a$.

adeoque I. $CF = \frac{CG}{cos.\ a} = \frac{r}{2\ cos.\ a}$,

vel, si in $\triangle$ FGC, CG pro radio sumatur, est: $CG : FC = 1 : sec.\ a$,

unde II. $FC = CG \cdot sec.\ a = \frac{r}{2} \cdot sec.\ a$.

202. Cum porro valor de $FC = \frac{r}{2\ cos.\ a}$ eo minor sit, quo *cos.* a major est; et hic eo major sit, quo *sin.* a, ac per consequens etiam ipse angulus a, minor est; hic vero eo minor sit, quo radii paralleli propius axi incidunt, sequitur: punctum F, eo

magis ad centrum speculi accedere, et per consequens a speculo recedere, quo radii paralleli viciniores axi in speculum incidunt: quodsi ergo radii axi infinite vicini incidant, angulus a, adeoque etiam ejus *sinus* fit minimus, et evanescit; at vero *cos.* a, fit maximus $= r = 1$; et hinc $FC = \frac{r}{2}$, h. e. *parallelorum, ac axi infinite vicinorum radiorum punctum intersectionis F, est in medio semidiametri speculi puncto;* et quia radii jam vicinius axi incidere nequeunt, neque parallele incidentium radiorum punctum F, ultra dimidium speculi radium recedere potest.

203. Contra quo magis remote ab axe incidunt paralleli radii, eo major est angulus a, ac per consequens eo minor ejus *cosinus;* quo vero hic minor est, eo major est valor de $FC = \frac{r}{2\ cos.\ a}$; unde, quo magis remote ab axe incidunt radii, eo punctum F magis ad speculum accedit; et si quidem radii ad 60° ab axe distent, cum tunc ang. $a = 60°$, et $cos.\ a = sin.\ 30° = \frac{1}{2}$, adeoque $FC = \frac{r}{2 \cdot \frac{1}{2}} = r$, punctum intersectionis F, jam ad ipsum speculum in fine axeos habent. Si vero radii ultra 60° ab axe incidant, eundem jam post speculum secare, ac eo ipso radii reflexi rursum in speculum inter M, et B, incidere debent. Denique, si radius 90° ab axe incidat parallelus, tangens evadit; quare nec amplius reflectitur.

204. Quodsi speculi concavi MN, *Fig.* 57. axis AB versus quodpiam solis punctum, *v. g.* centrum dirigatur, radii solares ob enormem solis a terra distantiam pro parallelis haberi possunt; et hinc, si $ME = EN$, est dimidia speculi latitudo, et FG perpendiculum e semidiametri CB, medio puncto F, erectum, omnes radii solares, qui per ME perpendiculariter transeunt, a speculo reflexi axem inter F, et O, secant, atque per FG transeunt. Si porro totam figuram circa axem AB concipiamus revolvi, describetur speculum sphæricum, quod omnes radios solares, qui per circulum, semidiametro ME descriptum, transeunt, atque in speculum incidunt, post reflexionem coarctat in circulum, semidiametro FG descriptum; cum vero area circuli, in quem radii solares incidunt, sit ad aream circuli, in quem iidem radii reflectuntur, ut $ME^2 : FG^2$ (Geom. 190), sequitur: radios reflexos in superficie ad F esse toties densiores incidentibus, quoties quadratum prius majus est posteriori. Denique quia radii in circulum ME paralleli incidunt, hic æquabiliter densi sunt, at quia in circulum FG non parallele, sed convergenter reflectuntur, hic inæquabiliter, ac versus centrum F quidem semper magis condensantur.

205. Hæc radiorum solarium ad F condensatio efficit, ut ibidem sensibilis calor excitetur, imo inflammabilia corpora etiam accendantur. Atque hinc speculo concavo nomen *caustici*, et illi axeos puncto, in

quod radii coguntur, nomen *foci* impositum est. Hujus a speculo distantia, *focalis distantia* vocatur, estque ex dictis semper dimidiæ semidiametro, seu, quartæ parti diametri speculi æqualis.

206. Ex ad huc dictis facile jam intelligitur, cur duorum speculorum ejusdem radii minus, licet in id pauciores radii, quam in majus incidant, eundem tamen possit gradum caloris excitare, quem majus; item, cur duorum speculorum ejusdem latitudinis id potentius in foco urat, cujus semidiameter major est, seu, quod majoris sphæræ segmentum est. Hinc vero patet: quale nam speculum sphæricum pro caustico sit optimum.

207. In speculis concavis parabolicis, *v. g.* MCN *Fig.* 58. quivis radius lucidus DE, axi AB, parallelus, ad parabolæ focum F reflectitur; ducta enim pro quovis puncto E tangente BG, semper est $x = y = o$ (Geom. 287). In his itaque speculis omnes radii axi paralleli in unico puncto F, foco nempe parabolæ, colliguntur, et uniuntur; unde parabolica specula sunt perfectiora caustica, quam sphærica. Focum parabolæ, ergo et speculi parabolici a vertice parabolæ, qui in speculis *polus* dicitur, quarta parte parametri distare, in geometria ostensum est.

208. Quemadmodum radii axi paralleli in foco uniuntur; ita e contrario radii e foco in speculum causticum incidentes axi parallele reflectuntur. Quodsi ergo duo specula caustica sibi opponantur, ita, ut eo-

rum axes in una, eademque recta sint, atque in unius foco lucidum objectum, *v. g.* candens carbo locetur, radii e carbone in speculum incidentes reflectuntur axi parallele, sicque in aliud speculum incidunt, atque reflexi in foco altero uniuntur. Hinc igitur manifestum fit, quomodo carbo in unius speculi caustici foco exsistens, in alterius e diametro oppositi, atque 16 usque 20 pedes dissiti speculi caustici foco corpus inflammabile, *v. g.* chartam accendat.

209. Si radii lucidi e foco in speculum causticum incidentes post reflexionem axi parallele progrediuntur, radii ex alio quovis axeos puncto in speculum incidentes post reflexionem parallele progredi nequeunt; verum ii, qui e quovis axeos puncto, *v. g.* O, *Fig.* 59. ante focum, h. e. intra focum F, et speculum MN sito, in speculum incidunt, post reflexionem divergunt, ita, ut o = x, et sufficienter producti axem AB post speculum alicubi in puncto I secant; qui vero e quovis axeos puncto, *v. g.* O, *Fig.* 60, & 61. post focum F sito, in speculum incidunt, post reflexionem convergunt, ita, ut o = x, axemque ante speculum alicubi in puncto I secant. Et si quidem radians punctum O, sit ante centrum speculi, intersectionis punctum I est post centrum, uti in *Fig.* 60; si vero punctum O, est post centrum C; intersectionis punctum I, est ante centrum, h. e. inter centrum, et focum, uti in *Fig.* 61. Eodem modo in speculo convexo MN, *Fig.* 62. radii, e quocunque axeos AB puncto O in speculum incidentes, post reflexionem divergunt, ita, ut o = x, et sufficienter producti axem post speculum alicubi in puncto I secant. Hoc unionis punctum I, *locus imaginis* compellatur, in eo enim omnes radii, a puncto radiante O sub eodem cum axe angulo in speculum incidentes, conveniunt, imaginemque puncti depingunt.

210. Distantia itaque imaginis a speculo est IB, cujus valor trigonometrice determinari potest, si arcus BM, puncti radiantis a speculo distantia OB, et semidiameter speculi CB = CM, dentur. In △OMC enim datis OC (*Fig.* 59 et 60. = CB — OB; *Fig.* 61 = OB — CB; *Fig.* 62. = OB + BC), CM, et angulo MCO (*Fig.* 59, 60, & 62, BM est ejus mensura, et *Fig.* 61 = supplemento anguli MCB, cujus mensura BM est), anguli COM, et CMO cum latere OM reperiri possunt. Dein in △IMO, habetur OM, et anguli IOM (*Fig.* 59 = supplemento ang. COM, *Fig.* 60, 61, 62 = COM), ac IMO *Fig.* 59, et 62. anguli o dupli supplementum, *Fig.* 60, et 61, anguli o duplus); quare calculo reperitur OI, et hinc

IB = OI — OB *Fig.* 59, & 62.
= OI + OB *Fig.* 60.
= OB — OI *Fig.* 61.

211. Quodsi radius incidens OM, axi AB infinite propinquus ponatur, poterit OM, pro OB, et IM, pro IB, absque errore sensibili, sumi; atque sic valor de IB etiam analytice exprimi. Si enim OB, seu

OM, i. e. distantia puncti radiantis a speculo, sit $= d$, semidiameter speculi CM, aut CB $= r$, et imaginis a speculo distantia IB, seu IM $= x$, erit

IC $= x + r$ *Fig.* 59. & CO $= r - d$ *Fig.* 59, 60.
$= x - r$ *Fig.* 60. $= d - r$ *Fig.* 61.
$= r - x$ *Fig.* 61 & 62. $= d + r$ *Fig.* 62.

Cum vero in $\triangle$ CMI, *Fig.* 59. sit:
CI : IM $=$ *sin.* CMI ($=$ *sin.* o $=$ *sin.* x) : *sin.* C;
item in $\triangle$ CMO, *sin.* x : *sin.* C $=$ CO : MO,
est: CI : IM $=$ CO : MO,
seu, $x + r : x = r - d : d$,
et hinc I. $x = \frac{dr}{r - 2d}$,

seu formula generalis pro determinanda imaginis a speculo concavo distantia, quæ post speculum cadit, dum punctum radians ante focum, h. e. focum inter, et speculum situm est.

Cum dein angulus IMO, *Fig.* 60, & 61. semidiametro CM sit bifariam sectus, est:
CO : CI $=$ MO : MI,
seu $\pm r \mp d : \pm x \mp r = d : x$,
et hinc II. $x = \frac{\mp dr}{\mp 2d \pm r} = \frac{dr}{2d - r}$,

seu formula generalis pro determinanda imaginis a speculo concavo distantia, quæ semper ante speculum cadit, dum punctum radians post focum ponitur.

Cum in his duabus formulis eædem prorsus literæ recurrant, distantia imaginis a speculo concavo generatim hac formula $x = \frac{dr}{2d - r}$, pro utroque casu exhiberi potest, in I. tamen casu, in quo punctum

radians O ante focum ponitur, adeoque, ubi $d < \frac{1}{2} r$, seu $2d < r$ est, valor ejus erit negativus; in II. vero casu, in quo punctum O post focum ponitur, adeoque, in quo $d > \frac{1}{2} r$, seu $2d > r$ est, valor ejus erit positivus.

Cum denique in $\triangle$ OMC, *Fig.* 62. sit:
CO : MO $=$ *sin.* OMC (vel *sin.* x $=$ *sin.* o) : *sin.* C,
item in $\triangle$ IMC, *sin.* o : *sin.* C $=$ CI : IM,
est CO : MO $=$ CI : IM,
seu $d + r : d = r - x : x$,
et hinc III. $x = \frac{dr}{2d + r}$,

seu formula generalis pro determinanda imaginis a speculo convexo distantia, quæ semper post speculum, h. e. ex parte centri convexitatis ante focum cernitur, et nonnisi dum radius incidens OM, *Fig.* 62, *aut* 56, axi AB est parallelus in focum F (quem in speculis convexis *imaginarium* tantum, aut *negativum* adpellamus) cadere potest.

212. Hinc generatim formula utrique speculorum generi communis est:

$$x = \frac{dr}{2d \mp r}$$

alioquin de iis tantum radiis intelligendum, qui infinite propinque axi incidunt; reliqui enim radii reflexi eo propius ad speculum cum axe concurrunt, quo remotius ab axe incidunt; cum IM eo majus sit, quam IB, quo radius incidens ab axe longius discedit.

213. Sit AB, *Fig.* 63. objectum ante focum speculi concavi situm. Quodlibet ejus punctum, conformiter præcedentibus, depingitur in axe per idem punctum transeunte:

et supremum quidem punctum A, in axe CAa superius ad a, infimum B, in axe CBb inferius ad b, intermedia vero objecti puncta correspondenter inter a, et b, ubi per consequens imago objecti tota esse adparet. Si ergo objectum quodpiam sit ante focum speculi concavi, ejus imago depingitur

I. Post speculum situ eodem cum situ objecti; et quidem, quia valor formulæ $x = \frac{dr}{r-2d}$ (211. I.), eo major est, quo magis 2d, ad r, aut d, ad $\frac{1}{2}$ r, accedit; et contra, eo minor, quo magis 2d, ab r, aut d, a $\frac{1}{2}$ r, deficit; imago eo in majori post speculum distantia depingitur, quo objectum magis a speculo versus focum recedit, et ex opposito:

II. Imago hæc, quia tota lineis Ca, et Cb, in centro concurrentibus, comprehenditur, semper major est suo objecto; crescitque objecto a superficie speculi versus focum recedente.

214. Sit AB, *Fig.* 64. objectum inter focum, et centrum speculi concavi. Supremum ejus punctum A, ex dictis depingitur in axe ACa inferius ad a, et infimum B, in axe BCb superius ad b; unde tota objecti imago inter a, et b. Si ergo objectum quodpiam sit inter focum, et centrum speculi concavi, imago ejus depingitur:

I. In aëre post centrum inverso respectu objecti sui situ; et quidem cum valor formulæ $x = \frac{dr}{2d-r}$ (211. II.), eo major sit, quo magis 2d, ad r, aut d, ad $\frac{1}{2}$ r, accedit, et contra, eo minor, quo 2d, magis r, aut d,

magis $\frac{1}{2}$ r, superat, imago eo in majori ante centrum distantia depingitur, quo objectum a centro versus focum magis recedit; et eo in minori, quo objectum centro vicinius est.

II. Imago hæc, cum ea semper magis, quam objectum a centro distet, atque lineis in centro concurrentibus comprehendatur, semper major est objecto suo, crescitque objecto a centro versus focum recedente. Et ex opposito, si objectum quodpiam, *v. g.* ab, *Fig.* 64. sit post centrum, imago ejus depingitur in aëre situ inverso inter focum, et centrum, estque semper minor suo objecto, atque decrescit, objecto ad centrum accedente.

215. Sit a b, *Fig.* 63. objectum ante speculum convexum MN. Supremum ejus punctum a, conformiter præcedentibus, depingitur in axe aAC superius ad A, et infimum b, in axe bBC inferius ad B; unde tota ejus imago inter A, et B. Quare si objectum quodpiam speculo convexo objiciatur, imago ejus depingitur

I. Post speculum situ eodem cum situ objecti.

II. Si objecti a speculo convexo distantia sit $= \frac{1}{\infty}$, imaginis post speculum distantia $x = \frac{dr}{2d+r}$ (211. III.), est $= \frac{1}{\infty}$;

si vero ea sit $= \frac{r}{2}$, est $x = \frac{r}{4}$;

et si sit $= r$, est $x = \frac{r}{3}$;

si denique sit $= \infty$, est $x = \frac{r}{2}$,

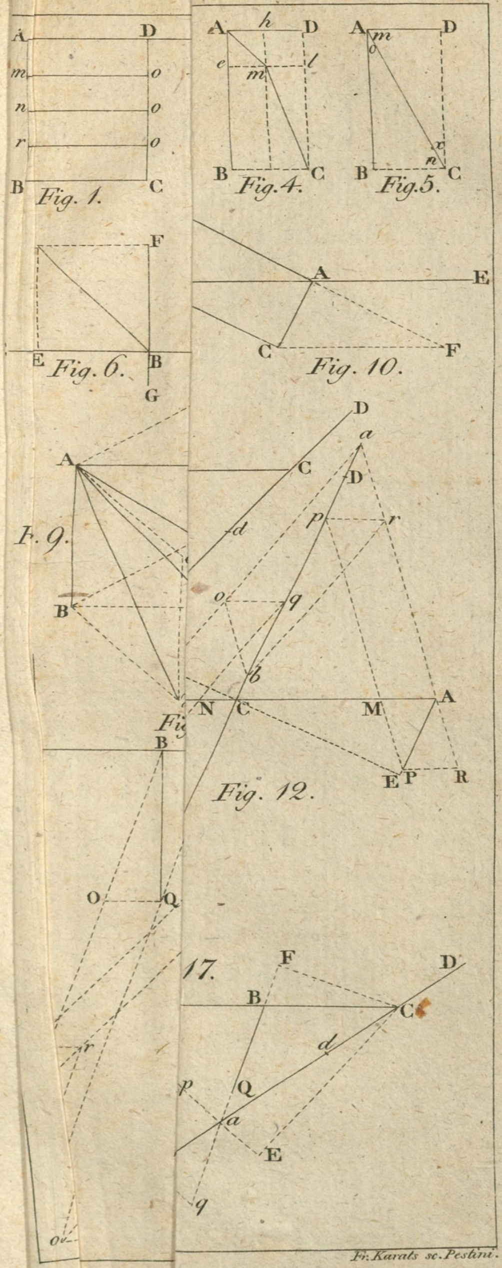
adeoque imago est in foco imaginario.

III. Imago hæc, cum æque lineis, in centro concurrentibus, comprehendatur, semper est minor suo objecto, decrescitque objecto a speculo recedente.

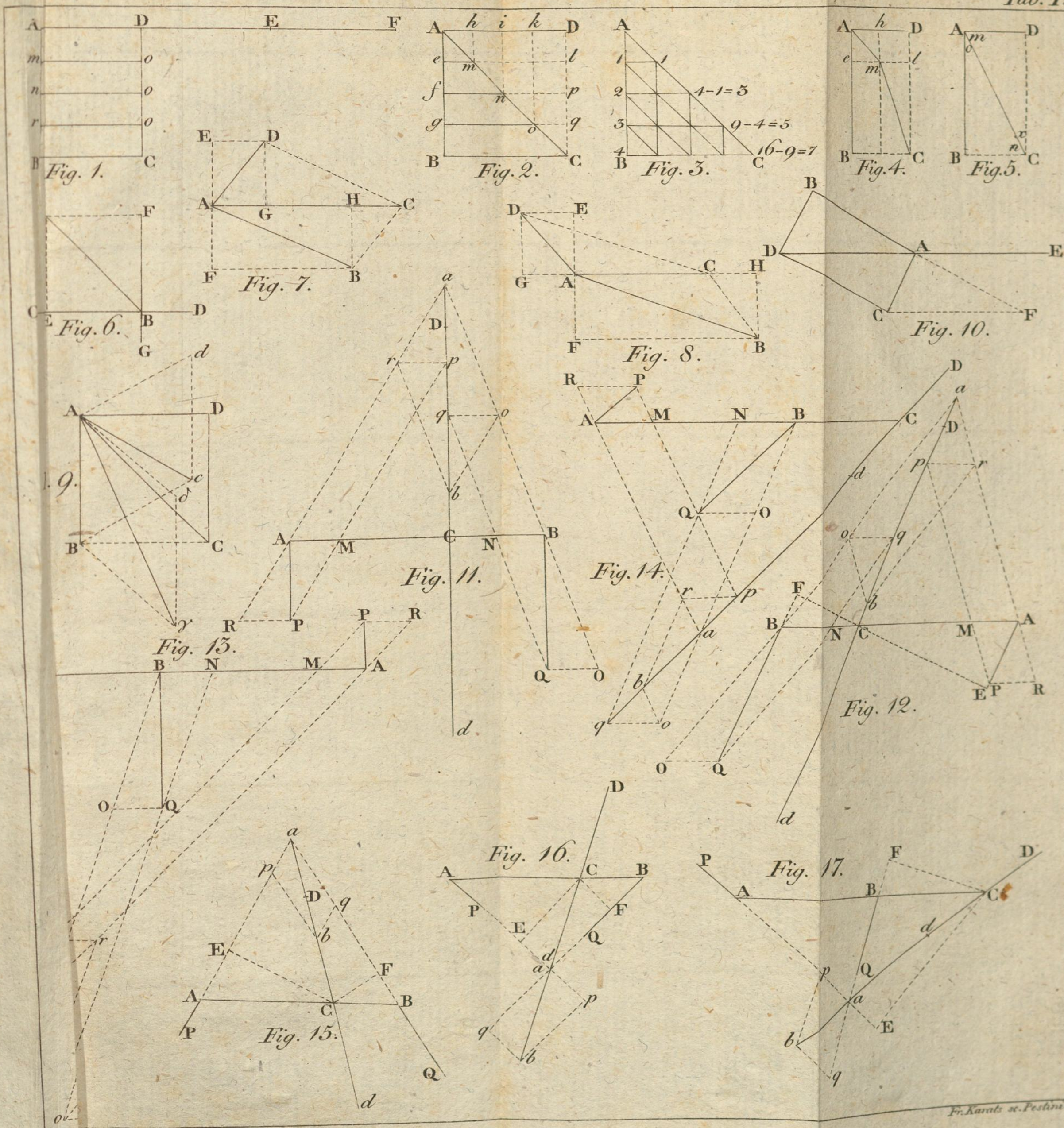
216. Cum punctorum, a speculo æqualiter distantium, imagines æquales quoque acquirant distantias, et inæqualiter distantium, inæquales, sequitur: objectorum, speculo sphærico concentricorum, imaginem quoque concentricam esse, et non concentricorum, eo magis difformem reddi debere, quo superficies objectorum major, aut radius speculi minor fuerit. Imo ejusmodi imagines, eo etiam magis a figura objecti dissident, quo id ad focum propius fuerit; cum tunc imagines admodum magnæ efformentur, et exigua diversarum objecti partium differentia in distantia a speculo ingens discrimen distantiarum, et magnitudinum in imaginibus earum partium efficiat.

217. Cum denique in speculis sphæricis ii tantum radii post reflexionem uniantur, qui sub eodem cum axe angulo incidunt, sequitur: innumera esse debere in axe unionis puncta, ac per consequens innumeras quoque objecti imagines. Princeps harum est ea, quam radii axi vicine incidentes efformant, reliquæ debiliores sunt, atque claritati principi imagini multum officiunt.

Tab. I.



Tab. I.



Fr. Karats sc. Pestini.

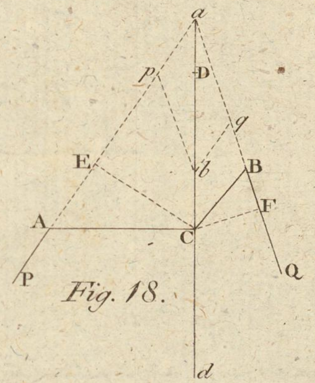


Fig. 18.

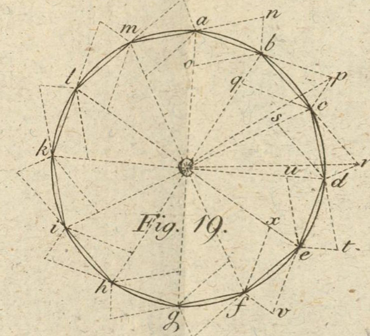


Fig. 19.

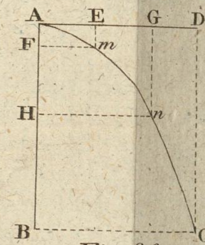


Fig. 20.

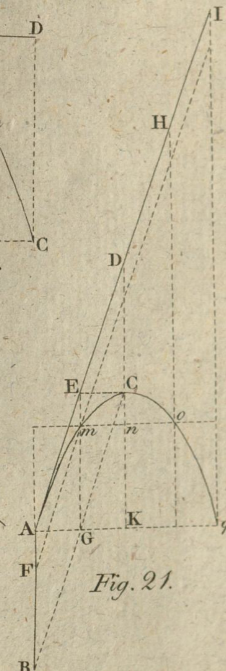


Fig. 21.

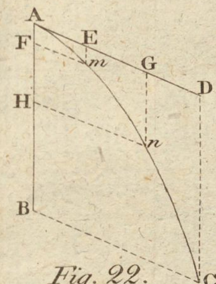


Fig. 22.

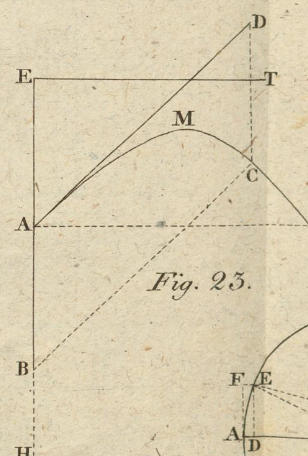


Fig. 23.

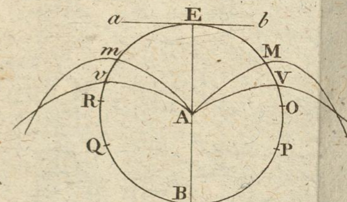


Fig. 24.

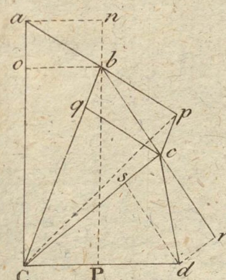


Fig. 25.

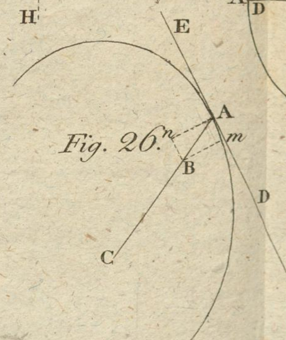


Fig. 26.

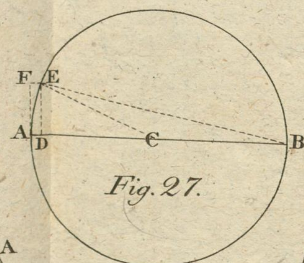


Fig. 27.

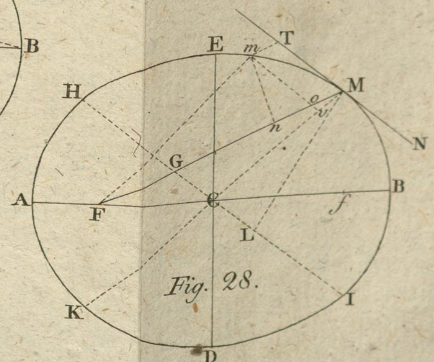


Fig. 28.

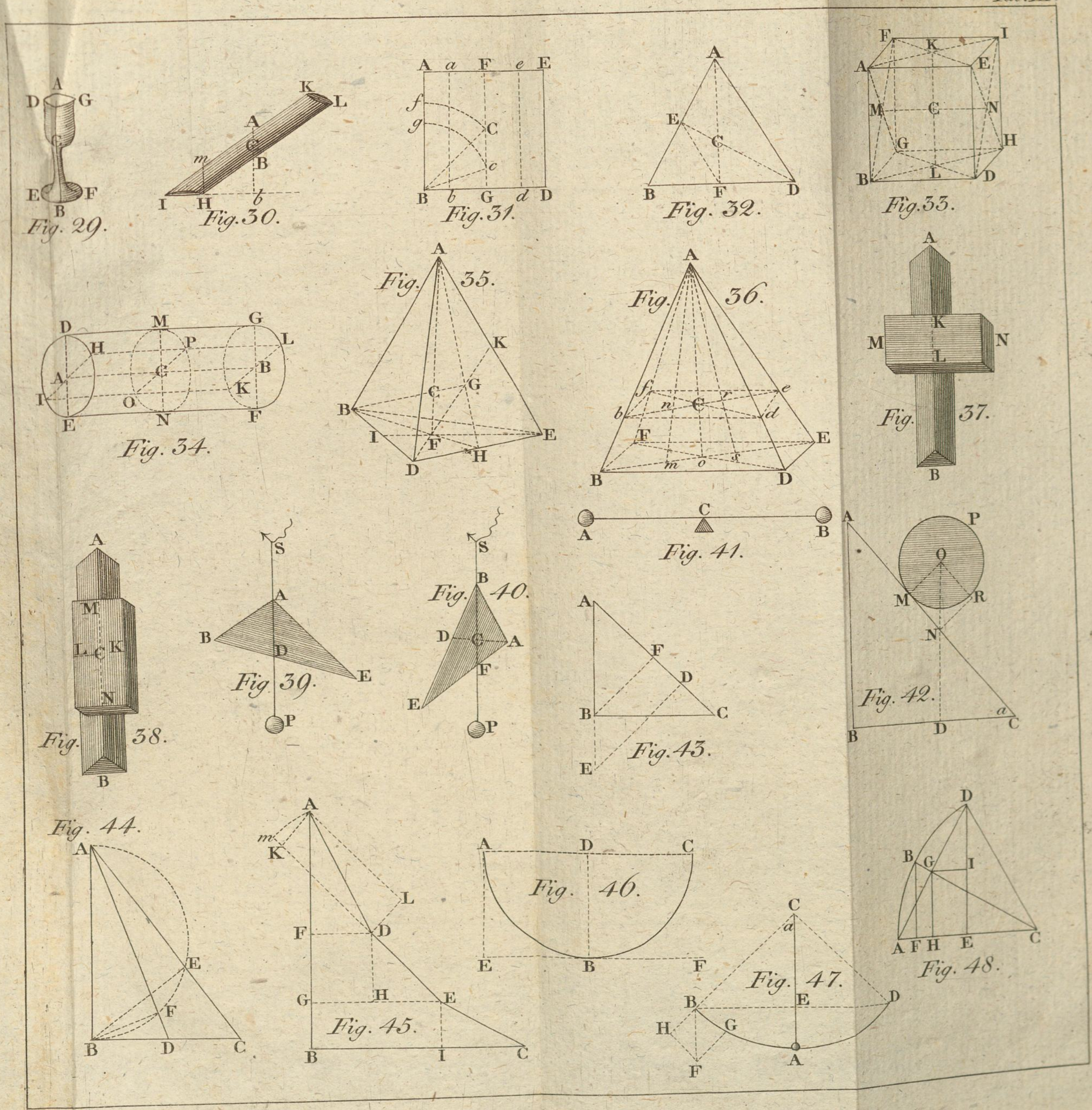


Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.

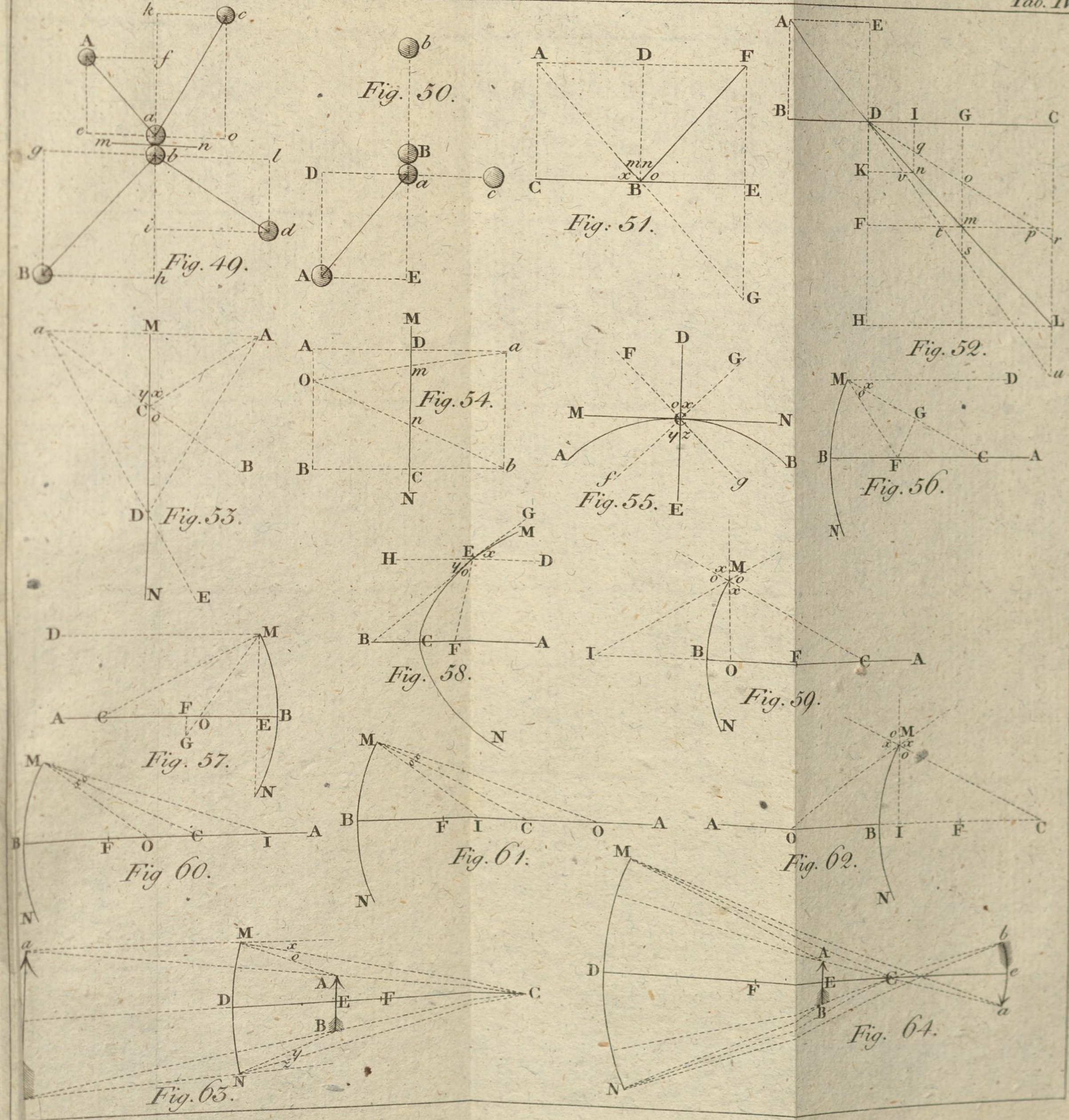


Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.